

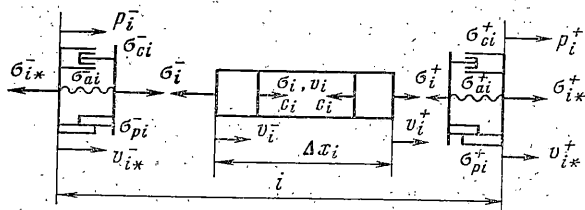
УДК 539.374

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВОЛНОВЫХ ПРОЦЕССОВ В УПРУГОВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКИХ ТЕЛАХ

ШОРР Б. Ф.

Из-за сложности анализа волновых процессов в упруговязкопластических телах до конечных числовых результатов обычно удается довести лишь задачи для упрощенных механических моделей материала при простых граничных условиях и нагрузках преимущественно для начальной фазы процесса [1-3]. Вместе с тем при многократных отражениях волн от границ материал испытывает знакопеременное нагружение, что требует хотя бы приближенного учета диаграмм циклического деформирования с эффектами изотропного и анизотропного упрочнения [4-5]. Дополнительные возможности, облегчающие учет сложных свойств деформируемых тел при произвольно меняющихся граничных условиях, применительно к одномерным волновым процессам открываются при использовании специального численного метода расчета, который условно может быть назван методом прямого математического моделирования на ЭВМ процесса распространения механических возмущений [6-7]¹. Решены задачи об ударе жесткого тела конечной массы по упругопластическому стержню с учетом эффекта Баушингера, о вынужденных неустановившихся колебаниях упругопластического стержня при возбуждении квазигармонической силой с медленно меняющейся частотой и др.

1. Сопоставим упруговязкопластическому телу, по которому распространяется одномерный волновой фронт, структурную модель в виде малых элементов, каждый из которых состоит из континуальной упругоинерционной части конечной длины Δx_i и неупругих безынерционных связей, описывающих вязкопластические свойства данного элемента (фиг. 1).



Фиг. 1

Внешние нагрузки приложены к границам элементов и, как и общие для тела граничные условия, остаются постоянными в течение конечных интервалов времени Δt , за которые упругие волны проходят от одной границы каждого элемента до другой. В эти моменты происходят скачкообразные изменения внутренних усилий и скоростей на границах элементов, а также внешних нагрузок и механических характеристик вязкопластических связей, если они зависят от времени.

¹ См. также: Шорр Б. Ф. Прямое математическое моделирование процесса распространения механических возмущений в задачах динамики многократно соударяющихся деформируемых тел. — В кн.: IV Всес. съезд по теор. и прикл. механике. Киев: Наук. думка, 1976, с. 37.

При соотношении длин элементов $\Delta x_i/\Delta x_j = c_i/c_j$, где c_i — скорость упругой волны в i -м элементе, возмущения, идущие от левой границы элемента, обозначаемые верхним индексом $(-)$, к правой $(+)$ и в обратном направлении, достигнут противоположной границы одновременно во всех элементах в моменты времени $t+n\Delta t$, где $\Delta t = \Delta x_i/c_i = \text{const}$ ($n=0, 1, 2, \dots$). В эти моменты времени каждый элемент (кроме его границ) будет находиться в однородном упругоинерционном состоянии с напряжением σ_i и массовой скоростью v_i , а на границах возникнут сильные разрывы напряжений, деформаций и скорости. В результате распада разрывов напряжений, деформаций и скорости на границах упругой части элементов изменятся соответственно на $\Delta\sigma_i^\pm$, $\Delta\varepsilon_{ei}^\pm$ и Δv_i^\pm , так что новые значения этих функций f_i^\pm будут

$$f_i^\pm = f_i + \Delta f_i^\pm \quad (1.1)$$

Возмущения распространяются внутрь i -го элемента со скоростью $c_i = (E_i/\rho_i)^{1/2}$, удовлетворяя уравнениям механики [8]²:

$$\Delta\sigma_i^\pm = \pm \rho_i c_i \Delta v_i^\pm, \quad \Delta\varepsilon_{ei}^\pm = E_i \Delta\varepsilon_{ei}^\pm, \quad \Delta v_i^\pm = \pm c_i \Delta\varepsilon_{ei}^\pm \quad (1.2)$$

Через интервал времени Δt все элементы вновь окажутся в однородном упругоинерционном состоянии, но с другими параметрами

$$f_i(t+\Delta t) = f_i(t) + \Delta f_i^+ + \Delta f_i^- = f_i^+ + f_i^- - f_i(t) \quad (1.3)$$

