

УДК 539.3

ОПТИМАЛЬНОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ УПРУГИХ ПЛАСТИН, ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ С ВНЕШНИМ ТЕПЛОВЫМ ПОЛЕМ

КАРТВЕЛИШВИЛИ В. М.

Температурные напряжения значительно влияют на прочностные и жесткостные характеристики конструктивных элементов [1, 2]. Первые работы по оптимальному проектированию конструкций, в которых существенно учитываются тепловые напряжения, появились сравнительно недавно [3–5], и число публикаций в данной области весьма ограничено. В основном конструкции проектируются без учета влияния тепловых нагрузок [6–46], либо напряженно-деформированное состояние конструктивного элемента оптимизируется за счет соответствующего выбора характера температурной нагрузки [47] или способа размещения источников тепла [48].

Ниже рассматривается новый класс двумерных задач оптимизации тонкостенных термоупругих конструкций, поле температур и напряженно-деформированное состояние в которых существенно зависит от искоемых геометрических и структурных характеристик, а также вида взаимодействия с внешним тепловым полем. Для пластин переменной толщины, выполненных из неоднородного анизотропного материала, выписываются определяющие соотношения теории температурных напряжений и в рамках этой теории ставится задача оптимизации с локальными и интегральными функционалами и ограничениями общего вида. Проводится анализ чувствительности и выводятся необходимые условия оптимальности в задачах, где в качестве управляющих функций выбраны толщина композитной термоупругой пластины и концентрация армирующих включений.

На допустимые значения градиентов управляющих функций наложены ограничения, что позволяет проводить оптимизацию, не выходя за рамки исходной модели пластины, и обеспечивает существование решения оптимизационной задачи. Излагается алгоритм метода последовательной оптимизации тонкостенных конструкций, взаимодействующих с тепловым полем. На базе вариационного подхода выписываются эффективные схемы численного решения задач теплопроводности и термоупругости для неоднородных анизотропных пластин переменной толщины. Для различных видов тепловых нагрузок проводится анализ полученных с помощью изложенной методики оптимальных форм распределения силового материала в упругих пластинах.

1. Определяющие соотношения теории температурных напряжений.

В прямоугольной системе координат $Ox_1x_2x_3$ рассмотрим симметричную относительно плоскости $x_3=0$ тонкую упругую пластину переменной толщины $-h(x) \leq x_3 \leq h(x)$ ($x \in (x_1, x_2)$), занимающую область $R + \partial R$ с граничной поверхностью $\partial R = \partial R^+ \cup \partial R^- \cup \partial R_\Gamma$, где $\partial R^\pm = \pm h(x)$, а ∂R_Γ — линейчатая поверхность, образованная из нормалей к срединной плоскости пластины Ω в точках ее граничного контура Γ . Площадь области Ω равна S . На допустимые значения градиентов толщин пластины наложено ограничение

$$\max_{x \in \Omega} [h(x), h(x),_i]^{1/2} \leq \kappa \quad (\kappa > 0) \quad (1.1)$$

Здесь и далее латинские индексы i, j, k, l принимают значение 1 и 2; по дважды повторяющимся латинским индексам ведется суммирование; индекс после запятой означает дифференцирование по соответствующей координате.

Пластина деформируется в своей плоскости без выпучивания вследствие задания на участках $\partial R_\pm$ границы ∂R_Γ , симметричных относительно срединной поверхности смещений $u_\Gamma = \{u_1, u_2\}$, а также в результате теплового и силового взаимодействия с внешней средой.

Силовое взаимодействие с внешней средой обусловлено наличием в области $R+\partial R$ вектора массовых сил $f=\{f_1, f_2\}$, отнесенных к единице объема пластины, вектора усилий $F=\{F_1, F_2\}$, приходящихся на единицу площади срединной поверхности Ω , а также наличием на участках ∂R_g границы ∂R_T поверхностных нагрузок $g=\{g_1, g_2\}$, отнесенных к единице длины контура Γ . Поверхности $\partial R^\pm$ свободны от усилий. Нагрузки симметричны относительно плоскости $x_3=0$.

В предположении о симметричности граничных условий относительно срединной поверхности и равномерности прогрева стенки по толщине считаем, что тепловые процессы в пластине обусловлены следующими факторами: заданием на участках ∂R_T границы ∂R_T температуры T_T ; теплообменом пластины с окружающей средой по закону Ньютона на поверхностях $\partial R^\pm$ и участках ∂R_q поверхности ∂R_T ; наличием в $R+\partial R$ симметрично расположенных относительно $x_3=0$ источников тепла с удельными мощностями q и Q соответственно на единицу объема пластины и на единицу площади ее срединной поверхности.

При указанном силовом и тепловом взаимодействии с внешней средой выполнение условий (1.1) для достаточно малых κ (плавном изменении толщины пластины) обеспечивает существование в тонкой пластине плоского напряженного состояния и позволяет усреднить по толщине стенки систему трехмерных уравнений теории температурных напряжений, а также соответствующие двумерные граничные условия. При этом часть граничных условий в задаче теплопроводности (на поверхностях $\partial R^\pm$) можно включить в усредненные уравнения, а условия на границе ∂R_T свести к условиям на соответствующих участках контура Γ : ($\Gamma_T \subset \partial R_T$, $\Gamma_u \subset \partial R_u$, $\Gamma_q \subset \partial R_q$, $\Gamma_g \subset \partial R_g$) [19]. В результате приходим к следующей двумерной краевой задаче теории температурных напряжений относительно температуры $T(x)$ и вектора смещений $u=\{u_1(x), u_2(x)\}$ в плоскости пластины:

$$\begin{aligned} (hk_{ij}T_{,j})_{,i} - \mu_a H(T - \theta_a) + hq + Q &= 0 \quad (H = (1 + h_i h_{,i})^{1/2}) \\ T = T_T \quad \text{на } \Gamma_T \subset \Gamma; \quad h(k_{ij}T_{,j} \cos \alpha_i + \mu_T(T - \theta_T) + q_T) &= 0 \quad \text{на } \Gamma_q \subset \Gamma \\ (hc_{ijkl}u_{h,i})_{,j} - (h\beta_{ij}T)_{,j} + hf_i + F_i &= 0 \\ u = u_T \quad \text{на } \Gamma_u \subset \Gamma; \quad h(c_{ijkl}u_{h,i} - \beta_{ij}T) \cos \alpha_j - g_i &= 0 \quad \text{на } \Gamma_g \subset \Gamma \end{aligned} \quad (1.2)$$

Здесь $\mu_a = \mu_a(x)$ — коэффициент теплоотдачи на поверхностях $\partial R^\pm$, $\theta_a = \theta_a(x)$ — температура среды омывающей поверхности $\partial R^\pm$, $\mu_T = \mu_T(l)$, $\theta_T = \theta_T(l)$, $q_T = q_T(l)$ — коэффициент теплоотдачи, температура внешней среды и удельная мощность теплового потока на контуре $\Gamma(l \in \Gamma)$, $\beta_{ij} = \beta_{ij}(x)$ — тензор тепловых напряжений, $k_{ij} = k_{ij}(x)$ — тензор коэффициентов теплопроводности, $c_{ijkl} = c_{ijkl}(x)$ — тензор модулей упругости, α_i — угол между осью x_i и нормалью к контуру Γ .

