

УДК 539.31.001

**О ВОЛНОВОМ СПОСОБЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЯ ДЕФОРМИРУЕМЫХ ТЕЛ
ПО ОПОРНОЙ ПОВЕРХНОСТИ**

ДОБРЮЛОВ А. И.

Описываются способы перемещения деформируемых тел по опорной поверхности путем создания на телах периодически движущихся в одном направлении участков (вынужденных волн) деформации. Приводится единый подход для нахождения кинематических характеристик перемещения деформируемых тел для случаев поперечной и продольной волн, а также для случая перемещения упругого тела путем его прокатки прижимным роликом. Приводятся сведения о практическом использовании описанных способов перемещения упругих и гибких тел.

Перемещение деформируемых тел по опорной поверхности путем создания на теле периодически движущихся в одном направлении вынужденных волн деформации чрезвычайно распространено в природе и технике. В основе биологических механизмов передвижения таких живых существ, как змеи, гусеницы, дождевые черви, улитки и др., лежит модель деформируемого тела, связанного фрикционными силами с опорой, по которому в одном направлении периодически движутся волны локальной деформации, чередующиеся с недеформированными (нейтральными) участками [1-3]. Кинематически сходны с такой моделью некоторые процессы медленных смещений деформируемых масс в геологических явлениях [4]. К настоящему времени известно большое число технических устройств (транспортных тяговых механизмов, редукторов, электродвигателей), функционирование которых также связано с волновыми деформациями гибких и упругих тел [3, 5, 6], создаваемыми механическими, гидравлическими (пневматическими) и электромагнитными средствами.

Ниже рассматриваются с единых теоретических позиций процессы перемещения по жесткой опорной поверхности деформируемых тел, подверженных поперечным и продольным волнам деформации, и приводятся основные кинематические закономерности таких перемещений. Показано, что поперечные и продольные волны могут рассматриваться как волны линейной плотности. Рассматриваются медленные (квазистатические) волны, позволяющие пренебречь динамическими явлениями в движущихся телах.

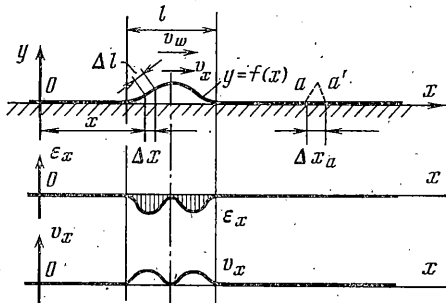
На фиг. 1 изображено лежащее на опоре и сцепленное с ней силами трения гибкое продолговатое нерастяжимое тело (нить), по которому периодически движется выпуклый изогнутый участок (поперечная волна). В [7] приводятся кинематические закономерности такого движения и показано, что во время прохождения волны каждая точка a гибкого тела, описав плоскую траекторию (показана пунктиром), перемещается в точку a' , где переходит в состояние покоя, т.е. совершает шаговое перемещение по опоре. Такая модель движения гибкого тела отражает способ передвижения садовой гусеницы.

На фиг. 2, *a* изображено лежащее на опоре удлиненное деформируемое тело, по которому в направлении Ox периодически движется продольно-деформируемый (удлинённый) участок l (волна удлинения). На фиг. 2, *b* изображен случай, когда в этих же условиях по телу движется волна сокращения. В [8] показано, что во время прохождения волны, характеризующейся эпурой ϵ_x продольной деформации, каждая точка a тела перемещается вдоль оси x в точку a' , т.е. каждая точка (поперечное сечение) деформируемого тела в этих условиях совершает шаговое перемещение по опоре, причем величина шага Δx в зависимости от знака ϵ_x может быть как положительной (в случае деформации сокращения, $\epsilon_x < 0$, фиг. 2, *b*), так и отрицательной (в случае деформации удлинения, $\epsilon_x > 0$, фиг. 2, *a*). Последняя модель (фиг. 2, *a*) движения деформируемого тела отражает способ передвижения дождевого червя [2, с. 179].

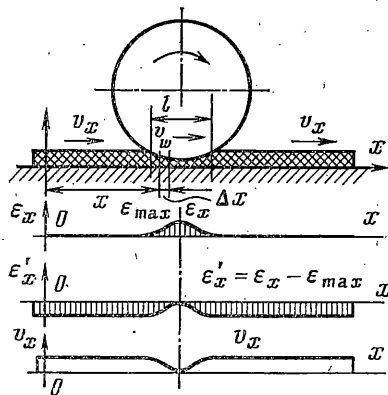
На фиг. 3 изображена схема упругого волнового редуктора, действие которого основано на создании движущегося участка деформации на слое упругого тела, например стали, резины, лежащего на жесткой опоре. При качении по упругому телу прижимного ролика (генератора волн деформации) на теле образуется бегущая

волна удлинения и тело, как показывает опыт, получает медленное непрерывное перемещение («ползет») по опоре в направлении перемещения ролика. При этом предельная развиваемая движущимся телом сила тяги определяется силой сцепления тела с опорной поверхностью.