Условия равновесия и неразрывности перемещений внешних границ i -го и $(i\pm 1)$ -го элементов имеют вид (фиг. 1):

$$\sigma_{i*}^\pm = \sigma_{i\pm 1,*}^\mp = \sigma_i^\pm \mp p_i^\pm \quad (1.4)$$

$$v_{i*}^\pm = v_{i\pm 1,*}^\mp = v_i^\pm + v_{p_i}^\pm \quad (1.5)$$

где p_i^\pm — внешние нагрузки; $v_{p_i}^\pm$ — средняя за время Δt скорость соответствующей границы элемента, связанная с изменением за это время его неупругих деформаций ε_{pi}^\pm .

Выражение для $v_{p_i}^\pm$ представим в виде

$$v_{p_i}^\pm = \pm (\sigma_i^\pm \varphi_i^\pm / (\rho_i c_i) + c_i \psi_i^\pm) \quad (1.6)$$

Здесь коэффициенты φ_i^\pm , ψ_i^\pm , зависящие в общем случае от вида связей, предыстории нагружения, величины Δt и других факторов, при расчете новых значений σ_i^\pm , v_i^\pm являются для данного временного этапа известными или уточняются пересчетом по полученным значениям σ_i^\pm , v_i^\pm .

Используя соотношения (1.1)–(1.6) для каждого из примыкающих к левой и правой границам i -го и $(i\pm 1)$ -го элементов, получим

$$\sigma_i^\pm = \frac{\sigma_{i\pm 1}^\pm \pm p_{i*}^\pm (1 + \varphi_{i\pm 1}^\mp) + q_i^\pm (\sigma_i^\pm \pm \rho_i c_i (v_{i\pm 1}^\mp - v_i^\pm) - E_i [\psi_i^\pm + (c_{i\pm 1}/c_i) \psi_{i\pm 1}^\mp])}{1 + \varphi_{i\pm 1}^\mp + q_i^\pm (1 + \varphi_i^\pm)} \quad (1.7)$$

$$v_i^\pm = v_i \pm \frac{\sigma_i^\pm - \sigma_i}{\rho_i c_i}, \quad q_i^\pm = \frac{\rho_{i\pm 1} c_{i\pm 1}}{\rho_i c_i}, \quad p_{i*}^\pm = p_i^\pm + p_{i\pm 1}^\mp$$

Выражениями (1.7) вместе с (1.4) устанавливается основная система рекуррентных соотношений, позволяющая последовательно находить новые значения напряжений и скоростей в i -м элементе в моменты времени $t+n\Delta t$ по их значениям в том же и в двух соседних элементах в предыдущие моменты времени $t+(n-1)\Delta t$ и отнесенным к границам элемента внешним нагрузкам. Условия на краях тела могут быть получены из (1.7), если принять:

² Записи типа (1.2) соответствуют двум формулам:

$$\Delta\sigma_i^+ = \rho_i c_i \Delta v_i^+ \quad \text{и} \quad \Delta\sigma_i^- = -\rho_i c_i \Delta v_i^-.$$

для свободного края с нагрузкой $p_i^{\pm} = p_0$:

$$\sigma_{i\pm 1} = p_{i\pm 1}^{\mp} = 0, \quad c_{i\pm 1} = 0, \quad \varphi_{i\pm 1}^{\mp} = 0, \quad \sigma_i^{\pm} = \pm p_0 \quad (1.8)$$

для края, соединенного с жестким телом, имеющим в данный момент скорость $v_{i\pm 1} = v_0$:

$$c_{i\pm 1} = \infty, \quad c_{i\pm 1} \Psi_{i\pm 1}^{\mp} = 0, \quad \sigma_i^{\pm} = \frac{\sigma_i \pm \rho_i c_i (v_0 - v_i) - E_i \Psi_{i\pm 1}^{\mp}}{1 + \varphi_i^{\pm}} \quad (1.9)$$

Принципиальной особенностью данного метода является то, что на любом временном этапе и для любого элемента приведенные выше соотношения дают точные решения, относящиеся к конечному на интервале Δt состоянию системы (для принятой структурной модели независимо от конкретного вида неупругих связей). Это обеспечивает полную устойчивость вычислительного процесса при практически неограниченном увеличении временных этапов и числа элементов, что, в свою очередь, позволяет моделировать с необходимой точностью как разрывные, так и непрерывные процессы. Произвольное изменение нагрузок и граничных условий легко включается в алгоритм расчета.

