

УДК 539.3

РАСЧЕТ РАДИАЛЬНЫХ ПИИ НА ОСНОВЕ ОБОБЩЕННОЙ ТЕОРИИ ТИМОШЕНКО

ГРИГОЛЮК Э. И., КУЛИКОВ Г. М.

Расчет радиальных пиин на основе теории многослойных анизотропных оболочек типа Тимошенко выполнен относительно недавно [1, 2]. При таком подходе тангенциальные компоненты тензоров напряжений и деформаций распределены по толщине пакета слоев по линейному закону, а поперечные сдвиги вообще считаются постоянными. Показано¹, что использование кинематической гипотезы типа Тимошенко не приводит к недопустимым погрешностям при оценке прочности радиальных пиин, особенно при определении интегральных характеристик, таких, как усилия в нитях корда. Вместе с тем при расчете малослойных радиальных пиин эта гипотеза может приводить в некоторых случаях к погрешностям, искажающим истинную картину напряженно-деформированного состояния пиины в зоне окончания брекера. Наиболее простой путь, устраняющий отмеченные недостатки, связан с привлечением для всего пакета в целом обобщенной кинематической гипотезы Тимошенко. Согласно этой гипотезе, тангенциальные перемещения, а следовательно, напряжения и деформации распределены по толщине оболочки уже по нелинейному закону.

Теория многослойных оболочек, построенная на основе обобщенной кинематической гипотезы Тимошенко, получила достаточно широкое распространение [3-7] и приводит, как известно, в случае отсутствия обжатия по толщине к системе дифференциальных уравнений двенадцатого порядка. Здесь в дополнение к общепринятому подходу сделана попытка учесть неоднородное распределение поперечных касательных напряжений по толщине пакета, что представляет интерес при расчете напряженно-деформированного состояния пиины в зоне окончания брекера.

1. Рассмотрим осесимметричную деформацию тонкой упругой оболочки вращения, составленной из N анизотропных слоев. В качестве поверхности приведения Ω примем внутреннюю поверхность k -го слоя или поверхность контакта слоев, которую отнесем к криволинейным ортогональным координатам α_1, α_2 . Поперечную координату z будем отсчитывать в сторону возрастания внешней нормали к исходной поверхности. Обжатием оболочки по толщине пренебрегаем.

Введем обозначения: h_k — толщина k -го слоя, δ_k — расстояние от поверхности приведения до верхней границы k -го слоя, A_i — параметры Ламе, k_i — кривизны координатных линий, u_i, w — тангенциальные и нормальное перемещения точек исходной поверхности, $\beta_i(\alpha_1, \alpha_2)$ — функции, характеризующие тангенциальные перемещения оболочки, $\mu_i^{(0)}(\alpha_1, \alpha_2)$, $\mu_i^{(k)}(\alpha_1, \alpha_2)$ — функции, характеризующие поперечные касательные напряжения k -го слоя, q — нормальная нагрузка ($i=1, 2; k=1, 2, \dots, N$).

Согласно обобщенной кинематической гипотезе Тимошенко, принятой для всего пакета слоев в целом, имеем

$$u_i^{(k)} = u_i + z\theta_i + g(z)\beta_i \quad (1.1)$$
$$\theta_1 = k_1 u_1 - (1/A_1) dw / d\alpha_1, \quad \theta_2 = k_2 u_2$$

¹ См: Григолюк Э. И., Куликов Г. М. Приложение моментной теории слоистых анизотропных оболочек к задачам расчета радиальных пиин. М., 1981. — 16 с. Деп. в ВИНТИ 7.04.81; № 1541-81.

Гипотеза (1.1) обычно используется при расчете однородных оболочек малой сдвиговой жесткости [3]. Вопрос о выборе функции $g(z)$ будет решен позднее.

Для поперечных касательных напряжений воспользуемся независимой аппроксимацией. Примем допущение о распределении поперечных касательных напряжений по толщине k -го слоя в виде

$$\sigma_{iz}^{(k)} = f_0(z) \mu_i^{(0)} + f_k(z) \mu_i^{(k)} \quad (1.2)$$

где $f_0(z)$, $f_k(z)$ — заданные функции, непрерывные и удовлетворяющие условиям

$$\begin{aligned} f_0(\delta_0) = f_0(\delta_N) = 0, \quad f_k(\delta_{k-1}) = f_k(\delta_k) = 0 \\ f_k(z) = 0, \quad z \notin [\delta_{k-1}, \delta_k] \end{aligned} \quad (1.3)$$

Как видно из соотношений (1.2), (1.3), поперечные касательные напряжения, будучи непрерывными функциями поперечной координаты z , всюду в оболочке, в том числе и на поверхностях контакта слоев $z = \delta_k$, обращаются в нуль на граничных поверхностях $z = \delta_0$, $z = \delta_N$ (касательные нагрузки, действующие на граничных поверхностях оболочки, для простоты опускаем). Гипотеза (1.2) позволяет в первом приближении описать реальный закон распределения поперечных касательных напряжений по толщине пакета слоев и тем самым оценить влияние эффекта неоднородности на напряженно-деформированное состояние оболочки.