2. Анализ чувствительности и необходимые условия оптимальности.
1. *Постановка задачи оптимизации.* Сведение локальных функционалов и ограничений к интегральным. Ставится следующая задача оптимизации: найти в Ω функцию $h(x)$, минимизирующую локальный или интегральный функционал

$$J_0 = \max_{x \in \Omega} \Psi_0(h, h_{,i}, u_i, u_{i,j}, T, T_{,i}) \rightarrow \min_h \quad (2.1)$$

$$J_0 = \int_{\Omega} \Phi_0(h, h_{,i}, u_i, u_{i,j}, T, T_{,i}) d\Omega \rightarrow \min_h \quad (2.2)$$

при ограничениях и изопериметрических условиях

$$0 < h^-(x) \leq h(x) \leq h^+(x) \quad (2.3)$$

$$J_\alpha = \max_{x \in \Omega} \Psi_\alpha(h, h_{,i}, u_i, u_{i,j}, T, T_{,i}) = \xi_\alpha \quad (\alpha = 1, \dots, \alpha_1) \quad (2.4)$$

$$J_\beta = \int_{\Omega} \Phi_\beta(h, h_{,i}, u_i, u_{i,j}, T, T_{,i}) d\Omega = \kappa_\beta \quad (\beta = \alpha_1 + 1, \dots, \alpha_1 + \beta_1) \quad (2.5)$$

Учитывая малое отличие норм в пространстве непрерывных функций и в пространстве L_p при достаточно больших значениях p , локальный функционал (2.1) и локальные ограничения (2.4) можно свести к интегральным, записав их в виде

$$J_\alpha = \lim_{p \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{S} \int_{\Omega} \Psi_\alpha^p d\Omega \right)^{1/p} \quad (\alpha=0, \dots, \alpha_1) \quad (2.6)$$

Поэтому, выбирая соответствующие p [20] и принимая во внимание (2.6), можно считать, что имеется интегральный функционал J_0 типа (2.2) с $\Phi_0 = \Psi_0^p$ и $\alpha_1 + \beta_1$ интегральных ограничений (2.5), в которых при $\alpha=1, \dots, \alpha_1$ следует положить $\Phi_\alpha = \Psi_\alpha^p$, $\kappa_\alpha = S \xi_\alpha^p$.

Минимизируемый функционал J_0 и ограничения J_α имеют весьма общий вид, что позволяет рассмотреть разнообразные задачи оптимального проектирования термоупругих конструкций. Так, для конструкций из однородного материала функционал (2.2) с $\Phi_0 = \Phi_0(h)$ задает их геометрические характеристики, в частности при $\Phi_0(h) = 2h(x)$ — объем пластины. Положив в (2.5) $\Phi_1 = (h, u, T)^{p/2}$, $\kappa_1 = S \kappa^p$, имеем возможность с учетом (2.3) задать ограничения конструктивного и технологического характера на исходную толщину. При этом данные условия ограничивают значение и скорость изменения функции в области Ω , т. е. задают достаточно «плавное» распределение толщин тонкой пластины без резких перепадов и ребер и позволяют проводить оптимизацию, не выходя за рамки исходной модели пластины (см. п. 1).

Как следует из вида подынтегральной функции, условия (2.4), (2.5) могут также задавать требуемые ограничения на перемещения, деформации и напряжения внутри нагретой пластины, если последние выразить с помощью известных соотношений через u_i и T . Кроме того, согласно (2.4), (2.5), можно наложить некоторые технологически оправданные ограничения и на температурное поле внутри пластины.

2. *Формула анализа чувствительности. Необходимые условия оптимальности.* Чтобы получить сопряженную систему, вывести необходимые условия оптимальности и провести анализ чувствительности, используем технику оптимального управления системами с распределенными параметрами. Проварьируем функции h, u_i, T : $h + \delta h, u_i + \delta u_i, T + \delta T$ и выпишем выражения для первых вариаций функционалов J_0 и J_α , обозначив через $\Omega_\beta^{p\alpha}, \Gamma_\beta^{p\alpha}$ следующие операторы (p_α — целая положительная константа):

$$\Omega_\beta^{p\alpha} = \Phi_\alpha^{p\alpha-1} \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial \beta} - \left(\Phi_\alpha^{p\alpha-1} \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial \beta_j} \right)_{,j}, \quad \Gamma_\beta^{p\alpha} = \Phi_\alpha^{p\alpha-1} \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial \beta_j} \cos \alpha_j \quad (2.7)$$

Имеем

$$\begin{aligned} \delta J_\alpha = p_\alpha \int_{\Omega} (\Omega_h^{p\alpha} \delta h + \Omega_{u_i}^{p\alpha} \delta u_i + \Omega_T^{p\alpha} \delta T) d\Omega + \\ + p_\alpha \int_{\Gamma} (\Gamma_h^{p\alpha} \delta h + \Gamma_{u_i}^{p\alpha} \delta u_i + \Gamma_T^{p\alpha} \delta T) d\Gamma \quad (\alpha=0, \dots, \alpha_1 + \beta_1) \end{aligned} \quad (2.8)$$

В формулах (2.7), (2.8) константу p_α полагаем равной единице, если минимизируемый функционал или соответствующее ограничение в исходной постановке оптимизационной задачи интегральные, т. е. имеют вид (2.2), (2.5).

Составим функционал Лагранжа $J = \lambda_m J_m$, где λ_m — множители Лагранжа ($m=0, \dots, \alpha_1 + \beta_1, \lambda_0=1$), и выпишем, опираясь на формулы (2.7), (2.8), его вариацию $\delta J = \lambda_m \delta J_m$. В формулах для δJ_m необходимо выразить вариации перемещений δu_i и температуры δT через вариацию управляющей функции δh . С этой целью введем для функций $u_i(x)$ и $T(x)$ соответствующие сопряженные переменные $v_i(x)$ и $\eta(x)$ и запишем в вариациях ис-

ходную систему (1.2). Умножим соответствующие уравнения системы в вариациях на сопряженные функции и проинтегрируем полученные выражения по области Ω . Записывая условие экстремума для функционала Лагранжа ($\delta J=0$) и приравнявая в нем нулю (с учетом проинтегрированных выражений и граничных условий в вариациях) члены, содержащие в качестве множителей вариации функций δu_i и δT , получим следующую систему дифференциальных уравнений и граничных условий, составляющую краевую задачу для сопряженных переменных v_i и η :

$$\begin{aligned} (hc_{ijk}v_{i,j})_{,i} + \lambda_m p_m \Omega u_i^{p_m} &= 0 \\ v &= 0 \text{ на } \Gamma_u \subset \Gamma, \quad hc_{ijk}v_{i,j} \cos \alpha_i - \lambda_m p_m \Gamma u_i^{p_m} = 0 \text{ на } \Gamma_g \subset \Gamma \\ (hk_{ij}\eta_{,i})_{,j} - \mu_\Omega H\eta + h\beta_{ij}v_{i,j} + \lambda_m p_m \Omega T^{p_m} &= 0 \\ \eta &= 0 \text{ на } \Gamma_T \subset \Gamma, \quad hk_{ij}\eta_{,i} \cos \alpha_j - \lambda_m p_m \Gamma T^{p_m} = 0 \text{ на } \Gamma_q \subset \Gamma \end{aligned} \quad (2.9)$$

