МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 4 • 1984

УДК 539.375

ОБ ОДНОМ ВАРИАЦИОННОМ ПРИНЦИПЕ ОПИСАНИЯ ПРЕДЕЛЬНЫХ ПРОЦЕССОВ НАГРАЖДЕНИЯ. 4. I

ЗАВОЙЧИНСКИЙ Б. И.

Постулирование теорией длительной прочности А. А. Ильюшина [1] функциональной зависимости между тензорами повреждений и напряжений служит основой при разработке теорий прочности, оценивающих опасность наиболее общих видов нагружения. Границы применимости этой теории несколько расширяются предположением о существовании функциональной связи между тензором повреждений и тензорами напряжений и деформаций одновременно, компоненты которых являются непериодическими функциями времени [2], а также построением одного из вариантов теории прочности для нагружений, описываемых функциями ограниченной вариации [3].

Излагаемая ниже теория привлекает линейные интегральные операторы в гильбертовом пространстве и вариационное исчисление для описания предельных процессов накопления повреждений в твердых телах под действием механического нагружения. Такой подход не противоречит термодинамике замкнутых равновесных систем [4].

1. Предельный процесс нагружения $y^*=y^*(t,x)$ — это такой процесс по $x\in[0,t]$, который приводит к достижению предельного состояния при $x=t$ (долговечность $t\in[0,t_0]$). Функция $y^*=y^*(t,t)$ описывает кривую прочности для данного процесса нагружения, отдельные точки которой имеют названия «предел статической прочности», «пределы ограниченной усталости», «предел выносливости», «предел длительной прочности» и т. п.

Предельное состояние изотропных материалов может характеризоваться появлением либо заданной плотности распределения микротрещин определенной длины, либо одной или нескольких макротрещин. В композитах под предельным состоянием дополнительно может пониматься разрушение дисперсной фазы, разрушение продольного или поперечного волокна, достижение текучести матрицы при разрушенном волокне и т. п.

Предельный процесс может быть представлен в виде $y^*=\mu(t)y(x)$. Основная задача предлагаемой теории состоит в нахождении предельного процесса нагружения $y^*=y^*(t,x)$ по заданному процессу нагружения $y=y(x)$.

Утверждение. Предельный процесс нагружения реализует минимум по времени целевого функционала

$$\min\{J(t,\tau):\tau\in[0,t]\}=1 \tag{1.1}$$

Для пластичных материалов

$$J(t,\tau)=\left(\lambda^+|y^*(t,x)|-\left|\frac{1}{t}\int_0^t K^+(\tau,x)y^*(t,x)\,dx\right|\right)\Big/\,y^*(t,\tau)^2 \tag{1.2}$$

для хрупких материалов

$$J(t,\tau)=\left(\lambda^-|y^*(t,x)|+\left|\frac{1}{t}\int_0^t K^-(\tau,x)y^*(t,x)\,dx\right|\right)^{-1} \tag{1.3}$$

где λ^+, λ^-=const, $K^+(\tau, q)$ и $K^-(\tau, x)$ являются заданными функциями двух переменных.

Так как соотношения (1.2) и (1.3) являются однородными, функция $\mu=\mu(t)$ находится согласно (1.1) по следующему соотношению:

$$\mu(t)=\min\{J(\tau):\tau\in[0,t]\} \tag{1.4}$$

$$J(\tau)=\left(\lambda^+|y(x)|-\left|\frac{1}{t}\int_0^t K^+(\tau,x)\,y(x)\,dx\right|\right)\Big/\ y^2(\tau) \tag{1.5}$$

или

$$J(\tau)=\left(\lambda^-|y(x)|+\left|\frac{1}{t}\int_0^t K^-(\tau,x)\,y(x)\,dx\right|\right)^{-1} \tag{1.6}$$

Если процесс рассматривается в пространстве напряжений, то $y=\sigma(x)$; если же в пространстве деформаций — $y=\varepsilon(x)$.

В упругой области обе постановки (в напряжениях или деформациях) совпадают. Деформационная теория должна применяться при описании предельных процессов малых упругопластических деформаций.