При построении подобных теорий на первый план, как правило, выходит проблема рационального выбора функций $f_0(z)$ и $f_k(z)$. Анализ достаточно точных решений показывает, что поперечные касательные напряжения распределены по толщине однородной оболочки практически по закону квадратной параболы [8]. Учитывая сказанное, при расчетах будем полагать

$$\begin{aligned} f_0(z) = \frac{6}{h^3} (z - \delta_0)(\delta_N - z) \quad (z \in [\delta_0, \delta_N]) \\ f_k(z) = \frac{6}{h_k^3} (z - \delta_{k-1})(\delta_k - z) \quad (z \in [\delta_{k-1}, \delta_k]) \end{aligned} \quad (1.4)$$

При этом справедливы следующие равенства:

$$\sum_{k=1}^N \int_{\delta_{k-1}}^{\delta_k} f_0(z) dz = 1, \quad \int_{\delta_{k-1}}^{\delta_k} f_k(z) dz = 1$$

Теперь можно конкретизировать вид функции, характеризующей закон распределения тангенциальных перемещений по толщине оболочки. Пусть $g(z) = \int f_0(\xi) d\xi$ (ξ меняется от 0 до z); тогда

$$g(z) = -(6z/h^3) [1/3 z^2 - 1/2 (\delta_0 + \delta_N)z + \delta_0 \delta_N] \quad (z \in [\delta_0, \delta_N]) \quad (1.5)$$

На первый взгляд может показаться, что независимая аппроксимация поперечных касательных напряжений (1.3) вносит неустранимое противоречие в обобщенную теорию Тимошенко, поскольку соотношения упругости для них оказываются нарушенными. Но это не совсем так. Аппроксимация (1.2) в действительности вносит лишь формальное противоречие, так как ниже будет показано, что соотношения упругости, выражающие связь между поперечными касательными напряжениями и поперечными сдвигами, выполняются интегрально по толщине пакета и дополнительно по толщине k -го слоя.

Обратимся к нелинейным деформационным соотношениям [9]. Введем перемещения из (1.1) в выражения, определяющие тензор деформаций,

в случае простейшего нелинейного варианта теории осесимметричных оболочек в квадратичном приближении и, пользуясь допущением о тонкостенности оболочки, получим следующие формулы:

$$\varepsilon_{ii}^{(h)} = E_{ii} + zK_{ii} + g(z)R_{ii}, \quad \varepsilon_{12}^{(h)} = E_{12} + 2zK_{12} + R_{12}g(z) \quad (1.6)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{13}^{(h)} &= f_0(z)\beta_i, \quad E_{ii} = \varepsilon_i + \frac{1}{2}\theta_i^2, \quad E_{12} = \omega + \theta_1\theta_2 \\ \varepsilon_1 &= \frac{1}{A_1} \frac{du_1}{d\alpha_1} + k_1 w, \quad \varepsilon_2 = k_2 w - \rho u_1, \quad \omega = \frac{1}{A_1} \frac{du_2}{d\alpha_1} + \rho u_2 \\ K_{11} &= \frac{1}{A_1} \frac{d\theta_1}{d\alpha_1}, \quad K_{22} = -\rho\theta_1, \quad K_{12} = k_2 \frac{1}{A_1} \frac{du_2}{d\alpha_1} + k_2 \rho u_2 \\ R_{11} &= \frac{1}{A_1} \frac{d\beta_1}{d\alpha_1}, \quad R_{22} = -\rho\beta_1, \quad R_{12} = \frac{1}{A_1} \frac{d\beta_2}{d\alpha_1} + \rho\beta_2, \\ \rho &= -\frac{1}{A_1 A_2} \frac{dA_2}{d\alpha_1} \end{aligned}$$

Соотношения (1.6) допускают естественный переход к соответствующим соотношениям теории тонких анизотропных оболочек Кирхгофа — Лява. Опуская далее нелинейные члены и полагая $\beta_i = 0$, приходим к деформационным соотношениям [8], в частности $K_{12} = k_2 \omega$.

