

УДК 539.375

МОДЕЛЬ МАКРОТРЕЩИНЫ В ДВОЙКОНЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ

МИЛЕЙКО С. Т., ТВАРДОВСКИЙ В. В.

Трещина, как известно, «со времен Гриффитса ищет упругое тело», в котором она могла бы существовать и которое разрушалось бы наименее затратным образом, т. е. с затратой на этот процесс только чисто поверхностной энергии. Однако в реальных телах трещина встречает перед собой либо зону пластической деформации, либо различные типы неоднородности.

Неоднородное тело соответствует упругому до тех пор, пока всюду в теле выполнены условия непрерывности перемещений и усилий. При разрушении границы (отслоении) указанные условия более не выполняются, тело оказывается неупругим и можно ожидать более высокого, чем в гриффитсовом теле, сопротивления распространению макротрещины. Экспериментальные наблюдения такого поведения хорошо известны [1]. Различные частные случаи анализировались неоднократно, начиная с работы Гордона и Кука [2], однако разнообразие реальных ситуаций и их практическая значимость сохраняет актуальность анализа поведения макротрещины в неупругой неоднородной среде, компоненты которой ведут себя упругим образом.

Здесь рассматривается антиплоская задача о макротрещинах в среде с цилиндрическими круговыми включениями (фиг. 1). Кроме неоднородностей, связанных с наличием включений, модуль сдвига которых отличается от модуля сдвига матрицы, имеются неоднородности второго рода, обусловленные статистическим распределением энергии границы раздела волокно — матрица.

Сначала анализируется решение задачи об отслоении единичного включения; далее результаты этого анализа используются для описания кривой деформирования среды с невзаимодействующими включениями. Для этой среды затем ставится задача о макротрещине, решение которой получено аналитически для некоторых частных случаев и численно для одного более общего случая. Анализ решений указывает на возможность повышения сопротивления макротрещин в среде с неоднородностями второго рода.

1. Предварительно кратко изложим необходимые в дальнейшем результаты решения антиплоской задачи о трещине угловой длины $2\theta_0$ на границе раздела матрицы и кругового цилиндрического включения радиуса R . Модуль сдвига материала волокна — μ_f , матрицы — μ_m . (Здесь и далее индекс f относит величину к волокну, m — к матрице.)

Пусть рассматриваемая конфигурация имеет вид, изображенный на фиг. 2. Усилия на разрезе ab отсутствуют; на бесконечности заданы напряжения $T = \tau_{xx}^\infty - i\tau_{yz}^\infty$, которые в матрице и волокне выражаются следующим образом:

$$\tau_{xx} - i\tau_{yz} = \varphi_0'(\xi) + \left(T - \bar{T} \frac{R^2}{\xi^2} \right) \begin{cases} \mu_f/\mu^\circ, & |\xi| < R \\ \mu_m/\mu^\circ, & |\xi| > R \end{cases}$$

$$\varphi_0'(\xi) = \frac{\mu_f}{\mu^\circ} \frac{T(\xi - R \cos \theta_0) - \bar{T}R^2(R - \xi \cos \theta_0)/\xi^2}{\sqrt{\xi^2 - 2R\xi \cos \theta_0 + R^2}}$$

Здесь и далее $\mu^\circ = \mu_m + \mu_f$, $\xi = x + iy$.

Согласно приведенным формулам, напряжения в окрестности концов трещины a и b выражаются в виде

$$\tau_{xx}^a = \frac{\mu_f}{\mu^\circ} \sqrt{\frac{2R \sin \theta}{r}} \left[\tau_{xx}^\infty \cos \frac{\theta}{2} + \tau_{yz}^\infty \sin \frac{\theta}{2} \right] \cos \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} - \theta \right)$$

$$\tau_{yz}^a = -\frac{\mu_f}{\mu^0} \sqrt{\frac{2R \sin \theta}{r}} \left[\tau_{xz}^\infty \cos \frac{\theta}{2} + \tau_{yz}^\infty \sin \frac{\theta}{2} \right] \sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} - \theta \right)$$