2. При анализе волновых процессов для описания структуры неупругих связей можно использовать любую теорию, учитывающую особенности знакопеременного нагружения, включая эффект Баушингера, например модели из [9]. На фиг. 1 показана простейшая структурная модель вязкопластических связей, удовлетворяющая указанным требованиям. В этом случае

$$\varepsilon_p^* = \sigma_c / \eta = 0 \quad \text{при} \quad |\sigma_p| \leq \sigma_T \quad (2.1)$$

$$\varepsilon_p^* = \text{sign } \sigma_p (|\sigma_p| - \sigma_T) / \eta \quad \text{при} \quad |\sigma_p| \geq \sigma_T$$

где σ_c — вязкие, σ_p — активные напряжения, $\sigma_a = \sigma - \sigma_p$ — остаточные микронапряжения, σ_T — мгновенный предел текучести, выраженный в активных напряжениях [5] ($f^* = \partial f / \partial t$).

Для деформации постоянного направления мгновенный предел текучести обычно представляют в полных напряжениях $\sigma_T^0 = \sigma_T + \sigma_a$. Выразив в (2.1) σ_T через σ_T^0 , получим $\varepsilon_p^* = 0$ при $\sigma \leq \sigma_T^0$ и $\varepsilon_p^* = \text{sign } \sigma (\sigma - \sigma_T^0) / \eta$ при $\sigma \geq \sigma_T^0$.

Случай $\sigma_T^0 = \text{const}$ был рассмотрен Соколовским [8], а $\sigma_T^0 = f(\varepsilon)$, где $\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_p$, — Малверном и др. [3]. Без учета вязкой составляющей ($\eta = 0$, $\sigma_c = 0$), считая $\sigma_T^0 = f(\varepsilon)$, приходим к деформационной теории Рахматулина — Кармана [2]. Полагая в (2.1) $\sigma_a = E_a \varepsilon_p$, $E_a = \text{const}$, приходим к моделям Ишлинского: при $\sigma_T = 0$ — к модели с последствием [10], а при $\sigma_T = \text{const}$ — к модели с постоянной шириной упругой области $2\sigma_T$ и линейным (кинематическим) упрочнением [11].

Для более полного учета деформационной анизотропии и связанного с ней различного темпа пластического течения материала по разным направлениям при знакопеременном нагружении в зависимости от истории деформирования можно использовать представление о предельных границах $\sigma_{a\infty} = E_{a0} \varepsilon_p + \sigma_{a0} \text{sign } \sigma_p$, между которыми происходит изменение остаточных микронапряжений σ_a (фиг. 2). В этом случае [12]:

$$E_a = \frac{\partial \sigma_a}{\partial \varepsilon_p} = E_{a0} + \beta [\sigma_{a0} - \text{sign } \sigma_p (\sigma_a - E_{a0} \varepsilon_p)] \quad (2.2)$$

где E_{a0} , σ_{a0} , β — константы материала, определяемые по кривым знакопеременного деформирования [13].

Считая, как обычно, $\sigma_T = f(\varepsilon_{p2})$ и $E_T(\varepsilon_{p2}) = \partial \sigma_T / \partial \varepsilon_{p2}$, где $\varepsilon_{p2} = \int |d\varepsilon_p| -$

накопленная пластическая деформация (интеграл берется в пределах от 0 до ε_p), получим для принятой модели при $|\sigma - \sigma_a| \geq \sigma_T$:

$$\sigma^* = \sigma_a^* + \sigma_p^* + \sigma_c^* = (E_a + E_T) \varepsilon_p^* + \sigma_c^* \quad (2.3)$$

Если в момент t известны ε_p , σ_a и $\varepsilon_{p\Sigma}$, а следовательно, и E_a , E_T , σ_T , то при $|\sigma - \sigma_a| \geq \sigma_T$ малые конечные приращения входящих в модель параметров за время Δt при действии постоянного напряжения σ определяются как