2. Основой условий (1.5) и (1.6) является линейный интегральный оператор

$$\frac{1}{t}\int_0^t K(\tau,x)\,y(x)\,dx \quad (\tau\in[0,t]) \tag{2.1}$$

где $K(z,q)$ — положительно-определенное симметрическое ядро, $y(x)$ — действительная функция с интегрируемым квадратом, т. е. $\int_0^t y^2(x)\,dx\leqslant M^2$, M=const.

Согласно теореме о разложении ядер интегральных операторов вида (2.1), ядро $K(\tau,x)$ разлагается в ряд

$$K(\tau,x)=\sum_{i=0}^{\infty}\lambda_i^*(t)\,\varphi_i(\tau)\,\varphi_i(x) \tag{2.2}$$

который, согласно теореме Мерсера, сходится к $K(\tau,x)$ абсолютно и равномерно [5].

Здесь в качестве системы функций $\varphi_i=\varphi_i(x)$ $(i=1,2,\ldots,\infty)$ следует выбрать полную ортогональную систему функций для интервала $[0,t]$, при этом

$$\varphi_i(x+mt)=\varphi_i(x)\quad(m=1,2,\ldots)\qquad \int_0^t\varphi_i(x)\,\varphi_k(x)\,dx=\begin{cases}ta_k & \\ 0 & \end{cases}\text{при}\ \begin{matrix}i=k\\ i\neq k\end{matrix}$$

Функция $y(x)$ также может быть разложена в ряд по этой системе функций

$$y(x)=\sum_{k=0}^{\infty}y_k\varphi_k(x),\qquad y_k=\frac{1}{ta_k}\int_0^t y(x)\,\varphi_k(x)\,dx \tag{2.3}$$

Оператор в соотношениях (1.2) и (1.3) с учетом (2.2) и (2.3) записывается так:

$$\lambda|y(\tau)|-\left|\frac{1}{t}\int_0^t K(\tau,x)\,y(x)\,dx\right|=\lambda\left|\sum_{k=0}^{\infty}y_k\varphi_k(\tau)\right|-\left|\sum_{k=0}^{\infty}\lambda_k(t)\,y_k\varphi_k(\tau)\right| \tag{2.4}$$

При определении функций $\lambda_n(t)$ целесообразно исследовать предельные процессы вида $y^*(t, x)=y(n, t)\varphi_n(x)$, где $y(n, t)$ — функция, описывающая взаимосвязь пределов усталостной (длительной) прочности и времени разрушения для данного n процесса.

Согласно (1.4), (1.2), (1.3) и (2.4), собственные значения λ_n определяются по зависимостям

$$\lambda^+-\lambda_n^+=y(n, t), \quad \lambda^-+\lambda_n^-=1/y(n, t) \quad (n=0, 1, \ldots,) \tag{2.5}$$

Здесь учтено требование $\max\{\varphi_n(x): \tau\in[0, t]\}=1$. Таким образом, коэффициенты разложения ядра (2.2) описываются кривыми прочности для процессов, изменяющихся во времени по соответствующим собственным функциям.

В дальнейшем рассматривается ядро $K(x, x)$, для которого система собственных функций является системой тригонометрических функций

$$1, \cos 2\pi x/t, \ \sin 2\pi x/t, \ldots, \ \cos n2\pi x/t, \ \sin n2\pi x/t \tag{2.6}$$

Если изучается периодический процесс с периодом T, т. е. $y=y(x+T)=y(x)$ и $t=NT$, то для его описания достаточно учитывать такие значения коэффициентов разложения:

$$y_n=\begin{cases} 0 & (n\neq mN; \quad m=0,1,2,\ldots) \\ \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T y(z)\varphi_m(z)\,dz & (n=mN); \ m=0,1,2,\ldots) \end{cases} \tag{2.7}$$

$$\varphi_n(\tau)\,|_{n=mN}=\varphi_m(\omega\tau) \quad (\omega=2\pi/T) \quad y(n, t)=y_{-1}(t, mN)$$