$$\tau_{xz}^b = \frac{\mu_f}{\mu^0} \sqrt{\frac{2R \sin \theta}{r}} \left[\tau_{xz}^\infty \cos \frac{\theta}{2} - \tau_{yz}^\infty \sin \frac{\theta}{2} \right] \cos \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} - \theta \right)$$

$$\tau_{yz}^b = \frac{\mu_f}{\mu^0} \sqrt{\frac{2R \sin \theta}{r}} \left[\tau_{xz}^\infty \cos \frac{\theta}{2} - \tau_{yz}^\infty \sin \frac{\theta}{2} \right] \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} - \theta \right)$$

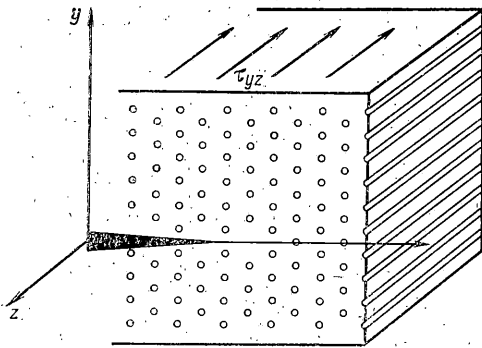
Наибольшие касательные напряжения

$$\tau^a = \frac{\mu_f}{\mu^0} \sqrt{\frac{2R \sin \theta}{r}} \left[\tau_{xz}^\infty \cos \frac{\theta}{2} + \tau_{yz}^\infty \sin \frac{\theta}{2} \right]$$

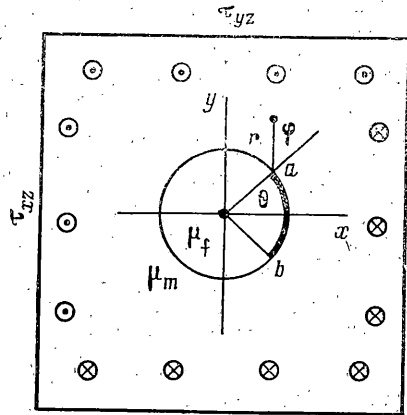
$$\tau^b = \frac{\mu_f}{\mu^0} \sqrt{\frac{2R \sin \theta}{r}} \left[\tau_{xz}^\infty \cos \frac{\theta}{2} - \tau_{yz}^\infty \sin \frac{\theta}{2} \right]$$

направлены по касательной к границе раздела в точках a и b .

При несимметричном нагружении концы трещины находятся в неэквивалентных условиях, поэтому отслоение начнется первоначально в окрест-



Фиг. 1



Фиг. 2

ности одного из них. Пусть для определенности это будет точка a . Если $K^* < K_m$, $K^* < K_f$, то в системе начнется отслоение, когда

$$\tau^2 = G \mu_m \mu^0 / [\pi R \mu_f \sin \theta \cos^2 (\frac{1}{2}\theta - \alpha)] \quad (4.1)$$

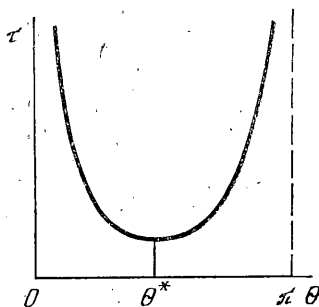
где τ и α связаны с компонентами τ_{xz}^∞ , τ_{yz}^∞ следующим образом: $\tau_{xz}^\infty = \tau \cos \alpha$, $\tau_{yz}^\infty = \tau \sin \alpha$; K_m^* и K_f^* — критические коэффициенты интенсивности напряжений для матрицы и волокна; $K^* = 2[G \mu_m \mu_f / \mu^0]^{1/2}$, а G — удвоенная энергия границы раздела.