Введем в многослойной оболочке, удельные усилия и моменты согласно выражениям

$$\begin{aligned} T_1 &= \sum_{h=1}^N \int_{\delta_{h-1}}^{\delta_h} \sigma_{11}^{(h)} (1+k_2 z) dz, \quad T_{12} = \sum_{h=1}^N \int_{\delta_{h-1}}^{\delta_h} \sigma_{12}^{(h)} (1+k_2 z) dz \\ M_1 &= \sum_{h=1}^N \int_{\delta_{h-1}}^{\delta_h} \sigma_{11}^{(h)} z (1+k_2 z) dz, \quad M_{12} = \sum_{h=1}^N \int_{\delta_{h-1}}^{\delta_h} \sigma_{12}^{(h)} z (1+k_2 z) dz \\ L_1 &= \sum_{h=1}^N \int_{\delta_{h-1}}^{\delta_h} \sigma_{11}^{(h)} g(z) (1+k_2 z) dz, \quad L_{12} = \sum_{h=1}^N \int_{\delta_{h-1}}^{\delta_h} \sigma_{12}^{(h)} g(z) (1+k_2 z) dz \quad (1.7) \\ Q_1 &= \sum_{h=1}^N \int_{\delta_{h-1}}^{\delta_h} \sigma_{13}^{(h)} f_0(z) (1+k_2 z) dz \quad (1 \Rightarrow 2) \end{aligned}$$

Обобщенные удельные моменты L_i, L_{12} в теориях оболочек Кирхгофа — Лява и Тимошенко отсутствуют, их появление связано с наличием в оболочке поперечных сдвигов, распределенных по нелинейному закону (1.6).

Зависимость между тангенциальными напряжениями и деформациями в обобщенном плоском напряженном состоянии выражается формулами

$$\begin{aligned} \sigma_{11}^{(h)} &= b_{11}^{(h)} \varepsilon_{11}^{(h)} + b_{12}^{(h)} \varepsilon_{22}^{(h)} + b_{16}^{(h)} \varepsilon_{12}^{(h)} \\ \sigma_{22}^{(h)} &= b_{12}^{(h)} \varepsilon_{11}^{(h)} + b_{22}^{(h)} \varepsilon_{22}^{(h)} + b_{26}^{(h)} \varepsilon_{12}^{(h)} \\ \sigma_{12}^{(h)} &= b_{16}^{(h)} \varepsilon_{11}^{(h)} + b_{26}^{(h)} \varepsilon_{22}^{(h)} + b_{66}^{(h)} \varepsilon_{12}^{(h)} \end{aligned} \quad (1.8)$$

Подставив напряжения из (1.8) в формулы (1.7) и выполнив интегрирование по толщине пакета с учетом деформационных выражений (1.6), приходим к соотношениям, связывающим удельные усилия и моменты с кинематическими характеристиками исходной поверхности. Запишем их в матричной форме

$$\begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ S \\ M_1 \\ M_2 \\ H \\ L_1 \\ L_2 \\ \Lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B & D \\ B & C & F \\ D & F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{11} \\ E_{22} \\ E_{12} \\ K_{11} \\ K_{22} \\ 2K_{12} \\ R_{11} \\ R_{22} \\ R_{12} \end{pmatrix} \quad (1.9)$$

$$S = T_{12} - k_2 H = T_{21} - k_1 H, \quad H = M_{12} = M_{21}, \quad \Lambda = L_{12} = L_{21}$$

Здесь A, B, C, D, F, G — матрицы жесткости многослойной анизотропной оболочки суть квадратичные матрицы размером 3×3 , элементы которых определяются по формулам

$$\begin{aligned} A_{mn} &= \sum_{k=1}^N \int_{\delta_{k-1}}^{\delta_k} b_{mn}^{(k)} dz, & B_{mn} &= \sum_{k=1}^N \int_{\delta_{k-1}}^{\delta_k} b_{mn}^{(k)} z dz \\ C_{mn} &= \sum_{k=1}^N \int_{\delta_{k-1}}^{\delta_k} b_{mn}^{(k)} z^2 dz, & D_{mn} &= \sum_{k=1}^N \int_{\delta_{k-1}}^{\delta_k} b_{mn}^{(k)} g(z) dz \end{aligned} \quad (1.10)$$

$$F_{mn} = \sum_{k=1}^N \int_{\delta_{k-1}}^{\delta_k} b_{mn}^{(k)} z g(z) dz, \quad G_{mn} = \sum_{k=1}^N \int_{\delta_{k-1}}^{\delta_k} b_{mn}^{(k)} g^2(z) dz \quad (mn=1,2,3)$$

Подставляя в последнюю формулу (1.7) значения напряжений $\sigma_{i3}^{(k)}$ из (1.2), получим выражения для поперечных удельных усилий

$$Q_i = \sum_{k=1}^N \lambda_{Ri} \mu_i^{(0)} + \sum_{k=1}^N \lambda_{R0i} \mu_i^{(k)} \quad (1.11)$$

$$\lambda_k = \int_{\delta_{k-1}}^{\delta_k} f_0^2(z) dz, \quad \lambda_{k0} = \int_{\delta_{k-1}}^{\delta_k} f_0(z) f_k(z) dz, \quad \lambda_{kk} = \int_{\delta_{k-1}}^{\delta_k} f_k^2(z) dz$$