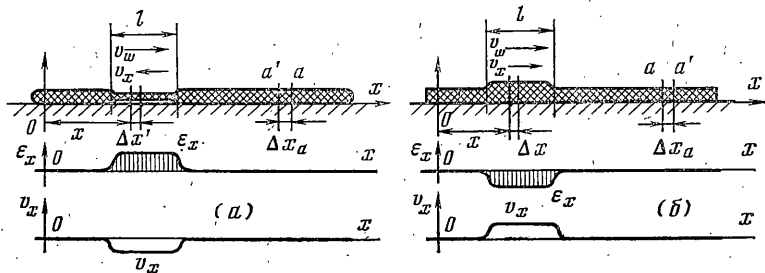
Сформулируем общие признаки описанных видов движения деформируемых тел по опорной поверхности. Очевидно, что общим для всех этих случаев движения является наличие движущегося участка l продольной (относительно оси x) деформации ϵ_x , а также наличие на теле в каждый момент времени неподвижных точек (участков), сцепленных с опорной поверхностью и являющихся неподвижными



Фиг. 1



Фиг. 3



Фиг. 2

точками опоры для перемещающихся в данный момент времени участков. Таким образом, движение каждой точки тела является шаговым (дискретным): интервалы движения здесь чередуются с интервалами покоя. Движение тела в целом в этом случае, очевидно, нельзя отнести ни к непрерывному, ни к дискретному, так как в любой момент времени на теле существуют и движущиеся и покоящиеся точки. В [7] такое движение тела названо дискретно-непрерывным (дискретно-волновым): каждая точка тела периодически переходит из состояния покоя в состояние движения и обратно.

Для построения общей модели движения тел, изображенных на фиг. 1–3, воспользуемся связью линейной плотности ρ_x тела в направлении x и деформации ϵ_x в этом же направлении

$$\rho_x = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{m_{\Delta x}}{\Delta x}, \quad \epsilon_x = \frac{\Delta x - \Delta x_0}{\Delta x_0} = \frac{\Delta x}{\Delta x_0} - 1 = \frac{\rho_0}{\rho_x} - 1 \quad (1)$$

Здесь $m_{\Delta x}$ — масса тела в промежутке Δx , Δx_0 , Δx — длина элемента тела до и после деформации, ρ_0 , ρ_x — линейная плотность до и после деформации. Очевидно, что $\Delta x / \Delta x_0 = \rho_0 / \rho_x$.

Спроектируем [9, с. 153] на ось x массы деформируемых тел, изображенных на фиг. 1–3. В результате получим прямую весомую линию (нить) переменной линейной плотности ρ_x и переменной деформации ϵ_x . Назовем такую нить растяжимой тяжелой нитью (РТН). Очевидно, что значения (эпюры) плотности ρ_x и деформации ϵ_x , являющиеся функциями от x , для случаев, изображенных на фиг. 1–3, будут различны.

Функция линейной плотности в направлении x гибкой нерастяжимой нити (фиг. 1), изогнутой по закону $y=f(x)$, очевидно, будет

$$\rho_x = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{m_{\Delta x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\rho_l \Delta l}{\Delta x} = \rho_l \frac{dl}{dx} = \rho_l \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dx} = \rho_l \sqrt{1 + y'^2} \quad (2)$$

где $m_{\Delta x} = \rho_l \Delta l$ — масса криволинейной нити длины Δl , приходящаяся на промежуток Δx , $\rho_l = \text{const}$ — собственная погонная плотность нити, равная плотности ρ_0 нити на участках, параллельных оси x . Продольная деформация ϵ_x вдоль оси x такой изогнутой нити в соответствии с (2) будет

$$\epsilon_x = dx / dl - 1 = \rho_0 / \rho_x - 1 = (1 + y'^2)^{-1/2} - 1 < 0 \quad (3)$$

Эпюра ϵ_x для поперечной волны на гибкой нити изображена на фиг. 1. Эпюры ϵ_x для продольных волн деформации рассматриваемых тел изображены на фиг. 2 и 3. В силу однозначной зависимости деформации ϵ_x и линейной плотности ρ_x и поперечные, и продольные волны деформации могут рассматриваться как волны линейной плотности на растяжимой тяжелой нити.