При подрастании трещины происходит изменение не только θ , но и α . Когда условия в окрестностях концов трещины станут эквивалентными, что соответствует $\alpha = 0$, отслоения будут продолжаться с обоих концов трещины. Отслоение происходит устойчиво, если $\theta \geq \theta^*$, где θ^* — лежащий между 0 и π корень уравнения $\cos \theta + \cos 2(\theta + \alpha) = 0$. При $\theta < \theta^*$ развитие отслоения начинается неустойчивым образом. Схематичный вид зависимости критических напряжений от начального угла трещины приведен на фиг. 3. Если начальный угловой размер трещины мал, то при достижении нагрузочной критической величины произойдет почти полное отслоение волокна от матрицы.

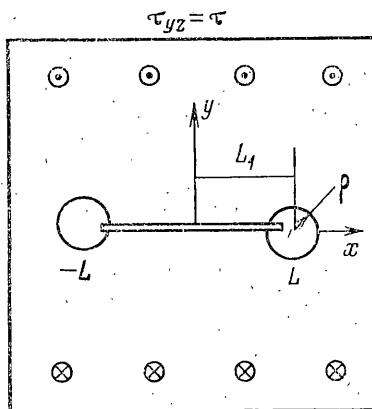
Имея в виду это обстоятельство, получим энергетический критерий полного отслоения. Изменение упругой энергии системы, обусловленное наличием связанного волокна, $W_0 = \pi R^2 (\mu_m - \mu_f) \tau^2 / (\mu_m \mu^0)$. При полном отслоении ($\mu_f = 0$) имеем $W_1 = \pi R^2 \tau^2 / \mu_m$. Если не учитывать трение и тепловые эффекты, то баланс энергии $W_1 - W_0 = 2\pi R G$ дает

$$\tau^2 = \mu_m \mu^0 G / (\mu_f R) \quad (1.2)$$

где G — некоторая кажущаяся удвоенная поверхностная энергия, зависящая от истинной величины энергии границы раздела, а также от числа,



Фиг. 3



Фиг. 4

размеров и взаимного расположения дефектов. Именно величина G может быть измерена в эксперименте.

Несколько более строгое термодинамическое рассмотрение (при некоторых ограничениях) ведет к следующей форме записи соотношения (1.2):

$$\tau \gamma = \mu^0 G / (\mu_f R) \quad (1.3)$$

Здесь γ — средний сдвиг в том месте, где помещено волокно.

Во всех изложенных рассуждениях явно не учитывались динамические эффекты, связанные с неустойчивым ростом трещин отслоения. Поэтому соответствующие формулы будут давать нижнюю оценку критических напряжений.

2. Рассмотрим теперь поведение композита с круговыми волокнами в условиях антиплоской деформации. (По-прежнему пренебрегаем динамическими эффектами.) Объемное содержание волокон v_f , могущих отслаиваться от матрицы в результате срабатывания каких-либо дефектов на поверхности раздела, есть v_f^d . Пусть величина поверхностной энергии G границы раздела не детерминирована, а является случайной величиной ω и плотностью функции распределения $\chi(\omega)$. Очевидно, что объемное содержание волокон, отслоившихся при некоторой величине среднего напряжения τ , есть

$$v_f^d = v_f \int_0^{\omega(\tau)} \chi(\omega) d\omega$$

Отслоение волокон эквивалентно образованию цилиндрического отверстия, поэтому если начальный эффективный модуль среды с неоднородностями первого и второго рода (неоднородности по ω называем неоднородностями второго рода) $\mu_0 = \mu_m v_m + \mu_f v_f$, а конечный модуль $\mu_1 = \mu_m v_m + \mu_f (v_f - v_f^d)$, то модуль в промежуточном состоянии при напряжении τ будет

$$\mu = \mu_0 + (\mu_1 - \mu_0) v_f^d / v_f \quad (2.1)$$

Для простоты здесь приведены приближенные выражения для продольного модуля сдвига армированной среды. Если взять более точные выражения для μ , полученные, например, с помощью полидисперсной или трехфазной модели, результаты качественно не изменяются.