$$(m=1, 2, \ldots; \ N=t/T)$$

Соотношения (1.5) и (1.6) с использованием (2.4) и (2.7) принимают следующий вид:

$$J(t,\tau)=\left|y(0,t)y_0+\sum_{m=1}^{\infty}y_{-1}(t,mN)y_m\varphi_m(\tau)\right|\Big/y^2(\tau) \tag{2.8}$$

$$J(t,\tau)=1\Big/\left|y_0/y(0,t)+\sum_{m=1}^{\infty}y_m\varphi_m(\tau)/y_{-1}(t,mN)\right|. \tag{2.9}$$

$$y_m=\frac{1}{T}\int_0^T y(z)\varphi_m(z)\,dz$$

При изучении предельных процессов одноосного нагружения элементов, имеющих отверстия, выточки, галтели или другие геометрические концентраторы, возможно с достаточной для практики точностью применение условия (2.9), в котором функции $y(0, t)$ и $y_{-1}(t, mN)$ описывают кривые длительной и циклической прочности данных элементов.

3. Для асимметричного (одночастотного) процесса нагружения

$$y=y_m+y_{a,1}\sin 2\pi\omega_1 x\,(x\in[0, t]) \tag{3.1}$$

взаимосвязь между предельными амплитудой напряжений, средним напряжением и долговечностью на основе соотношений (1.4), (2.8) и (3.1) имеет вид

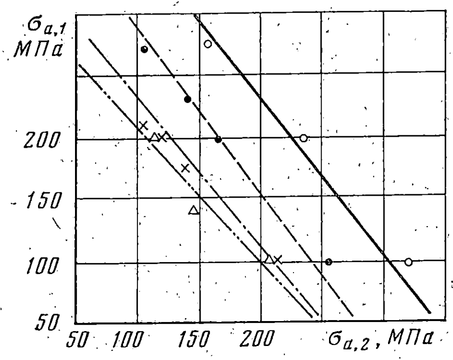
$$\overset{*}{y}_{a,1}=y_{-1}(t,\omega_1 t)/2-y_m^*+[(y_{-1}(t,\omega_1 t)/2)^2-y_{-1}(t,\omega_1 t)y_m^*+y_m^*y(0,t)]^{0,5} \tag{3.2}$$

а на основе соотношений (1.4), (2.9) и (3.1):

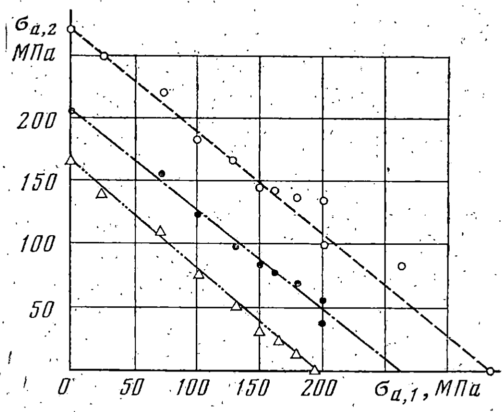
$$\overset{*}{y}_{a,1}/y_{-1}(t,\omega_1 t)=1-y_m^*/y(0,t) \tag{3.3}$$

Зависимость (3.2) удовлетворительно описывает экспериментальные данные по выносливости и ограниченной усталости коррозионно-стойких сталей и легированной конструкционной стали [6], серого чугуна при $y_m^*<0$ [7], некоторых других металлов и сплавов [8], армированных композитов, у которых матричная фаза — эпоксидная смола, дисперсная фаза — борволокно, углеродное волокно и стекловолокно [9].

Зависимость (3.3), записанная в напряжениях, называется формулой Гудмана при $y(0, t)=\sigma_b$; $y_{-1}(t, \omega_1 t)=\sigma_{-1}$, формулой Зодерберга при $y(0, t)=\sigma_s$, критерием Морроу при $y(0, t)=\sigma_u$, $y_{-1}(t, \omega_1 t)=\sigma_{cr}$, формулой



Фиг. 1



Фиг. 2

Серенсена — Кинасошвили при $y(0, t)=\sigma_0\sigma_1(2\sigma_{-1}-\sigma_0)$. Здесь σ_0, σ_{-1} — пределы ограниченной усталости при пульсирующем и симметричном нагружении соответственно, σ_b — временное сопротивление, σ_s — предел текучести, σ_u — истинное напряжение при статическом разрушении.