2. Уравнения равновесия многослойных анизотропных оболочек и соответствующие им граничные условия получим из смешанного вариационного принципа, который открывает естественный путь сведения трехмерной задачи теории упругости к двумерной задаче и дает возможность связать функции сдвига β_i лишними функциями $\mu_i^{(0)}, \mu_i^{(k)}$, характеризующими поперечные касательные напряжения. Запишем его так: $\delta U = \delta A^*$, где A^* — работа внешних нагрузок, а вариацию функционала U после несложных преобразований [1] и с учетом соотношений (1.2), (1.6) — (1.7), (1.11) представим в форме

$$\begin{aligned} \delta U &= \iint_{\Omega} \left\{ T_1 \delta E_{11} + T_2 \delta E_{22} + S \delta E_{12} + M_1 \delta K_{11} + M_2 \delta K_{22} + \right. \\ &+ 2H \delta K_{12} + L_1 \delta R_{11} + L_2 \delta R_{22} + \Lambda \delta R_{12} + Q_1 \delta \beta_1 + Q_2 \delta \beta_2 + \\ &+ \sum_{k=1}^N \int_{\delta_{k-1}}^{\delta_k} [(\varepsilon_{13}^{(k)} - a_{45}^{(k)} \sigma_{23}^{(k)} - a_{55}^{(k)} \sigma_{13}^{(k)}) (f_0(z) \delta \mu_1^{(0)} + f_k(z) \delta \mu_1^{(k)}) + \\ &+ (\varepsilon_{23}^{(k)} - a_{44}^{(k)} \sigma_{23}^{(k)} - a_{45}^{(k)} \sigma_{13}^{(k)}) (f_0(z) \delta \mu_2^{(0)} + f_k(z) \delta \mu_2^{(k)})] dz \Big\} A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 \end{aligned} \quad (2.1)$$

где коэффициенты $a_{mn}^{(k)}$ ($m, n=4,5$) — поперечные сдвиговые податливости k -го слоя [1].

Вычислив вариацию работы внешних сил, после стандартной вариационной процедуры получим уравнения равновесия в удельных усилиях и моментах

$$\begin{aligned} \frac{1}{A_1} \frac{dT_1}{d\alpha_1} &= \rho(T_1 - T_2) - k_1 N_1, & \frac{1}{A_1} \frac{dN_1}{d\alpha_1} &= \rho N_1 + k_1 T_1 + k_2 T_2 - q \\ \frac{1}{A_1} \frac{dM_1}{d\alpha_1} &= \rho(M_1 - M_2) + N_1 + T_1 \theta_1 + S \theta_2, & \frac{1}{A_1} \frac{dL_1}{d\alpha_1} &= \rho(L_1 - L_2) + Q_1 \\ \frac{1}{A_1} \frac{d(S + 2k_2 H)}{d\alpha_1} &= 2\rho(S + 2k_2 H) + k_2(T_2 \theta_2 + S \theta_1) \\ \frac{1}{A_1} \frac{d\Lambda}{d\alpha_1} &= 2\rho\Lambda + Q_2 \end{aligned} \quad (2.2)$$

и соответствующие им граничные условия и дополнительные соотношения

$$\sum_{k=1}^N \int_{\delta_{k-1}}^{\delta_k} (\varepsilon_{13}^{(k)} - a_{45}^{(k)} \sigma_{23}^{(k)} - a_{55}^{(k)} \sigma_{13}^{(k)}) f_0(z) dz = 0 \quad (2.3)$$

$$\int_{\delta_{k-1}}^{\delta_k} (\varepsilon_{13}^{(k)} - a_{45}^{(k)} \sigma_{23}^{(k)} - a_{55}^{(k)} \sigma_{13}^{(k)}) f_k(z) dz = 0 \quad (1 \Rightarrow 2; 4 \Rightarrow 5) \quad (2.4)$$

которые имеют простой механический смысл: соотношения упругости для поперечных касательных напряжений выполняются интегрально по толщине пакета с весовой функцией $f_0(z)$ и одновременно по толщине k -го слоя с весовой функцией $f_k(z)$.

Отметим, что соотношения (2.3) характерны для многослойных анизотропных оболочек типа Тимошенко [1], а соотношения (2.4) являются новыми и не имеют аналогов в теории Тимошенко. Их появление связано с наличием дополнительных степеней свободы, отвечающих учету поперечных касательных напряжений согласно закону (1.2).