Исключив указанным способом из выражения для вариации функционала δJ члены, обусловленные вариацией функций u_i и T , приходим к основной формуле анализа чувствительности, связывающей с учетом изопериметрических условий вариацию оптимизируемого функционала с вариацией управляющей переменной (δ_{im} — символ Кронекера):

$$\delta J = \int_{\Omega} \Phi_\Omega \delta h \, d\Omega + \int_{\Gamma} \Phi_\Gamma \delta h \, d\Gamma \quad \Phi_\Omega = (\lambda_m p_m \Omega h^{p_m} + \delta_{0m} \Sigma^0) \quad (\lambda_0 = 1) \quad (m=0, \dots, \alpha_1 + \beta_1) \quad (2.10)$$

$$\begin{aligned} \Sigma^0 &= -\eta_{,i} k_{ij} T_{,j} + [\mu_\Omega \eta (T - \theta_\Omega) (h_{,i} h_{,i})^{-1} h_{,j}]_{,j} + \\ &+ q\eta - v_{i,j} c_{ijk} u_{k,i} + \beta_{ij} T v_{i,j} + v_i f_i \end{aligned}$$

$$\Phi_\Gamma = \lambda_m p_m \Gamma h^{p_m} - \delta_{0m} \mu_\Omega \eta (T - \theta_\Omega) (h_{,i} h_{,i})^{-1} h_{,j} \cos \alpha_j$$

Из условия экстремума функционала $\delta J=0$ с учетом произвольности вариаций δh в (2.10) получим необходимые условия оптимальности, приравняв подинтегральные выражения нулю: $\Phi_\Omega=0$, $\Phi_\Gamma=0$. Учтем в условиях оптимальности ограничения (2.3). Это можно осуществить несколькими способами. Так, введем вспомогательную управляющую функцию $\xi(x)$ по закону

$$h(x) = 1/2 [h^+(x) + h^-(x)] + 1/2 [h^+(x) - h^-(x)] \sin \xi(x) \quad (2.11)$$

Видно, что в этом случае неравенства (2.3) выполняются автоматически.

В итоге искомое условие оптимальности запишется в виде

$$\Phi_\Omega \cos \xi(x) = 0, \quad \Phi_\Gamma \cos \xi(l) = 0 \quad (x \in \Omega, \quad l \in \Gamma) \quad (2.12)$$

и для отыскания функций $T(x)$, $u_i(x)$, $v_i(x)$, $\eta(x)$, $h(x)$ имеем совокупность из четырех двумерных краевых задач (1.2), (2.9) и условия оптимальности (2.12). Известные постоянные Лагранжа $\lambda_m (m=1, \dots, \alpha_1 + \beta_1)$ определяются при помощи изопериметрических условий (2.4), (2.5).

Итак, отыскание оптимального распределения толщин $h(x)$ свелось к решению в указанной выше последовательности замкнутой нелинейной (ввиду нелинейной зависимости правых частей (2.9) от искомых переменных) краевой задачи.

3. Анализ чувствительности в задаче совместной оптимизации геометрических характеристик и структуры композитной термоупругой пластины. В качестве примера сведения задачи оптимизации с локальным функционалом и локальными ограничениями к задаче с интегральным критерием качества и интегральными связями выпишем условия оптимальности в конкретной задаче оптимального проектирования упругой

неоднородной композиционной пластины. При этом, чтобы выделить существо вопроса, положим в (1.2) для простоты $\mu_a=0$ (теплопровод с поверхностей пластины $\pm h(x)$ отсутствует), $q=0$, $\mu_T=0$, $f=0$; $T=0$ на $\Gamma_T=\Gamma$; $u_i=0$ на $\Gamma_u=\Gamma$. Попутно введем новый элемент в постановку задачи: в качестве управляющих функций выберем теперь как толщину пластины $h(x)$, так и концентрацию $r(x)$ армирующего материала с плотностью ρ_a , заполняющего упругую матрицу с плотностью ρ_m . Итак считаем, что в (1.2) известна зависимость элементов тензоров β_{ij} , k_{ij} , c_{ijkl} от концентрации $r(x)$ армирующих включений: $\beta_{ij}(x)=\beta_{ij}(r)$, $k_{ij}(x)=k_{ij}(r)$, $c_{ijkl}(x)=c_{ijkl}(r)$. При этом на функцию $r(x)$ наложим ограничения типа (1.1), (2.3):

$$(r, r_i)^{1/2} \leq \delta \quad (2.13)$$

$$0 < r^-(x) \leq r(x) \leq r^+(x) \quad (2.14)$$

определяемые как технологическими требованиями, так и условиями применимости модели композита [21].

Перепишем для удобства систему (1.2) в следующем виде:

$$(hk_{ij}T_{,j})_{,i} + Q = 0, \quad (h\sigma_{ij})_{,j} + F_i = 0; \quad T = 0, \quad u_i = 0 \quad \text{на } \Gamma \quad (2.15)$$

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl}e_{kl} - \beta_{ij}T, \quad \varepsilon_{kl} = 1/2(u_{k,l} + u_{l,k})$$

где σ_{ij} — тензор напряжений, ε_{kl} — тензор деформаций.

В качестве минимизируемого функционала выберем величину максимального смещения пластины в ее плоскости: $J_0 = \max(u_i u_i)^{1/2} \quad (x \in \Omega)$. Этот локальный функционал приближенно заменим интегральным

$$J_0 = \int_{\Omega} (u_i u_i)^{p/2} d\Omega \rightarrow \min_{h,r} \quad (2.16)$$

Заменим также локальные ограничения (1.1), (2.13) их интегральными аналогами

$$J_1 = \int_{\Omega} (\sqrt{h_{,i} h_{,i}})^{p_1} d\Omega \leq \kappa_1, \quad J_2 = \int_{\Omega} (\sqrt{r_{,i} r_{,i}})^{p_2} d\Omega \leq \kappa_2 \quad (2.17)$$