Рассмотрим процесс движения волн деформации. В [8] показано, что при движении со скоростью v_w очага (волны) продольной деформации вдоль деформируемого стержня каждая точка (сечение) стержня во время пробега по ней волны получает перемещение относительно недеформированной части стержня со скоростью

$$v_x = -\epsilon_x v_w \quad (4)$$

где ϵ_x — относительная деформация в точке x . Величина перемещения точки a равна

$$\Delta x_a = - \int_l \epsilon_x dx \quad (5)$$

где l — протяженность участка деформации, переместившегося по стержню. При этом волны сокращения ($\epsilon_x < 0$) вызывают смещение точек стержня в направлении движения волны, волны удлинения ($\epsilon_x > 0$) — в противоположном направлении, а недеформированные участки ($\epsilon_x = 0$) остаются в покое. Такой стержень может рассматриваться как растяжимая тяжелая нить.

Описанное сведение волн деформации различного вида к модели РТН позволяет воспользоваться соотношениями (4) (5), для нахождения кинематических характеристик движения по опорной поверхности всех описанных случаев, (фиг. 1–3) волн деформации как одномерных (осевых) перемещений деформируемого стержня.

В случае волнового движения гибкой нити (фиг. 1) горизонтальная составляющая v_x скорости произвольной точки x нити согласно (3) и (4) равна

$$v_x = -\epsilon_x v_w = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + y'^2}} \right) v_w = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \text{tg}^2 \alpha_x}} \right) v_w = (1 - \cos \alpha_x) v_w \quad (6)$$

где α_x — угол наклона гибкой нити в точке x . Этот результат совпадает с приведенным в [7]. Подставив $\alpha_x = \text{arctg } y'$, получим

$$v_x = [1 - \cos(\text{arctg } y')] v_w \quad (7)$$

Для одиночной выпуклой волны (фиг. 1) синусоидальной формы $y = \sin x + 1$ (для $c < x < c + 2\pi$, где $c = \text{const}$) согласно (7) имеем

$$v_x = [1 - \cos(\text{arctg}(\sin x + 1)')] v_w = [1 - \cos(\text{arctg} \cos x)] v_w \quad (8)$$

График горизонтальной скорости v_x точек гибкой нити, по которой движется поперечная выпуклая волна, дан на фиг. 1.

Шаг Δx_a точек гибкой нити на опорной поверхности равен

$$\Delta x_a = - \int_{l_w} \epsilon_x dx = \int_{l_w} dx - \int_{l_w} \cos \alpha_x dx = l_w - l$$

где l_w и l — спрямленная длина криволинейной нити на участке волны и ее проекция на опору.

Особый случай представляет собой волна деформации, бегущая по упругому телу, прокатываемому прижимным роликом (фиг. 3). В противоположность случаям фиг. 1, 2, здесь вершина бегущей волны продольной деформации ϵ_x (возникающей как поперечная деформация по отношению к прижимной силе ролика) фиксирована в каждый момент времени на опорной плоскости, а остальные участки тела, т. е. участки вне волны, свободны (сцеплением тела с опорой на участках, не прижатых роликом, пренебрегаем). Для применения формулы (4), выведенной для условия движущейся волны относительно неподвижного недеформированного тела, необходимо привести к нулю продольную деформацию в вершине волны тела, т. е. деформацию ϵ_{max} в вершине эпюры ϵ_x считать нулевой, а деформацию ϵ_x' в осталь-

ных точках тела отсчитывать относительно ε_{\max} как нулевого значения. Эпюра

$$\varepsilon_x' = \varepsilon_x - \varepsilon_{\max} \quad (9)$$

преобразованной таким образом продольной деформации упругого слоя изображена на фиг. 3. Теперь применение формул (4) и (9) к упругому телу, подверженному движущейся со скоростью v_w деформации ε_x' , дает

$$v_w = -\varepsilon_x' v_w = (\varepsilon_{\max} - \varepsilon_x) v_w \quad (10)$$

Следовательно, недеформированные участки прокатываемого роликом тела (где $\varepsilon_x = 0$) движутся с равномерной скоростью $v_x = \varepsilon_{\max} v_w$, а точка максимального прижатия тела роликом (где $\varepsilon_x = \varepsilon_{\max}$) находится в покое. График скорости v_x точек тела изображен на фиг. 3.

Большой коэффициент редукции, равный $v_w / v_x = 1 / \varepsilon_{\max}$, и значительное усилие, развиваемое перемещаемым упругим слоем, позволяют применить схему фиг. 3 (ее круговой вариант, где прижимные ролики движутся по кругу) для создания простых редукторов с большим передаточным отношением, обладающих плавностью работы и возможностью передвижения ведомого звена до жесткого упора. Последнее свойство подобных механизмов на упругих и гибких элементах делает их перспективными, в частности для осуществления перемещений транспортирующих и силовых органов промышленных роботов и манипуляторов.