Формулы (2.3), (2.4) имеют важное значение в данном варианте теории многослойных анизотропных оболочек, поскольку позволяют связать функции сдвига β_i с функциями $\mu_i^{(0)}$ и $\mu_i^{(k)}$. Для этого внесем поперечные сдвиги из (1.6), поперечные касательные напряжения из (1.2) в (2.3), (2.4) и, принимая во внимание обозначения (1.11), получим систему линейных алгебраических уравнений относительно функций $\mu_i^{(0)}$, $\mu_i^{(k)}$:

$$\sum_{k=1}^N a_{55}^{(k)} (\lambda_k \mu_1^{(0)} + \lambda_{k0} \mu_1^{(k)}) + \sum_{k=1}^N a_{45}^{(k)} (\lambda_k \mu_2^{(0)} + \lambda_{k0} \mu_2^{(k)}) = \sum_{k=1}^N \lambda_k \beta_1$$

$$a_{55}^{(k)} (\lambda_{k0} \mu_1^{(0)} + \lambda_{kk} \mu_1^{(k)}) + a_{45}^{(k)} (\lambda_{k0} \mu_2^{(0)} + \lambda_{kk} \mu_2^{(k)}) = \lambda_{k0} \beta_1 \quad (1 \Rightarrow 2; 4 \Rightarrow 5)$$

решение которой представим в виде

$$\mu_1^{(0)} = q_{44}^0 \beta_1 - q_{45}^0 \beta_2, \quad \mu_1^{(k)} = \frac{\lambda_{k0}}{\lambda_{kk}} \left[\frac{a_{44}^{(k)} \beta_1 - a_{45}^{(k)} \beta_2}{a_{44}^{(k)} a_{55}^{(k)} - (a_{45}^{(k)})^2} - \mu_1^{(0)} \right]$$

$$q_{mn}^0 = \frac{\tau_{mn}}{\tau_{44} \tau_{55} - \tau_{45}^2} \quad (m, n = 4, 5) \quad (2.5)$$

$$\tau = \sum_{k=1}^N \left(\lambda_k - \frac{\lambda_{k0}^2}{\lambda_{kk}} \right), \quad \tau_{mn} = \sum_{k=1}^N \left(\lambda_k - \frac{\lambda_{k0}^2}{\lambda_{kk}} \right) a_{mn}^{(k)}$$

Для однослойной ортотропной оболочки ($k=1$) из соотношений (2.6) имеем

$$\mu_1^{(0)} = \beta_1 / a_{55}^{(1)}, \quad \mu_1^{(1)} = 0 \quad (2.6)$$

Равенства (2.6) означают, что закон Гука для поперечных касательных напряжений выполняется точно. Этот предельный переход вследствие использования кинематической гипотезы (1.1) является очевидным и не нуждается в разъяснениях.

Приведем окончательные формулы для поперечных удельных усилий, вытекающие из соотношений (1.11), (2.5)

$$Q_1 = q_{44}\beta_1 - q_{45}\beta_2 \quad 1 \Leftrightarrow 2; \quad 4 \Leftrightarrow 5 \quad (2.7)$$

Коэффициенты поперечного сдвига q_{mn} ($m, n=4,5$) определяются посредством выражений

$$q_{mn} = \tau q_{mn}^0 + \sum_{k=1}^N \frac{\lambda_{k0}^2}{\lambda_{kk}} \frac{a_{mn}^{(k)}}{a_{44}^{(k)} a_{55}^{(k)} - (a_{45}^{(k)})^2} \quad (2.8)$$

3. Структура исходных уравнений нелинейной теории многослойных анизотропных оболочек довольно сложна, поэтому будем ориентироваться на их численное решение на ЭВМ. С этой целью выведем нормальную систему обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, которая является разрешающей и полностью определяет напряженно-деформированное состояние оболочки. Первые шесть уравнений, разрешенных относительно производных от функций $T_1, N_1, M_1, L_1, S+2k_2H, \Lambda$, уже получены. Другая группа из шести уравнений следует из деформационных соотношений (1.6) и может быть записана в виде

$$\begin{aligned} \frac{1}{A_1} \frac{du_1}{d\alpha_1} &= E_{11} - k_1 w - \frac{1}{2} \theta_1^2, & \frac{1}{A_1} \frac{dw}{d\alpha_1} &= k_1 u_1 - \theta_1 \\ \frac{1}{A_1} \frac{d\theta_1}{d\alpha_1} &= K_{11}, & \frac{1}{A_1} \frac{d\beta_1}{d\alpha_1} &= R_{11} \\ \frac{1}{A_1} \frac{du_2}{d\alpha_1} &= E_{12} - \rho u_2 - \theta_1 \theta_2, & \frac{1}{A_1} \frac{d\beta_2}{d\alpha_1} &= R_{12} - \rho \beta_2 \end{aligned} \quad (3.1)$$