Считаем, что изопериметрическим условием служит постоянство массы композитной пластины

$$J_3 = \int_{\Omega} h[\rho_m + (\rho_a - \rho_m)r] d\Omega = M \quad (2.18)$$

Задача оптимизации заключается в нахождении распределений функций $h(x)$ и $r(x)$, входящих в (2.18), которые минимизируют функционал (2.16) при ограничениях (2.3), (2.14), (2.17), (2.18). Для простоты считаем также, что h и r заданы на Γ и в процессе оптимизации не меняются. Для получения необходимых условий оптимальности составим функционал Лагранжа

$$J = \int_{\Omega} \{ (\sqrt{u_i u_i})^{p_0} + \lambda_1 [(\sqrt{h_{,i} h_{,i}})^{p_1} - \kappa_1] + \lambda_2 [(\sqrt{r_{,i} r_{,i}})^{p_2} - \kappa_2] + \lambda_3 [h[\rho_m + (\rho_a - \rho_m)r] - M] + \omega_i [(h\sigma_{ij})_{,j} + F_i] + \eta [(hk_{ij}T_{,j})_{,i} + Q] + \xi_{ij} [\varepsilon_{ij} - 1/2(u_{i,j} + u_{j,i})] + \chi_{ij} [\sigma_{ij} - c_{ijkl}e_{kl} + \beta_{ij}T] \} d\Omega$$

где ω_i , η , ξ_{ij} , χ_{ij} — сопряженные функции, λ_1 , λ_2 , λ_3 — множители Лагранжа. Используя описанные выше приемы, получим следующую краевую задачу для сопряженных функций:

$$\xi_{ij,i} + p_0(u_i u_i)^{1/2 p_0 - 1} u_j = 0, \quad (hk_{ij}\eta_{,i})_{,j} + \beta_{ij}\chi_{ij} = 0 \quad (2.19)$$

$$\chi_{ij} - h\omega_{i,j} = 0, \quad \xi_{ij} - \chi_{ij}c_{ijkl} = 0; \quad h\psi_i = 0, \quad \eta = 0 \quad \text{на } \Gamma$$

Формула анализа чувствительности (формула, связывающая вариацию оптимизируемого функционала с вариациями управляющих функций) примет вид

$$\delta J = \int_{\Omega} (\Phi_h \delta h + \Phi_r \delta r) d\Omega$$

$$\Phi_h = \lambda_3 [\rho_m + (\rho_a - \rho_m) r] - \omega_{i,j} \sigma_{ij} - \eta_{i,j} k_{ij} T_{,j} - \lambda_1 p_1 [(h_{,i} h_{,i})^{1/2 p_1 - 1} h_{,j}]_{,j}$$

$$\Phi_r = \lambda_3 h (\rho_a - \rho_m) + \frac{\partial \beta_{ij}}{\partial r} T - \chi_{ij} \frac{\partial c_{ijkl}}{\partial r} \varepsilon_{kl} - \lambda_2 p_2 [(r_{,i} r_{,i})^{1/2 p_2 - 1} r_{,j}]_{,j}$$

Из условия $\delta J = 0$ с учетом произвольности δh и δr приходим к следующим необходимым условиям оптимальности, приравняв нулю подынтегральные выражения:

$$\Phi_h = 0, \quad \Phi_r = 0 \quad (2.20)$$

В итоге для нахождения искомых управляющих функций h и r имеем замкнутую систему уравнений (2.15), (2.19), (2.20) и изопериметрических условий (2.17), (2.18).

3. Метод последовательной оптимизации. Для нахождения оптимальных распределений управляющей функции $h(x)$ в рассматриваемых задачах оптимального проектирования упругих пластин с учетом тепловых воздействий предлагается алгоритм метода последовательной оптимизации. Алгоритм состоит из шагов. На первом этапе каждого шага при известных текущих распределениях толщин и заданных характеристиках композитной среды последовательно решаются прямые задачи расчета температурного поля и напряженно-деформированного состояния в сплошной композитной пластине переменной толщины. На втором этапе последовательно находится решение «сопряженных» задач для перемещений и температуры, т. е. в Ω численно отыскиваются сопряженные функции для $u_i(x)$ и $T(x)$. На заключительном этапе, опираясь на формулы анализа чувствительности и используя метод проектирования градиентов, находится новая реализация $h(x)$, приводящая к улучшению на данном шаге выбранного функционала качества с учетом заданных ограничений.

1. Численные методы решения прямых и сопряженных задач. Весьма важными и трудоемкими этапами реализации алгоритма на каждом шаге являются этапы численного отыскания полей перемещений, температуры и сопряженных функций. Необходимость неоднократного решения прямых и сопряженных задач, обусловленная существом метода последовательной оптимизации, требует разработки экономичных и эффективных методов их численного решения.

Поля перемещений, температуры и сопряженных функций целесообразно отыскивать вариационно-разностным методом, так как из одинаковой структуры краевых задач (1.2) и (2.9) вытекает одинаковая структура соответствующих минимизируемых функционалов, что, в свою очередь, позволяет единообразно выписывать квадратурно-разностные аналоги функционалов [22], причем указанные аналоги совпадают на одинаковых сетках разбиения области Ω .

Минимизируемые функционалы прямой задачи

$$\pi(T) = \int_{\Omega} [U_T(T) - U_q(T)] d\Omega + \int_{\Gamma_q} U_{\Gamma_q}(T) d\Gamma \rightarrow \min_T$$

$$U_T(T) = 1/2 (h T_{,i} k_{ij} T_{,j} + \mu_a H T^2), \quad U_q(T) = (\mu_a H \theta_a + h q + Q) T$$

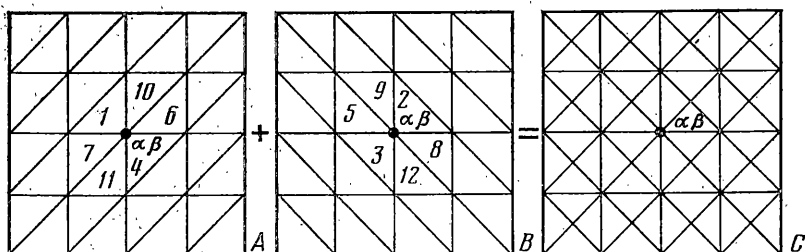
$$U_{\Gamma_q}(T) = (q_{\Gamma} T + 1/2 \mu_{\Gamma} (T - \theta_{\Gamma})^2) h \quad (3.1)$$

$$\pi(u_i, T) = \int_{\Omega} [U_u(u_i, T) - U_f(u_i)] d\Omega - \int_{\Gamma_g} U_g(u_i) d\Gamma \rightarrow \min_{u_i}$$

$$U_u(u_i, T) = h (1/2 u_{i,j} c_{ijkl} u_{kl} - \beta_{ij} T u_{i,j})$$

$$U_f(u_i) = (h f_i + F_i) u_i, \quad U_g(u_i) = g_i u_i$$

предлагается аппроксимировать конечно-разностными аналогами на регулярной сетке разбиения C , образованной наложением двух вспомогательных треугольных сеток A и B (см. фиг. 1). Указанная сетка позволяет достичь высокую степень симметрии при выписывании квадратурно-разностных аппроксимаций интегралов по области Ω и контуру Γ .