Критерий отслоения единичного волокна, помещенного в бесконечную среду с модулем $\mu(\tau)$, получен в п. 1 (см. (1.3)); представим его в виде

$$\tau^2 = \mu(\tau) \mu^0 \omega / (\mu_f R) \quad (2.2)$$

Таким образом имеем два соотношения (2.1) и (2.2), которые в параметрическом виде обеспечивают связь между эффективным модулем сдвига μ композита и средними напряжениями τ , а следовательно, между средними напряжениями и средними деформациями γ . Параметром служит величина ω . Другими словами, прослеживается ясная зависимость кривой деформирования $\tau = \tau(\gamma)$ от функции распределения поверхностной энергии границы раздела. Вид этой кривой тесно связан с энергией деформирования работой, затрачиваемой на разрушение, и эффективной удельной поверхностной энергией материала.

3. Рассмотрим теперь трещину длиной $2L$ в описанном выше материале. На бесконечности заданы однородные напряжения $\tau_{yz} = \tau$, $\tau_{xz} = 0$ (фиг. 4), берега трещины не нагружены. В некоторой окрестности концов трещины возможны отслоения волокон от матрицы и падение модуля сдвига согласно (2.1). Чтобы получить аналитическое решение, примем допущения

$$L \gg R, \quad G_0 \gg \omega_0, \quad L \gg A^{1/2} \quad (3.1)$$

Здесь A — площадь зоны отслоений, G_0 — эффективная поверхностная энергия композита в отсутствие отслоений, ω_0 — минимальное значение величины ω .

Второе допущение обеспечивает достаточное число отслоений в зоне так, чтобы поведение материала в зоне отслоений можно было описывать эффективными характеристиками. Третье допущение означает $\tau_c \ll \tau_0$ или $G_0/\omega_0 \ll L/R$, где τ_c — критическое напряжение для трещины при отсутствии отслоений, а τ_0 — напряжение, при котором происходят первые отслоения, т. е. $\tau_c^2 = 2\mu_0 G_0 / (\pi L)$, $\tau_0^2 = \mu_0 \mu^0 \omega_0 / (\mu_f R)$.

Зоны отслоения, как и в случае соответствующей задачи для упруго-пластического упрочняющегося тела [3], представляют собой круговые области с радиусом

$$\rho = 1/2 L_1 (\tau/\tau_0)^2 \quad (3.2)$$

центры которых находятся в точках с координатами $(\pm L_1, 0)$:

$$L_1 = L \left(1 - \frac{\varepsilon \tau^2}{\tau_0^2} \right)^{-1}, \quad \varepsilon = \gamma_0 \tau_0 \int_{\tau_0}^{\infty} \frac{dx}{x^2 \tau(x)} - \frac{1}{2}, \quad \gamma_0 = \frac{\tau_0}{\mu_0} \quad (3.3)$$

Функция $\tau(\gamma)$ зависит от вида функции плотности распределения $\chi(\omega)$.

В упругой области напряженно-деформированное состояние определяется при помощи функции $\varphi'(\xi)$, аналитичной всюду, кроме точек разреза, моделирующего макротрещину: $\tau_{yz} + i\tau_{xz} = \varphi'(\xi)$, $\mu_0 u_z = \text{Im} \varphi(\xi)$, $\xi = x + iy$. Искомая функция, удовлетворяющая условиям на бесконечности и на границе зоны отслоений, имеет вид $\varphi'(\xi) = \tau \xi / (\xi^2 - L_1^2)^{1/2}$.

Вычисление изменения упругой энергии W_{00} системы, связанного с появлением разреза, дает $W_{00} = 1/2 \pi L^2 \tau^2 / \mu_0$. Добавление двух концевых зон отслоений приводит к суммарному изменению упругой энергии:

$$W_0 = 1/2 \pi L_1^2 \tau^2 / \mu_0 \quad (3.4)$$

Условие малости зоны отслоения означает, что две зоны практически не взаимодействуют одна с другой, т. е. напряженно-деформированное

состояние в окрестности каждого конца близко к тому, которое реализуется в окрестности конца полубесконечной трещины. Естественным кажется предположение о том, что размер зоны отслоений в момент начала развития макротрещины не зависит от длины трещины и является, таким образом, константой материала.