Полученную систему уравнений (2.2), (3.1) представим в матричной форме (Y — двенадцатимерный вектор решения):

$$(1/A_1) (dY/d\alpha_1) = F(\alpha_1, Y) \quad (3.2)$$

$$Y = [T_1, N_1, M_1, L_1, S+2k_2H, \Lambda, u_1, w, \theta_1, \beta_1, u_2, \beta_2]^T$$

Дополним нормальную систему дифференциальных уравнений (3.2) граничными условиями по шесть на каждом торце замкнутой оболочки вращения

$$\Upsilon_n(\alpha_1^*) \gamma_n + \Upsilon_{n+6}(\alpha_1^*) (1 - \gamma_n) = 0 \quad (n=1, 2, \dots, 6) \quad (3.3)$$

$$\Upsilon_n(\alpha_1^{**}) \gamma_{n+6} + \Upsilon_{n+6}(\alpha_1^{**}) (1 - \gamma_{n+6}) = 0$$

В (3.3) параметры γ_n принимают значения 0, 1 и определяют любую комбинацию однородных кинематических и статических граничных условий на торцах оболочки $\alpha_1 = \alpha_1^*$, $\alpha_1 = \alpha_1^{**}$.

Проблему сведения нелинейной краевой задачи (3.2), (3.3) к последовательности линейных краевых задач будем решать обобщенным методом Ньютона (метод квазилинеаризации) [10]. Метод квазилинеаризации хорошо проявил себя при решении нелинейных задач классических ортотропных оболочек [11] и анизотропных оболочек типа Тимошенко [1, 2]. Согласно этому методу, систему уравнений (3.2) можно линеаризовать и записать в следующем виде:

$$(1/A_1) (dY^{[m+1]}/d\alpha_1) = F^*(\alpha_1, Y^{[m]}, Y^{[m+1]}) \quad (3.4)$$

Двенадцатимерный вектор правых частей F^* определяем по формулам

$$F_1^* = \rho(Y_1^{[m+1]} - T_2^{[m+1]}) + k_1 Y_2^{[m+1]}, \quad F_2^* = k_1 Y_1^{[m+1]} + \rho Y_2^{[m+1]} + k_2 T_2^{[m+1]} - \chi q$$

$$F_3^* = \rho(Y_3^{[m+1]} - M_2^{[m+1]}) + Y_2^{[m+1]} + Y_9^{[m]} Y_1^{[m+1]} + Y_1^{[m]} Y_9^{[m+1]} -$$

$$- \chi Y_1^{[m]} Y_9^{[m]} + \theta_2^{[m]} S^{[m+1]} + S^{[m]} \theta_2^{[m+1]} - \chi S^{[m]} \theta_2^{[m]}$$

$$F_4^* = \rho(Y_4^{[m+1]} - L_2^{[m+1]}) + Q_1^{[m+1]} \quad (3.5)$$

$$F_5^* = 2\rho Y_5^{[m+1]} + k_2(\theta_2^{[m]} T_2^{[m+1]} + T_2^{[m]} \theta_2^{[m+1]} - \chi T_2^{[m]} \theta_2^{[m]}) + Y_9^{[m]} S^{[m+1]} +$$

$$+ S^{[m]} Y_9^{[m+1]} - \chi Y_9^{[m]} S^{[m]}$$

$$F_6^* = 2\rho Y_6^{[m+1]} + Q_2^{[m+1]}, \quad F_7^* = E_{11}^{[m+1]} - k_1 Y_8^{[m+1]} - Y_9^{[m]} Y_9^{[m+1]} + \chi(Y_9^{[m]})^2$$

$$F_8^* = k_1 Y_7^{[m+1]} - Y_9^{[m+1]}, \quad F_9^* = K_{11}^{[m+1]}, \quad F_{10}^* = R_{11}^{[m+1]}$$

$$F_{11}^* = E_{12}^{[m+1]} - \rho Y_{11}^{[m+1]} - Y_9^{[m]} \theta_2^{[m+1]} - \theta_2^{[m]} Y_9^{[m+1]} + \chi Y_9^{[m]} \theta_2^{[m]},$$

$$F_{12}^* = R_{12}^{[m+1]} - \rho Y_{12}^{[m+1]}$$

На m -м шаге последовательных приближений из (1.2), (1.6) имеем $\theta_2^{[m]} = k_2 Y_{11}^{[m]}$, $K_{22}^{[m]} = -\rho Y_9^{[m]}$, $R_{22}^{[m]} = -\rho Y_{10}^{[m]}$, $E_{22}^{[m]} = k_2 Y_8^{[m]} - \rho Y_7^{[m]} +$
 $+ 1/2(\theta_2^{[m]})^2$.

Величины $T_2^{[m]}$, $S^{[m]}$ находим из системы линейных алгебраических уравнений (1.9), численно решая ее методом Гаусса. При этом элементы матриц жесткости оболочки A , B , C , D , F , G вычисляются на основании формул (1.10), (1.5).