Зависимость (3.3) удовлетворительно описывает экспериментальные данные по выносливости низколегированных и аустенитных сталей [10], серого чугуна при $y_m^*>0$ [7] и некоторых композитных материалов [9].

4. Двухчастотный процесс описывается зависимостью

$$y=y_m+y_{a,1}\sin 2\pi\omega_1 x+y_{a,2}\sin 2\pi\omega_2 x\,(x\in[0, t]) \tag{4.1}$$

При условии $\omega_2=(4m-1)\omega_1\,(m=1, 2,\ldots,)$ соотношения (1.4), (2.9) и (4.1) преобразуются к виду

$$y_m^*/y(0,t)+\overset{*}{y}_{a,1}/y_{-1}(t,\omega_1 t)+\overset{*}{y}_{a,2}/y_{-1}(t,\omega_2 t)=1 \tag{4.2}$$

а (1.4), (2.8) и (4.1) — к виду

$$y_m^*y(0,t)+\overset{*}{y}_{a,1}y_{-1}(t,\omega_1 t)+\overset{*}{y}_{a,2}y_{-1}(t,\omega_2 t)=(y_m^*+\overset{*}{y}_{a,1}+\overset{*}{y}_{a,2})^2 \tag{4.3}$$

Для случая $y_m^*=0$ соотношение (4.3) линеаризуется при сохранении достаточно высокой точности и совпадает с (4.2).

Мультипликативное нагружение описывается уравнением

$$y=y_m+(y_{a,1}+y_{a,2}\sin 2\pi\omega_2 t)\sin 2\pi\omega_1 t \tag{4.4}$$

При $\omega_2\gg\omega_1$ предельное условие описывается зависимостью (4.2) или (4.3), а при $\omega_1\gg\omega_2$ — этими же зависимостями, в которых вместо $y_{-1}(t, \omega_2 t)$ подставлено $y_{-1}(t, \omega_1 t)$.

Проведено сопоставление теоретических результатов, полученных с использованием соотношений (4.2), (4.3), и результатов эксперимента по циклической и повторно-статической прочности различных металлов и сплавов при двухчастотном нагружении и деформировании [7—16].

Установлено соответствие теоретических (по зависимости (4.2)) и экспериментальных значений предельных амплитуд для различных сталей при двухчастотном нагружении [11—13] в диапазоне чисел циклов до разрушения $N_1 \in [5 \cdot 10^4, 2 \cdot 10^6]$. Различие же превосходит 5%.

В качестве примера на фиг. 1 в координатах $\overset{*}{\sigma}_{a,1} \sim \overset{*}{\sigma}_{a,2}$ представлены экспериментальные и теоретические значения предельных амплитуд напряжений для основного металла [12] при некоторых значениях $N_1 = \omega_1 t$ (○ — $N_1 = 2{,}5 \cdot 10^3$; ● — $2{,}5 \cdot 10^4$; × — $2{,}5 \cdot 10^5$; Δ — ·· — 10^7 циклов).

Анализ циклической прочности при двухчастотном нагружении стальных и алюминиевых образцов с U- и V-образными выточками ($k_t = 1{,}7$ и $k_t = 3$ соответственно) [14—16], стальных образцов с напрессованной втулкой [17] и алюминиевых образцов с отверстием [18] проводился с помощью соотношения (4.2), в котором $y_{-1} = y_{-1}(t, \omega t)$ является функцией, описывающей кривую ограниченной усталости для элемента с соответствующим концентратором.

В качестве примера на фиг. 2 представлена взаимосвязь $\overset{*}{\sigma}_{a,1} \sim \overset{*}{\sigma}_{a,2}$ (МПа) для образцов с U-образной выточкой [15] при $N_1 \in [2 \cdot 10^4, 5 \cdot 10^5]$ циклов (○ — $2 \cdot 10^4$; ● — 10^5; Δ — $5 \cdot 10^5$ циклов).