Описанный механизм волнового передвижения деформируемых тел позволяет рассматривать движение волн деформации (плотности) как процесс массопереноса деформируемого тела. Волна (участок l) плотности, движущаяся по РТН со скоростью v_w , обладает количеством движения (импульсом) вдоль оси x , равным

$$P = \int_l \rho_x v_x dx.$$

Для модели поперечной волны на гибкой нити (фиг. 1) согласно (2) - (4):

$$\begin{aligned} P &= \int_l \rho_l \frac{dl}{dx} \left(1 - \frac{dx}{dl} \right) v_w dx = \rho_l v_w \int_l \left(\frac{dl}{dx} - 1 \right) dx = \\ &= \rho_l v_w \left(\int_l dl - \int_l dx \right) = \rho_l v_w (l_w - l) = \rho_l v_w \Delta x_a = v_w \Delta m \end{aligned} \quad (11)$$

Отсюда можно сделать вывод, что поперечная волна на гибкой нити, движущаяся со скоростью v_w , переносит с той же скоростью массу $\Delta m = \rho_l (l_w - l)$. Для модели продольной волны на стержне (фиг. 2) согласно (1), (4):

$$\begin{aligned} P &= \int_l \rho_x (-\varepsilon_x v_w) dx = \int_l \rho_x \left(1 - \frac{\rho_0}{\rho_x} \right) v_w dx = v_w \int_l (\rho_x - \rho_0) dx = \\ &= v_w \left(\int_l \rho_x dx - \int_l \rho_0 dx \right) = v_w (m_x - m_0) = v_w \Delta m \end{aligned} \quad (12)$$

где m_x , m_0 - массы участка длиной l деформированного и недеформированного стержня, $\Delta m = m_x - m_0$ - масса, переносимая волной. Заметим, что эта масса может быть отрицательной (при $\varepsilon_x > 0$), что означает перенос массы волной в сторону, противоположную направлению движения волны.

Масса, переносимая движущейся волной деформации неизменяющегося профиля, постоянна по величине, но является «переменной по составу» в том смысле, что частицы деформируемого тела, составляющие эту массу, в процессе движения волны непрерывно обновляются (замещаются) новыми частицами из недеформированной неподвижной части тела. Частицы деформируемого волновым способом тела получают разновременные шаговые движения по опорной поверхности. Характерной чертой такого движения является шаговый цепной процесс массопереноса: здесь масса тела может быть перенесена в некотором направлении x на сколько угодно большое расстояние путем осуществления периодических последовательных малых смещений и остановов соседних частиц на небольшой шаг Δx . Такой «последовательно-эстафетный» процесс замещения частиц волны характерен и для поперечной и для продольной волн, однако характер (кинематика) движения частиц тела во время этого процесса замещения существенно различен для обоих типов волн. Приведенные соотношения (11), (12), выведенные без учета характера движения частиц, позволяют найти массоперенос, осуществляемый поперечной и продольной волнами.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Триетан Е. Р.* The Locomotion of Soft-bodied Animals L.: Arnold, 1974. 200 p.
2. *Александр Р.* Биомеханика. М.: Мир, 1970. 339 с.
3. *Добролюбов А. И.* О механике движения сухопутной змеи.— Биофизика, 1983, № 2, с. 330—335.
4. *Добролюбов А. И.* Глобальный механизм генерации горизонтальных движений земной коры.— Докл. АН БССР, 1982, т. 26, № 4, с. 358—361.
5. *Добролюбов А. И.* Фрикционный шаговый механизм.— Трение и износ, 1980, № 5, с. 934—938.
6. *Добролюбов А. И.* Волновые шаговые механизмы на гибких связях.— Механика машин: Сб. статей. М.: Наука, 1983, вып. 61, с. 88—93.
7. *Добролюбов А. И.* К теории дискретно-волнового движения.— Докл. АН БССР, 1980, т. 24, № 11, с. 999—1002.
8. *Добролюбов А. И.* О перемещении слоя деформируемого тела под действием движущейся локальной деформации.— Докл. АН БССР, 1981, т. 25, № 6, с. 522—525.
9. *Зельдович Я. Б., Мышкис А. Д.* Элементы прикладной математики. М.: Наука, 1967. 646 с.

Минск

Поступила в редакцию
19.VIII.1982

Технический редактор *Т. В. Скворцова*

Сдано в набор 05.06.84 Подписано к печати 25.07.84 Т-11046 Формат бумаги 70×108¹/₁₆
Высокая печать Усл. печ. л. 16,8 Усл. кр.-отт. 24,6 тыс. Уч.-изд. л. 18,2 Бум. л. 6,0
Тираж 1451 экз. Зак. 232

Издательство «Наука», 103717 ГСП, Москва, К-62, Подсосенский пер., 21
2-я типография издательства «Наука», 121099, Москва, Шубинский пер., 10