На $m+1$ -м шаге последовательных приближений из (1.1), (1.6), (2.7) имеем

$$\theta_2^{[m+1]} = k_2 Y_{11}^{[m+1]}, \quad K_{22}^{[m+1]} = -\rho Y_9^{[m+1]}, \quad R_{22}^{[m+1]} = -\rho Y_{10}^{[m+1]}$$

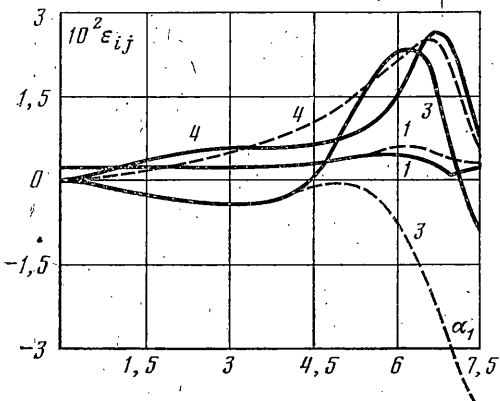
$$E_{22}^{[m+1]} = k_2 Y_8^{[m+1]} - \rho Y_7^{[m+1]} + \theta_2^{[m]} \theta_2^{[m+1]} - 1/2 \chi (\theta_2^{[m]})^2$$

$$Q_1^{[m+1]} = q_{44} Y_{10}^{[m+1]} - q_{45} Y_{12}^{[m+1]}, \quad Q_2^{[m+1]} = -q_{45} Y_{10}^{[m+1]} + q_{55} Y_{12}^{[m+1]} \quad (3.6)$$

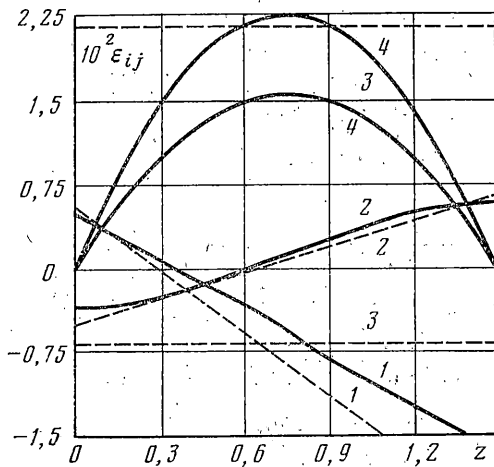
Коэффициенты поперечного сдвига находим из (2.8) с учетом соотношений (2.5), (1.11), (1.4). Остальные величины $E_{11}^{[m+1]}$, $E_{12}^{[m+1]}$, $K_{11}^{[m+1]}$, $R_{11}^{[m+1]}$, $R_{12}^{[m+1]}$, $T_2^{[m+1]}$, $S^{[m+1]}$, $M_2^{[m+1]}$, $L_2^{[m+1]}$ можно определить из системы линейных алгебраических уравнений (1.9).

В соотношениях (3.5), (3.6) для удобства записи введен параметр χ . При $\chi=0$ следует интегрировать однородную систему линейных дифференциальных уравнений (3.4), если $\chi=1$, то приходим к неоднородной системе уравнений.

Алгоритм решения нелинейной краевой задачи построен. Начиная с пробного решения $Y_j^{(0)} = 0$ ($j=1, 2, \dots, 12$), найдем последовательные приближения $Y^{[1]}$, $Y^{[2]}$, ... путем решения на каждом шаге итерационного процесса линейных краевых задач методом ортогональной прогонки [12]. Данный алгоритм был реализован на алгоритмическом языке ПЛИ/1 в виде универсальной процедуры. Все численные расчеты выполнены на ЭВМ ЕС-1060.



Фиг. 1



Фиг. 2

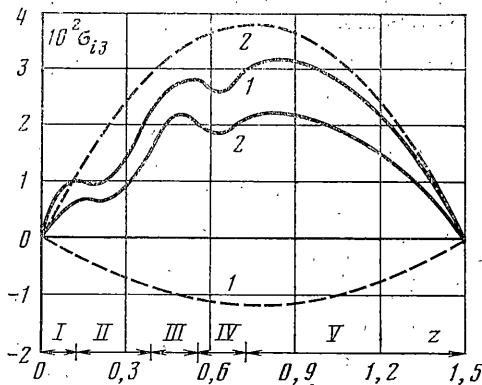
4. В качестве примера рассмотрим напряженно-деформированное состояние легкой радиальной шины 175/70P13, каркас которой выполнен из одного армированного текстильным кордом слоя, брекер — из двух перекрестно армированных металлокордом слоев. Шина нагружена эксплуатационным давлением 0,2 МПа.