Фиг. 1

На сетках A и B каждый регулярный узел $(\alpha\beta)$ внутри области Ω окружают шесть треугольных ячеек, поэтому в конечно-разностном аналоге функционалов (3.1) на сетке C внутреннему узлу $(\alpha\beta)$ соответствует двенадцать слагаемых:

$$\begin{aligned} \pi_{\alpha\beta} &\approx \Pi_{\alpha\beta} = 1/2 (\Pi_{\alpha\beta}^A + \Pi_{\alpha\beta}^B) \\ \Pi_{\alpha\beta}^A &= S_{\alpha\beta}^1 + S_{\alpha\beta}^4 + S_{\alpha\beta}^6 + S_{\alpha\beta}^7 + S_{\alpha\beta}^{10} + S_{\alpha\beta}^{11} \\ \Pi_{\alpha\beta}^B &= S_{\alpha\beta}^2 + S_{\alpha\beta}^3 + S_{\alpha\beta}^5 + S_{\alpha\beta}^8 + S_{\alpha\beta}^9 + S_{\alpha\beta}^{12} \end{aligned} \quad (3.2)$$

где $S_{\alpha\beta}^i$ ($i=1, \dots, 12$) — конечно-разностные аппроксимации интегралов по области Ω , выписанные для соответствующих треугольников. Если узел принадлежит границе Γ , то число слагаемых очевидным образом уменьшается, однако к правой части первого выражения в (3.2) добавится слагаемое $R_{\alpha\beta}$, аппроксимирующее интеграл по контуру Γ , а именно $\pi_{\alpha\beta} \approx \Pi_{\alpha\beta} = 1/2 (\Pi_{\alpha\beta}^A + \Pi_{\alpha\beta}^B) + R_{\alpha\beta}$.

Выписывая конечно-разностные аналоги интегралов в каждом отдельном треугольнике $S_{\alpha\beta}^i$, важно добиться того, чтобы полученные в результате аппроксимации квадратурно-разностные схемы были выпуклы на сетке C , т. е. сопоставляли строго выпуклым функционалам (3.1) строго выпуклые по переменным $T_{\alpha\beta}$, $(u_i)_{\alpha\beta}$ аналоги. Кроме того, искомая схема должна быть экономичной, т. е. по-возможности простой и требующей наименьшего числа обращений к вычислению подынтегральных выражений. Указанным требованиям отвечает схема, в которой при аппроксимации производных в каждой ячейке вспомогательной сетки используются значения сеточных функций в двух точках (например, $T_{,1}$ в ячейке $S_{\alpha\beta}^1$ аппроксимируется в виде $T_{,1} \approx (T_{\alpha\beta} - T_{\alpha-1,\beta})/\Delta$, где Δ — шаг сетки), а для величин $R_{\alpha\beta}$ используется аппроксимация вида $(g_i u_i)_{\alpha\beta} \Delta$.

Компоненты сеточных функций $T_{\alpha\beta}$, $(u_i)_{\alpha\beta}$, доставляющие минимум построенным выше квадратурно-разностным аналогам функционалов (3.1), отыскиваются вариационно-разностным методом последовательной верхней релаксации. Применяется эффективная схема метода, в которой для задачи термоупругости осуществляется одновременное попарное варьирование величин $(u_i)_{\alpha\beta}$. Множитель релаксации определяется численно и изменяется для температурной задачи в диапазоне 1,5—1,8, а для задачи отыскания деформированно-напряженного состояния — в диапазоне 1,69—1,91. При этом в последнем случае нижнее значение соответствует наилучшей сходимости для изотропного материала. Заметим, что «наихудшие» граничные условия соответствуют заданию усилий и теплового потока на контуре Γ . В этом случае при расчете температурного поля и на-

пряженно-деформированного состояния пластины число итераций, обеспечивающих заданную точность, возрастает в несколько раз по сравнению с числом итераций при решении краевых задач с граничными условиями в перемещениях или заданием температуры вдоль контура Γ .

Решение сопряженных краевых задач отыскания величин v_i , η (2.9) также целесообразно осуществлять методом последовательной верхней релаксации с использованием экстремального принципа $\pi(v_i, \eta) \rightarrow \min_{v_i}$ $\pi(\eta) \rightarrow \min_{\eta}$, причем в формуле (3.1) необходимо положить

$$U_T = 1/2(h\eta_{,j}k_{ij}\eta_{,i} + \mu_a H \eta^2), \quad U_q = (H\beta_{ij}v_{i,j} + \lambda_m p_m \Omega_T^{p_m}) \eta$$

$$U_{\Gamma_q} = -\lambda_m p_m \Gamma_T^{p_m} \eta, \quad U_u = 1/2 h v_{k,i} c_{ijkl} v_{i,j}, \quad U_f = \lambda_m p_m \Omega_u^{p_m}, \quad U_g = \lambda_m p_m \Gamma_u^{p_m}$$

и для удобства расчетов и сокращения вычислений использовать одинаковые с прямыми задачами квадратурно-разностные аппроксимации.

2. *Алгоритм метода проекции градиента.* Заключительным и весьма существенным этапом каждого шага алгоритма последовательной оптимизации является построение улучшающей поправки управляющей функции $\delta h(x)$ при известных текущем распределении $h(x)$ и решениях прямой и сопряженной задач. Опишем в общем виде методику построения указанной вариации δh , считая управляющую функцию n -мерным вектором: $h(x) = \{h_1(x), \dots, h_n(x)\}$ и предполагая наличие $v = \alpha_1 + \beta_1$ интегральных ограничений $J_\alpha \leq \kappa_\alpha$. Данный случай отражает рассмотренный в п. 2 пример оптимального проектирования термоупругой композиционной пластины, при этом $h_1(x) = h(x)$, $h_2(x) = r(x)$, $n=2$, $v=3$. Для простоты считаем, что управляющая функция $h(x)$ фиксирована на Γ и поэтому в процессе оптимизации вариация $\delta h = 0$ вдоль границы области Ω . При построении улучшающей поправки будем существенно использовать результаты п. 2, в частности, формулу анализа чувствительности (2.10), и необходимые условия (2.12).

Итак, пусть, согласно (2.10)–(2.12), вариации функционалов J_α , обусловленные вариацией управляющей вектор-функции $\delta h(x) = \{\delta h_1(x), \dots, \delta h_n(x)\}$, имеют вид

$$\delta J_\alpha = \int_{\Omega} (\lambda_\alpha p_\alpha \Omega_h^{p_\alpha} + \delta_{0\alpha} \Sigma^0) \cos \xi_i \delta \xi_i d\Omega = \int_{\Omega} \Phi_i^\alpha \cos \xi_i \delta \xi_i d\Omega = \langle F^\alpha, \delta \xi \rangle$$

$$F = (F^1, \dots, F^n) = (\Phi_1^\alpha \cos \xi_1, \dots, \Phi_n^\alpha \cos \xi_n) \quad (3.3)$$

где $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ — вспомогательная управляющая вектор-функция, введенная согласно (2.11); угловыми скобками обозначено скалярное произведение, суммирование по α не производится.