Следует иметь в виду, что рассматриваемая ситуация для модельной среды с чисто упругими компонентами (необратимая диссипация в которой на вновь образованных поверхностях приводит, в конечном итоге, к необратимому изменению эффективных модулей упругости), существенно отличается от ситуации, имеющей место в упругопластических средах, главным образом в смысле поведения материалов при разгрузке и, следовательно, при энергетическом анализе процессов деформирования и разрушения. В рамках предположения о постоянстве размера зоны отслоений при развитии «больших» макротрещин (точнее, о независимости фронтальной части области отслоений при развитии макротрещины) возможно почитать изменение упругой энергии системы, связанное с «разгрузкой» в тыльной зоне области отслоений. Можно показать, что качественные результаты от этого не меняются (в отличие от упругопластической задачи); однако в связи с тем, что само предположение о наличии критического размера носит приближенный характер, эти эффекты здесь не рассматриваются.

Отнесем критический радиус ρ_* области отслоений к той линии, где отслаивающиеся волокна обладают средней энергией границы раздела $\langle \omega \rangle$. Это позволит определить эффективную площадь $A^* = \pi \rho_*^2$ и энергию, затраченную на образование зоны A , как произведение эффективной площади A^* на энергию G_A , которую необходимо потратить на образование единицы площади зоны микроразрушений в однородном поле напряжений (причем, $G_A = 2v^d \langle \omega \rangle / R$). Деформация, соответствующая отслоениям волокон с $\omega = \langle \omega \rangle$, определяется выражением $\langle \gamma \rangle = \mu^0 \langle \omega \rangle / (\mu_f \mu(\langle \omega \rangle) R)$. Теперь (3.2) дает

$$\tau_* = \tau_0 \sqrt{\frac{2\rho_*}{\kappa L_1}}, \quad \kappa = \frac{\gamma_0 \tau_0}{\langle \gamma \rangle \tau(\langle \gamma \rangle)} \quad (3.5)$$

Запишем уравнение баланса энергии типа условия Граффитса

$$\partial W_0 / \partial L = 2G + 2G_A \partial A^* / \partial L \quad (3.6)$$

Из (3.3), (3.4) получаем $\partial W_0 / \partial L = \pi L_1^2 \tau^2 / (\mu_0 L)$.

Кроме того, поскольку при продвижении трещины радиус зоны ρ_* не изменяется, $\partial A^* / \partial L = 2\rho_*$. Следовательно, (3.6) можно переписать в виде

$$\tau_* = \tau_0 L / L_1 [1 + 4v_f^d \langle \omega \rangle \rho_* / (G_0 R)]^{1/2} \quad (3.7)$$

С учетом условия (3.5) получим окончательно

$$\rho_* = R \kappa \left[\frac{\mu^0 \omega_0}{\mu_f G_0} - \frac{4v_f^d \omega_0}{\pi G_0} + \frac{4\epsilon R}{\pi L} \right]^{-1}, \quad \tau_*^2 = \frac{2\mu_0 \mu^0 \omega_0 \rho_*}{\pi L \kappa \mu_f R} \quad (3.8)$$

Наконец, в тех же терминах можно записать удельную эффективную поверхностную энергию

$$G_* = G_0 \left[1 - \frac{4v_f^d \mu_f}{\pi \mu^0} + \frac{4\epsilon \mu_f G_0 R}{\pi \mu^0 \omega_0 L} \right]^{-1} \quad (3.9)$$

Очевидно, должно выполняться неравенство

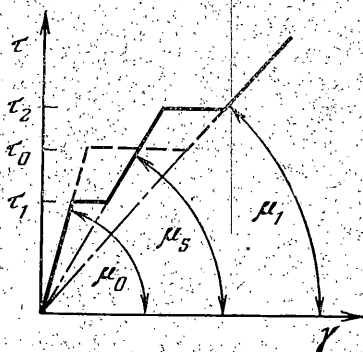
$$\omega_0 > 4v_f^d \kappa \mu_f \langle \omega \rangle / (\pi \mu^0) \quad (3.10)$$

В противном случае необходима иная постановка, учитывающая сравнимость зоны отслоения и длины трещины.