Различие между теоретическими и экспериментальными величинами предельных амплитуд также не превосходит 5%.

5. При исследовании непериодических предельных процессов необходимо знание функции $y(n, t)$ для диапазона частот $n \in [0, \infty]$. Соответствующие экспериментальные данные известны только для ограниченного диапазона n. Поэтому прогноз по (1.4)—(1.6), (2.4), (2.5) будет в некоторой степени зависеть от выбранной экстраполяции для этой функции.

Другой путь состоит в определении интеграла вида

$$\frac{1}{t} \int_0^{t_1} K(z, x) \varphi_k(x)\, dx \, (t_1 \in [0, t])$$

С этой целью рассматривается предельное нагружение

$$y^*(t, x) = y^*\left(\frac{t_1}{t}, k\right) \varphi_k(x) [h(x) - h(x - t_1)] + y^*\left(\frac{t_1}{t}, k\right) h(x - t)$$

$$h(z) = \begin{cases} 0 & z < 0 \\ 1 & z \geqslant 0 \end{cases}, \quad \varphi_k(t_1) = 0 \tag{5.1}$$

Согласно (1.4), (1.6), получается выражение для интеграла

$$\frac{1}{t} \int_0^{t_1} K^-(t, x) \varphi_k(x)\, dx = 1/y^*\left(\frac{t_1}{t}, k\right) - \lambda^- \tag{5.2}$$

а согласно (1.4), (1.5) — выражение

$$\frac{1}{t} \int_0^{t_1} K^+(t, x) \varphi_k(x)\, dx = \lambda^+ - y^*\left(\frac{t_1}{t}, k\right) \tag{5.3}$$

Нагружению вида ($y_n \geqslant y_r$)

$$y(x) = \varphi_k(x) \sum_{i=1}^{n} y_i [h(x - x_{i-1}) - h(x - x_i)] \tag{5.4}$$

при условии $\varphi_k(x_{i-1}) = \varphi_k(x_i) = 0$, $\varphi_k(t) = 1$ соответствует взаимосвязь предельных параметров процесса либо по (1.4), (1.6), (5.2) в виде

$$\lambda^{-} y_n^* + \sum_{i=1}^{n} y_i^* \left(y^* (t_i/t, k)^{-1} - y^* (t_{i-1}/t, k) \right) = 1 \qquad (5.5)$$

либо по (1.4), (1.5), (5.3) в виде

$$\lambda^{+}/y_n^* - \sum_{i=1}^{n} (y_i^*/y_n^*) \left[y^* \left(\frac{t_{i-1}}{t}, k \right) - y^* \left(\frac{t_i}{t}, k \right) \right] = 1 \qquad (5.6)$$

При практических расчетах применялась аппроксимация

$$y^*(z, k) / \lambda^{+} = 1 - r + (r^2 - z^2)^{0,5}$$
$$r = [1 + (1 - y_{-1}(t, k) / \lambda^{+})^2] / 2(1 - y_{-1}(t, k) / \lambda^{+}) \qquad (5.7)$$

С помощью соотношений (5.5)—(5.7) проведен анализ экспериментальных данных по накоплению повреждений при ступенчатом изменении напряжений в условиях ползучести [19], при ступенчатом изменении амплитуд напряжений в условиях симметричного циклического нагружения [20], при ступенчатом изменении амплитуд деформаций в условиях симметричного циклического деформирования [21] и некоторых других программных, в том числе блочных, нагружений.

Установлено удовлетворительное соответствие между теорией и экспериментом. В 90% случаев значения левой части соотношений (5.5) или (5.6) находились в интервале [0,95; 1,05], в остальных случаях — в интервале [0,85; 1,15].