Ограничения $J_\alpha = \kappa_\alpha$ ($\alpha = 1, \dots, v$) определяют границу $\partial\Lambda$ допустимой области Λ . Вид выражения для улучшающей поправки $(\delta \xi^m)^{(k)} = \{(\delta \xi_1^m)^{(k)}, \dots, (\delta \xi_n^m)^{(k)}\}$ на каждом шаге k зависит от числа m учитываемых активных ограничений и их вида (если $m=0$, считается, что ограничения не учитываются). При этом фазовые и сопряженные переменные, а также вновь вычисленная управляющая функция $\xi^{(k)} = \xi^{(k-1)} + (\delta \xi^m)^{(k)}$ (следовательно, и новое распределение $h(x)$) удовлетворяют условиям оптимальности (2.12), если при подстановке указанных функций в выражение для вариации управляющей функции вычисленная таким образом вариация обратится в нуль. Пусть вектор управлений принадлежит внутренности области Λ : $((\xi^0)^{(k-1)} \in \Lambda \setminus \partial\Lambda)$. Тогда допустимой улучшающей поправкой $(\delta \xi^0)^{(k)}$ может служить, в частности, вариация вида

$$(\delta \xi^0)^{(k)} = \pm \tau F^0 \quad (0 < \tau < 1) \quad (3.4)$$

где знак минус соответствует минимизации функционала. Поэтому условия оптимальности для задачи без ограничений ($m=0$) имеют вид $F^0 = 0$, что, как и следовало ожидать, совпадает с (2.12), если в (2.10) исключить из рассмотрения изопериметрические условия.

Пусть вектор-функция управлений лежит на границе области $\partial\Lambda$ (заметим, что в примере из п. 2 изопериметрическое условие постоянства массы (2.18) ($m=1$) должно удовлетворяться на каждом шаге), а проекция вектора $(\delta\xi^0)^{(k)}$ на внешнюю нормаль к поверхности $\partial\Lambda$ положительна. Тогда допустимая улучшающая вариация $\delta\xi^m$ ($(m-1)$ — текущее число учтенных на k -м шаге ограничений) строится путем последовательного учета активных ограничений $J_\alpha = \kappa_\alpha$ ($\alpha=1, \dots, \nu$) с помощью процедуры ортогонализации Грамма — Шмидта ($\delta\xi^0$ определяется согласно (3.4)):

$$\delta\xi^m = \delta\xi^{m-1} - \langle \delta\xi^{m-1}, F^m \rangle / \langle F^m, F^m \rangle F^m \quad (m=1, 2, \dots) \quad (3.5)$$

Наличие в подынтегральном выражении (3.3) функции $\cos \xi_i$ позволяет для улучшения сходимости численного алгоритма определить скалярное произведение в (3.5) следующим образом (γ_i — заданные константы) [23]:

$$\langle a, b \rangle = \int_{\Omega} a_i b_i \cos^{1-\gamma_i} \xi_i d\Omega \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

В этом случае, согласно (3.3), компоненты вектор-функций F_i^α имеют вид $F_i^\alpha = \Phi_i^\alpha \cos^{1-\gamma_i} \xi_i$ и улучшающая поправка для каждой компоненты управляющей вектор-функции примет форму

$$\delta\xi_i^m = \delta\xi_i^{m-1} - \Psi_1 \Psi_2^{-1} \Phi_i^m \cos^{1-\gamma_i} \xi_i \quad (3.6)$$

$$\Psi_1 = \int_{\Omega} \delta\xi_i^{m-1} \Phi_i^m \cos^{1-\gamma_i} \xi_i d\Omega, \quad \Psi_2 = \int_{\Omega} \Phi_i^m \Phi_i^m \cos^{2-\gamma_i} \xi_i d\Omega$$

В точках, где компонента управляющей функции $h_i(x)$ выходит на свои верхние и нижние ограничения h^+ , h^- , справедливо равенство $\cos \xi_i = 0$. Поэтому, согласно (3.6), для различных γ_i решение подходит к ограничению с различной скоростью: для $\gamma_i > 1$ формула (3.6) приводит к большим вариациям в окрестности ограничения, а при $\gamma_i < 1$ управляющая функция плавно подходит к значениям h^+ , h^- . Таким образом, задавая соответствующие $(\gamma_i)^{(k)}$ на шаге k , можно управлять скоростью выхода вектор-функции ξ на ограничения.

Итак, выше изложена методика, позволяющая на каждом шаге алгоритма оптимизации для текущих значений управляющей функции $h(x)$ последовательно отыскать фазовые переменные T , u_i и сопряженные переменные v_i , η , а затем, основываясь на знании этих функций с учетом ограничений $J_\alpha \leq \kappa_\alpha$ ($\alpha=1, \dots, \nu$), построить улучшающую поправку δh , обеспечивающую оптимизацию функционала качества J_0 . При этом, если граничные условия и характер тепловой и силовой нагрузки дают возможность на текущем шаге получить аналитические выражения для фазовых и сопряженных переменных, то улучшающая поправка к управляющей функции может быть определена аналитически. Указанное обстоятельство можно использовать для построения близких к оптимальным рациональных распределений управляющей функции [24, 25], которые, представляя самостоятельный интерес, могут служить начальным приближением при реализации вычислительной процедуры метода последовательной оптимизации.

4. Численная реализация метода и анализ результатов оптимизации. Применим изложенную методику для нахождения оптимальных распределений толщин $h(x)$ в термоупругих пластинах при различных видах их теплового взаимодействия с внешней средой и для различных типов функционалов и ограничений. Для простоты рассмотрим изотропный материал с коэффициентами теплопроводности λ , температурного расширения α , Пуассона ν и модулем упругости E .

При анализе и расчетах удобно ввести следующие безразмерные переменные: $x'_i = x_i S^{-1/2}$, $h' = h S^{-1/2}$, $Q' = Q S^{1/2} \alpha (1+\nu) \lambda^{-1}$, $\mu_\alpha' = \mu_\alpha \lambda^{-1} S^{1/2}$, $\mu_\Gamma' = \mu_\Gamma \lambda^{-1}$, $q' = q \alpha (1+\nu) S \lambda^{-1}$, $q_\Gamma' = q_\Gamma \alpha (1+\nu) \lambda^{-1}$, $\theta_\alpha' = \theta_\alpha \alpha (1+\nu)$, $\theta_\Gamma' = \theta_\Gamma \alpha (1+\nu)$, $T' =$

$=T\alpha(1+\nu)$, $u'=uS^{-1/2}$, $f'_i=f_iS^{1/2}(1-\nu^2)E^{-1}$, $F'_i=F_i(1-\nu^2)E^{-1}$, $V'=VS^{-1/2}$, $g'_i=g_i(1-\nu^2)S^{-1/2}E^{-1}$, где V — объем пластины (штрихи в дальнейшем опускаем). Тогда уравнения и граничные условия краевой задачи (1.2) принимают простой вид и в них следует положить $k_{ij}=1$, $c_{1111}=c_{2222}=1$, $c_{1122}=c_{2211}=\nu$, $c_{1212}=c_{1221}=c_{2112}=c_{2121}=(1-\nu)/2$, а остальные коэффициенты c_{ijkl} — равными нулю.