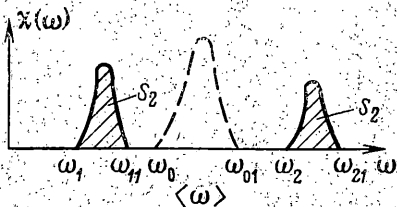
4. Результаты, полученные в п. 3, справедливы для достаточно широкого класса функций $\chi(\omega)$, обеспечивающих малость зоны отслоения по сравнению с длиной трещины. При численной реализации трудно исследовать полно какое-либо широкое множество этих функций. Поэтому для

того, чтобы качественно исследовать зависимость эффективной поверхностной энергии от дисперсии и симметрии функции плотности распределения, было выбрано бимодальное распределение случайной величины ω (фиг. 5). Каждый горб функции плотности распределения характеризовался только двумя параметрами: площадью под кривой (s_1 и s_2) и положением (ω_1 и ω_2). Средняя величина $\langle \omega \rangle$ сохранялась постоянной.

Как показано в п. 2, плотность распределения $\chi(\omega)$ однозначно связана с кривой деформирования $\tau(\gamma)$. В частности, кривой с двумя пло-



Фиг. 5



Фиг. 6

щадками «текучести» (фиг. 6) соответствует функция плотности распределения в виде

$$\begin{aligned} \chi(\omega) &= 0 \quad (0 < \omega < \omega_1); & \chi(\omega) &= \Gamma \tau_1^2 / \omega^2 \quad (\omega_1 < \omega < \omega_{11}); \\ \chi(\omega) &= 0 \quad (\omega_{11} < \omega < \omega_2); & \chi(\omega) &= \Gamma \tau_2^2 / \omega^2 \quad (\omega_2 < \omega < \omega_{21}); \\ \chi(\omega) &= 0 \quad (\omega > \omega_{21}); & \Gamma &= \mu_f R / [\mu^0 (\mu_0 - \mu_1)] \end{aligned}$$

где величины $\omega_1, \omega_{11}, \omega_2, \omega_{21}$ вычисляются при помощи (2.2) через $\tau_1, \tau_2, \mu_0, \mu_1$ и μ_s . Величина $\mu_s = \mu_0 + (\mu_1 - \mu_0)s$ — модуль сдвига в промежуточном состоянии, $s = s_1 / (s_1 + s_2)$. Эталонном для сравнения получающихся результатов служит далее кривая деформирования с одной площадкой «текучести» при $\tau_0 = \tau_1 = \tau_2$; это соответствует стягиванию обоих горбов функции плотности распределения в один общий, показанный на фиг. 6 штриховой линией.

Далее, имея в виду численную процедуру, используем решение задачи о трещине в упрочняющемся материале при антиплоском нагружении, полученное в рядах [3]. Анализ решения показывает, что $A^* = L^2 f_A(\tau/\tau_1)$, $W_0 = \frac{1}{2} \pi L^2 \tau^2 f_w(\tau/\tau_1) / \mu_0$. Такая форма выражений для эффективной площади и изменения упругой энергии позволяет избежать численного дифференцирования по L при использовании критерия разрушения. Функции $f_A(\tau/\tau_1)$ и $f_w(\tau/\tau_1)$ определяются численно вместе с нахождением границы зоны отслоений.

Примем энергетический критерий типа Гриффитса, обобщенный на случай наличия зон отслоений в виде (3.6) без каких-либо предположений о размерах зоны, заметив, что $G_A = 2v_f^d \langle \omega \rangle / R = \text{const}$, причем константа не зависит от выбранного вида функции распределения $\chi(\omega)$.