Автор искренне благодарен А. А. Ильюшину за внимание к работе и полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ильюшин А. А.* Об одной теории длительной прочности.— Инж. ж. МТТ, 1967, № 3, с. 21–35.
2. *Завойчинский Б. И.* Об одном обобщении линейной теории накопления повреждений А. А. Ильюшина.— Изв. АН СССР. МТТ, 1973, № 3, с. 53—57.
3. *Завойчинский Б. И.* Линейная теория прочности при переменном нагружении.— Упругость и неупругость: Сб. статей. М.: Изд-во МГУ, 1978, вып. 5, с. 17—18.
4. *Ильюшин А. А.* Механика сплошной среды. М.: Изд-во МГУ, 1978. 287 с.
5. *Петровский И. Г.* Лекции по теории интегральных уравнений. М.: Наука, 1965. 127 с.
6. *Мустафин Ч. Г.* К определению предела выносливости деталей с концентраторами напряжений при асимметричном цикле.— Проблемы прочности, 1978, № 11, с. 34—38.
7. *Хейвуд Р. Б.* Проектирование с учетом усталости. М.: Машиностроение, 1969. 504 с.
8. *Форрест П.* Усталость металлов. М.: 1968. 354 с.
9. *Фудзии Т., Дзако М.* Механика разрушения композиционных материалов. М.: Мир, 1982. 232 с.
10. *Кузьменко В. А., Ищенко И. И.* и др. Влияние частоты нагружения, температуры и асимметрии цикла на выносливость теплостойких сталей 1Х2М и Х18Н9.— Проблемы прочности, 1981, № 2, с. 30—36.
11. *Locati L.* Essais de fatigue par flexion avec fréquences superposees.— In: Proc. Colloquim Fatigue, 1955. Symp. IUTAM. Stockholm, 1955. B.: Springer, 1956, p. 160—168.
12. *Jamada T., Kitagawa Sh.* Investigation of Fatigue Strength of Metals under Actual Service Loads.— Bull. ISME, 1967, v. 10, No. 38, p. 245—252.
13. *Буглов Е. Г., Коликов Э. А., Филатов М. Н.* Исследование усталости стали при бигармоническом нагружении.— Проблемы прочности, 1970, № 1, с. 46—49.
14. *Tanaka T.* Effect of the Superimposed Stress of High Frequency on Fatigue Strength.— Bull. ISME, 1968, v. 11, No. 43, p. 71—83.
15. *Tanaka T., Denoh Sh.* Notch Dependency of the Effect of Superimposed Stress of High Frequency on the Fatigue Strength.— Bull. ISME, 1971, v. 14, No. 77, p. 1139—1148.
16. *Tanaka T., Denoh Sh.* Fatigue under Superimposed Stress Patterns.— Soc. Mater. Sci. Japan, 1970, v. 19, No. 202, p. 629—634.

17. *Зайцев Г. З., Яценко В. К.* Влияние концентрации напряжений на сопротивление усталости стали при двухчастотном нагружении.— Заводск. лаборатория, 1977, № 11, с. 1398–1401.
18. *Tanaka T., Denoh Sh.* The Effect of Superimposed Stress of High Frequency on the Fatigue Strength of Aluminum Alloy.— Soc. Mater. Sci. Japan, 1968, v. 17, No. 173, p. 188–194.
19. *Abo el Ata M. M., Finnie J.* A Study of Creep Damage Rules.— Trans. ASME. Ser. D. J. Bas. Engng., 1972, v. 94, № 3.— Рус. перев.: Теорет. основы инженерных расчетов. Сер. Д, 1972, т. 94, № 3, с. 21–32.
20. *Srivatsavan R., Subramanyan S. A.* Cumulative Damage Rule Based on Successive Reduction in Fatigue Simit.— Trans. ASME. J. Engng. math. Tech., 1978, v. 100, № 2.— Рус. перев.: Теорет. основы инженерных расчетов. Сер. Д, 1978, т. 100, № 2, с. 108–110.
21. *Bernard-Connoly M., Bui-Quos T., Biron A.* Mieltilevel Strain Controlled Fatigue on a Type 304 Stainless Steel.— Trans. ASME. J. Engng. math. Tech., 1983, v. 105, p. 188–194.

Москва

Поступила в редакцию
19.IV.1982