Выберем несколько характерных видов теплового и силового взаимодействия конструкции с внешней средой: имеется источник Q в центре пластины; в Ω заданы распределения температуры внешней среды $\theta(x)$ и коэффициент теплоотдачи $\mu_\alpha(x)$; на Γ заданы распределение температуры внешней среды T_Γ , тепловых источников q_Γ и коэффициент теплоотдачи μ_Γ ; края пластины жестко закреплены вдоль контура, т. е. $u_i=0$ на Γ . Найдя решение в перечисленных выше случаях, а также при совокупном действии некоторых из указанных факторов, можно достаточно полно представить качественный характер оптимальных распределений силового материала при сложных видах тепловых нагрузок на пластину.

Ниже, принимая во внимание замечания из п. 2 во всех задачах оптимизации, зададим два типа конструктивных ограничений на $h(x)$: ограничение (1.1) и (2.3). При этом ограничения на максимальную и минимальную толщину учтем автоматически с помощью (2.11), а условие (2.3) включим в совокупность изопериметрических условий в виде (2.17) (первое условие). Рассмотрим две задачи оптимального проектирования: минимизацию максимального смещения пластины (2.16) при заданном объеме пластины V и минимизацию объема пластины V при заданном максимальном смещении (2.16). С использованием формулы анализа чувствительности (2.10) в обозначениях п. 3 первая и вторая задачи формализуются соответственно следующим образом (p — четное положительное число):

$$\begin{aligned} \langle \Sigma^0, \delta h \rangle &\leq 0, \langle 1, \delta h \rangle = 0, \langle \Sigma^1, \delta h \rangle = 0, \langle 1, \delta h \rangle \leq 0 \\ \langle \Sigma^0, \delta h \rangle &= 0, \langle \Sigma^1, \delta h \rangle = 0, \Sigma^1 = [(h_{,i}, h_{,i})^{1/2p-1} h_{,j}], \end{aligned} \quad (4.1)$$

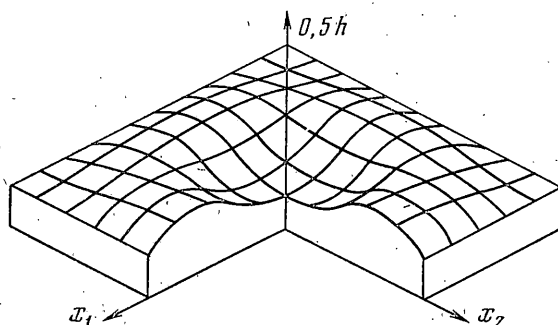
Как предложено в п. 3, в каждой задаче изопериметрические условия будут учитываться последовательно в выписанном выше порядке. При этом имеет смысл всегда стартовать с начального приближения, у которого максимальное значение градиента функции $h(x)$ меньше заданной величины κ (например, с $h(x) = \text{const}$). Тогда последнее условие в (4.1) начинает учитываться лишь с некоторого шага k^* алгоритма последовательной оптимизации, если в этом возникнет необходимость в процессе пошагового выбора улучшающих поправок управляющей функции. До шага k^* формулы для поправок в первой и второй задаче соответственно имеют вид (с точностью до произвольного множителя τ)

$$\begin{aligned} \delta h_u &= -\Sigma^0 + \mu_h, \mu_h = (\Delta_h + \langle 1, \Sigma^0 \rangle) \langle 1, 1 \rangle^{-1} \\ \delta h_v &= -1 + \mu_0 \Sigma^0, \mu_0 = (\Delta_0 + \langle 1, \Sigma^0 \rangle) \Sigma^0 \langle \Sigma^0, \Sigma^0 \rangle^{-1} \end{aligned} \quad (4.2)$$

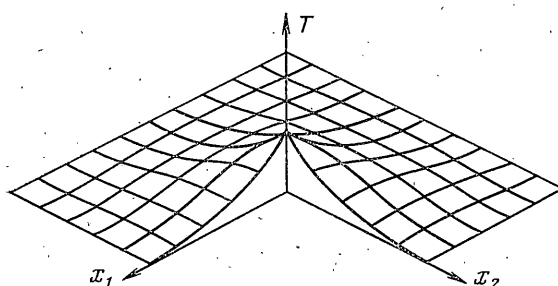
где Δ_h и Δ_0 — величины невязок, обусловленные погрешностями вычислений, в силу которых на каждом шаге может оказаться, что $\langle 1, \delta h \rangle = \Delta_h \neq 0$, $\langle \Sigma^0, \delta h \rangle = \Delta_0 \neq 0$. Начиная с шага k^* улучшающие поправки с точностью до произвольного множителя задаются формулами

$$\begin{aligned} \delta h_u &= -\Sigma^0 + \mu_h^u + \mu_1^u \Sigma^1, \delta h_v = -1 + \mu_0^v \Sigma^0 + \mu_1^v \Sigma^1 \\ \mu_h^u &= (\langle \Sigma^1, \Sigma^1 \rangle S_0 - S_1 \langle 1, \Sigma^1 \rangle) \alpha_u^{-1}, \mu_1^u = (\langle 1, 1 \rangle S_1 - S_0 \langle 1, \Sigma^1 \rangle) \alpha_u^{-1} \\ S_0 &= \Delta_h + \langle 1, \Sigma^0 \rangle, S_1 = \Delta_1 + \langle \Sigma^0, \Sigma^1 \rangle, \alpha_u = \langle 1, 1 \rangle \langle \Sigma^1, \Sigma^1 \rangle - \langle 1, \Sigma^1 \rangle^2 \\ \mu_0^v &= (\langle \Sigma^0, \Sigma^1 \rangle S_2 - S_3 \langle \Sigma^1, \Sigma^1 \rangle) \alpha_v^{-1}, \mu_1^v = (\langle \Sigma^0, \Sigma^1 \rangle S_3 - S_2 \langle \Sigma^0, \Sigma^0 \rangle) \alpha_v^{-1} \\ S_2 &= (\Delta_1 + \langle 1, \Sigma^1 \rangle), S_3 = (\Delta_0 + \langle 1, \Sigma^0 \rangle), \alpha_v = \langle \Sigma^0, \Sigma^1 \rangle^2 - \langle \Sigma^0, \Sigma^0 \rangle \langle \Sigma^1, \Sigma^1 \rangle \end{aligned} \quad (4.3)$$