Соотношение (3.6) можно рассматривать при фиксированном τ как уравнение относительно L . Полученные решения представлены на фиг. 7, причем по оси ординат отложено безразмерное напряжение $\sigma = \tau/\tau_0$, по оси абсцисс — безразмерная критическая для данных напряжений длина трещины $L_* = \pi \tau_0^2 L / (2\mu_0 G_0)$ ($v_f = 0,55, v_f^d = 0,44, \mu_f/\mu_m = 50$).

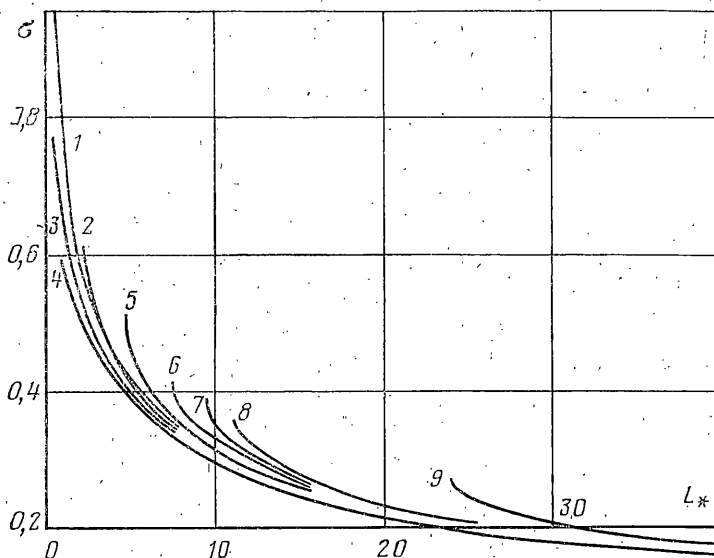
Поскольку $\tau_0^2 = \mu_0 (\mu_m + \mu_f) \omega_0 / (\mu_f R)$, то $L_* = \pi L \mu^0 \omega_0 / (2R G_0 \mu_f)$.

Значения критических напряжений (кривые $n=1-9$) сильно зависят от асимметрии (параметр s) и в виде большей степени от дисперсии (τ_1/τ_0). Нумерация кривых соответствует следующим значениям параметров:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
τ_1/τ_0	1	0,8	0,8	0,6	0,8	0,8	0,6	0,8	0,6
s	—	0,70	0,85	0,85	0,55	0,40	0,70	0,25	0,55

Существуют определенные значения параметров, при которых трещины вплоть до определенной длины $2L_0$ вязнут в материале, в котором при нагружении развиваются зоны отслоений волокон от матрицы.

Итак, эффективная поверхностная энергия композитной среды с неоднородностями энергии границ раздела зависит не только от математи-



Фиг. 7

ческого ожидания величины энергии границы раздела, но и от второго, а также третьего моментов распределения этой величины. Заметим также, что структура полученных соотношений позволяет выявить и другие параметры среды, влияющие на эффективную поверхностную энергию моментами распределения выше первого.

Значения критических напряжений очень сильно зависят от асимметрии (параметр s) и в еще большей степени от дисперсии (τ_1/τ_0). Существуют определенные значения параметров, при которых трещины вплоть до определенной длины $2L_0$ вязнут в материале, в котором при нагружении развиваются зоны отслоений волокон от матрицы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Милейко С. Т., Работнов Ю. Н. Механика волокнистых композитов.— Успехи механики, 1980, т. 3, № 1, с. 3—55.
2. Cook J., Gordon J. E. A mechanism for the control of crack propagation in all-brittle systems. — Proc. Roy. Soc. Ser. A., 1964, v. 282, No. 1391, p. 508—520.
3. Rice J. R. Stresses due to a sharp notch in a work-hardening elastic-plastic material loaded by longitudinal shear.— Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech., 1967, v. 34, No. 2, p. 287—298.

Москва

Поступила в редакцию
28.III.1983