Геометрические параметры A_1, A_2, k_1, k_2, ρ исходной (внутренней) поверхности шины получены путем использования процедуры сглаживания опытных данных кубическими сплайнами [2]. Для этого меридиан исходной поверхности шины от экватора ($\alpha_1=0$) до точки обода ($\alpha_1=16$ см) разбивался на 16 равных частей. Методику определения упругих постоянных элементарного резино-кордного слоя, элементов матрицы жесткости k -го слоя и некоторые другие вопросы можно также найти в [2].

Считаем, что на экваторе выполняются условия симметрии, а сечение, содержащее точку обода, полагаем шарнирно закрепленным (как показали численные расчеты, это вполне приемлемый вариант граничных условий). Изменение же условий закрепления в точке обода влияет на напряженно-деформированное состояние шины лишь в ее бортовой части, да и то, незначительно. Конечно, самый привлекательный вариант граничных условий — упругая заделка, к сожалению, в этом случае возникает проблема выбора жесткости упругой заделки.

Результаты расчета усилий ($N_i = -T_c/10H, i=1, 2, 3$; T_c — усилие в корде) в нитях корда, полученные на основе теории типа Тимошенко (первые четыре строки) и обобщенной теории Тимошенко, представлены в таблице. Численные результаты правильно отражают существо дела, поскольку усилия в брекере (N_1 соответствует первому слою, N_2 — второму)

убывают и достигают своих минимальных значений в концевом сечении, т. е. при $\alpha_1=6$ см (N_3 — усилие в каркасе). Как и следовало ожидать, влияние обобщенной кинематической гипотезы типа Тимошенко на интегральные характеристики шины



Фиг. 3

α_1	N_3	N_1	N_2	α_1	N_3	N_1	N_2
0	0,38	4,02	3,99	0	0,37	4,06	4,05
2	0,39	3,81	3,78	2	0,38	3,86	3,84
4	0,38	3,46	3,46	4	0,35	3,47	3,45
6	0,60	1,78	1,79	6	0,57	1,79	1,83

незначительно. Иное дело — локальные характеристики напряженно-деформированного состояния. Здесь уже пренебрежение нелинейными эффектами может привести к недопустимым погрешностям в зоне окончания брекера (см. фиг. 1—3).

Обратим внимание на перемену знака поперечных сдвигов в зоне окончания брекера (фиг. 1) и на неоднородное распределение поперечных касательных напряжений по толщине пакета слоев (фиг. 3). Здесь приняты обозначения: I — каркас, II — резиновая прослойка, III — внутренний слой брекера, IV — внешний слой брекера, V — протектор.

ЛИТЕРАТУРА

1. Григолюк Э. И., Куликов Г. М. Численное решение задач статики геометрически нелинейных анизотропных многослойных оболочек вращения.— Механ. композитн. материалов, 1981, № 3, с. 443—452.
2. Григолюк Э. И., Куликов Г. М. Осесимметричная деформация анизотропных слоистых оболочек вращения сложной формы.— Механ. композитн. материалов, 1981, № 4, с. 637—645.
3. Терегулов А. Г. К теории многослойных анизотропных оболочек.— В кн.: Исследования по теории пластин и оболочек. Казань: Изд-во Казан. гос. ун-та, 1970, вып. 6—7, с. 762—767.
4. Ганеева М. С. Основные нелинейные соотношения уточненной теории многослойных ортотропных тонких оболочек.— Статика и динамика оболочек: Тр. семинара Казанск. физ.-техн. ин-та, 1977, вып. 8, с. 19—31.
5. Рассказов А. О. К теории многослойных ортотропных пологих оболочек.— Прикл. механика, 1976, т. 12, № 11, с. 50—56.
6. Андреев А. Н., Немировский Ю. Н. К теории упругих многослойных анизотропных оболочек.— Изв. АН СССР. МТТ, 1977, № 5, с. 87—96.
7. Куликов Г. М. К теории многослойных пологих оболочек конечного прогиба.— Изв. АН СССР. МТТ, 1979, № 3, с. 188—192.
8. Амбарцумян С. А. Общая теория анизотропных оболочек. М.: Наука, 1974. 448 с.
9. Новожиллов В. В. Основы нелинейной теории упругости. М.—Л.: Гостехиздат, 1948. 212 с.
10. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1974. 831 с.
11. Кармишин А. В., Лясковец В. А., Мяченков В. И., Фролов А. Н. Статика и динамика тонкостенных оболочечных конструкций. М.: Машиностроение, 1975. 376 с.
12. Годунов С. К. О численном решении краевых задач для систем обыкновенных линейных дифференциальных уравнений.— Успехи матем. наук, 1964, т. 16, № 3, с. 171—174.

Москва, Тамбов

Поступила в редакцию
10.IV.1984