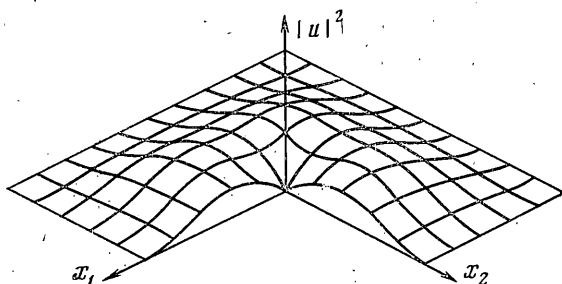
Из анализа формул (4.2), (4.3) следует, что с вычислительной точки зрения выгоднее минимизировать максимальное смещение, сохраняя постоянным объем пластины. Действительно, формула для δh_u проще, чем для δh_v , при этом вариация δh_u вычисляется точнее, так как при ее подсчете,



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

например в (4.2), необходимо вычислить более простой интеграл $\langle 1, 1 \rangle$ по сравнению с $\langle \Sigma^0, \Sigma^0 \rangle$. Этим обстоятельством можно воспользоваться при минимизации объема без учета ограничений на градиент функции $h(x)$, скажем, на начальных шагах алгоритма оптимизации. В этом случае, если прямая и сопряженная задачи решаются достаточно точно, т. е. в конечном итоге с высокой точностью вычисляется интеграл $\langle 1, \Sigma^0 \rangle$, а $\mu_h < 0$, то можно заключить, что качественная картина распределения оптимальных толщин в двух рассматриваемых задачах на начальных шагах оптимизации совпадает, что существенно при проведении анализа чувствительности конструкции к вариациям управляющей функции.

Изображенное на фиг. 2 распределение толщин $h(x)$ наглядно отражает характерные особенности оптимального распределения силового материала в термоупругих пластинах, взаимодействующих с тепловым полем. Указанное распределение получено в задаче минимизации максимального смещения в жестко закрепленной по контуру квадратной пластине $\Omega \{-1/2 \leq x_i \leq 1/2\}$, в центре которой размещен источник тепла Q . В результате теплообмена по закону Ньютона с внешней средой,

имеющей температуру $\theta_\alpha(x) = \theta_\Gamma = 0$, в пластине устанавливается поле температур $T(x)$, характерное распределение которого (для пластины постоянной толщины) изображено на фиг. 3.

Указанная температурная нагрузка обуславливает перемещения в пластине, величина и характер которых отражены на фиг. 4, где по оси аппликат отложено значение квадрата модуля вектора перемещений $|u|^2 = u_i u_i$ (для пластины постоянной толщины).

Алгоритм метода последовательной оптимизации термоупругих конструкций реализован в виде комплекса программ, написанных на алгоритмическом языке ФОРТРАН. Расчеты проводились на вычислительных машинах ЕС-1040, ЕС-1050. В приведенном примере при разбиении четверти области Ω сеткой 20×20 на 400 ячеек характерное время, требуемое для получения оптимального распределения h^* с точностью до одного процента ($\max \{|\delta h^*/h^*|; |\delta J_0^*/J_0^*|\} < 10^{-2}$), составляет несколько минут.

ЛИТЕРАТУРА

1. Влияние высоких температур на авиационные конструкции. М.: Оборонгиз, 1961. 415 с.
2. Марченко В. М. Температурные поля и напряжения в конструкциях летательных аппаратов. М.: Машиностроение, 1965. 299 с.
3. Prager W. Optimal thermoelastic design for given deflection.— Internat. J. Mech. Sci., 1970, v. 12, No. 8, p. 705–709.
4. Каргвелишвили В. М., Миронов А. А. Задачи оптимизации эффективной крутильной жесткости неравномерно нагретых и предварительно напряженных тонкостенных стержней.— Изв. АН СССР. МТТ, 1979, № 5, с. 150–161.
5. Албул А. В., Баничук Н. В., Барсуку А. А. Оптимизация устойчивости упругих стержней при тепловых нагрузках.— Изв. АН СССР. МТТ, 1980, № 3, с. 127–133.
6. Nordson F. I., Pederson P. A review of optimal structural design.— Рус. перев.: Механика: Сб. перев. иностр. статей. М.: Мир, 1973, № 2, с. 136–157.
7. Лепик Ю. Р. Применение принципа максимума Понтрягина в задачах прочности, устойчивости и колебаний тонкостенных конструкций.— Механика: Период. сб. перев. иностр. статей, 1974, № 6, с. 126–141.
8. Лурье К. А. Оптимальное управление в задачах математической физики. М.: Наука, 1975. 478 с.
9. Прагер В. Основы теории оптимального проектирования конструкций. М.: Мир, 1977. 109 с.
10. Гринев В. Б., Филиппов А. П. Оптимизация стержней по спектру собственных значений. Киев: Наук. думка, 1979. 211 с.
11. Баничук Н. В. Оптимизация форм упругих тел. М.: Наука, 1980. 255 с.
12. Малков В. П., Угодчиков А. Г. Оптимизация упругих систем. М.: Наука, 1981. 288 с.
13. Ольхофф Н. Оптимальное проектирование конструкций. М.: Мир, 1981. 277 с.
14. Троцкий В. А., Петухов Л. В. Оптимизация формы упругих тел. М.: Наука, 1982. 432 с.
15. Баничук Н. В. Современные проблемы оптимизации конструкций.— Изв. АН СССР. МТТ, 1982, № 2, с. 110–124.
16. Хог Э., Арора Я. Прикладное оптимальное проектирование. М.: Мир, 1983. 479 с.
17. Григолюк Э. И., Подстригач Я. С., Бурак Я. И. Оптимизация нагрева оболочек и пластин. Киев: Наук. думка, 1979. 364 с.
18. Стоян Ю. Г., Пугачин В. П. Размещение источников физических полей. Киев: Наук. думка, 1981. 182 с.
19. Коваленко А. Д. Термоупругость. Киев: Вища школа, 1975. 216 с.
20. Баничук Н. В., Каргвелишвили В. М., Миронов А. А. Об одном численном методе решения двумерных задач оптимизации в теории упругости.— В кн.: Материалы V Всес. конф. по численным методам решения задач теории упругости и пластичности. Ч. 2. Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1978, с. 3–14.
21. Шермергор Т. Д. Теория упругости микронеоднородных сред. М.: Наука, 1977. 399 с.
22. Баничук Н. В., Каргвелишвили В. М., Черноусько Ф. Л. О разностно-квадратурных аппроксимациях выпуклых интегральных функционалов.— Докл. АН СССР, 1976, т. 231, № 2, с. 269–272.
23. Каргвелишвили В. М., Миронов А. А., Самсонов А. М. Численный метод решения задач оптимизации подкрепленных конструкций.— Изв. АН СССР. МТТ, 1981, № 2, с. 93–103.
24. Братусь А. С., Каргвелишвили В. М. Приближенные аналитические решения в задачах оптимизации устойчивости и частот колебаний упругих тонкостенных конструкций.— Изв. АН СССР. МТТ, 1981, № 6, с. 119–139.
25. Каргвелишвили В. М., Кобелев В. В. Аналитические решения в задачах оптимального армирования слоистых пластин из композитных материалов.— Мех. композит. материалов, 1983, № 5, с. 788–793.

Москва

Поступила в редакцию
25.X.1983