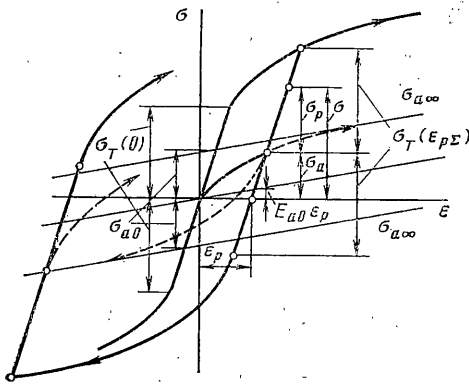
$$\Delta \varepsilon_p = \{1 - \exp[-(E_a + E_T) \Delta t / \eta]\} [\sigma - \sigma_a - \sigma_T \operatorname{sign}(\sigma - \sigma_a)] / (E_a + E_T),$$

$$\Delta \sigma_a = E_a \Delta \varepsilon_p, \quad \Delta \varepsilon_{p\Sigma} = |\Delta \varepsilon_p|, \quad \Delta \sigma_T = E_T \Delta \varepsilon_{p\Sigma} \quad (2.4)$$

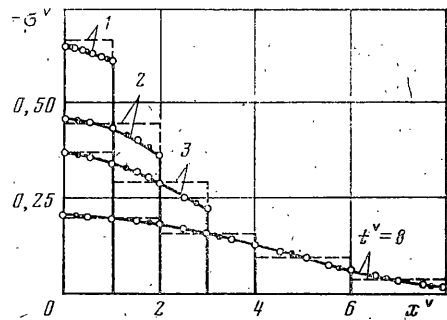
$$\Delta E_a = -\beta \operatorname{sign}(\sigma - \sigma_a) (\Delta \sigma_a - E_{a0} \Delta \varepsilon_p)$$

после чего можно найти их новые значения.

Выражения (2.4) справедливы при $\Delta \varepsilon_p \ll 1/\beta$ и $E_T \approx \text{const}$. В частности, при линейном упрочнении ($\beta = 0$, $E_a = \text{const}$) и $\sigma_T = \text{const}$ ($E_T = 0$) величина



Фиг. 2



Фиг. 3

$\Delta \varepsilon_p$ по (2.4) ограничивается лишь условием $\sigma = \text{const}$. В общем случае средние за время Δt значения E_a и E_T могут быть уточнены последовательным пересчетом [12].

Полагая для i -го элемента $\sigma = \sigma_i^\pm$, $\varepsilon_p = \varepsilon_{pi}^\pm$ и считая, что каждая связь описывает вязкопластическую деформацию примыкающей к ней половины элемента, получим для связанной с нею скорости границ

$$v_{pi}^\pm = \pm 0,5 \Delta \varepsilon_{pi}^\pm \Delta x_i / \Delta t = \pm 0,5 c_i \Delta \varepsilon_{pi}^\pm \quad (2.5)$$

откуда приходим к выражению (1.6), в котором

$$\varphi_i^\pm = \psi_i^\pm = 0 \quad \text{при} \quad |\sigma_i^\pm - \sigma_{ai}^\pm| \leq \sigma_{Ti}^\pm \quad (2.6)$$

$$\varphi_i^\pm = \frac{E_i}{2(E_{ai}^\pm + E_{Ti}^\pm)} \left\{ 1 - \exp \left[- (E_{ai}^\pm + E_{Ti}^\pm) \frac{\Delta t}{\eta_i} \right] \right\}$$

$$\psi_i^\pm = -\varphi_i^\pm \frac{\sigma_{ai}^\pm + \operatorname{sign}(\sigma_i^\pm - \sigma_{ai}^\pm) \sigma_{Ti}^\pm}{E_i}$$

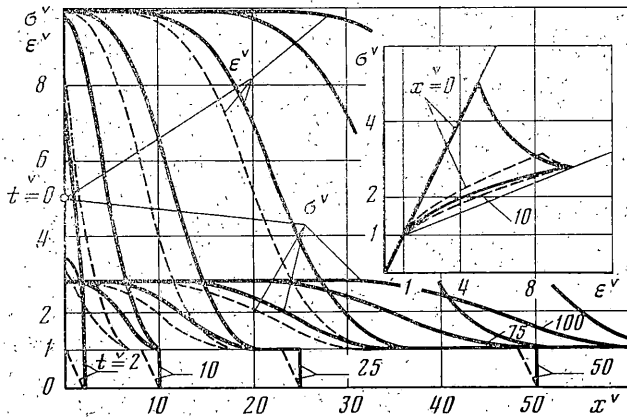
при $|\sigma_i^\pm - \sigma_{ai}^\pm| \geq \sigma_{Ti}^\pm$

В расчетах вначале на каждом шаге принимается $\varphi_i^\pm = \psi_i^\pm = 0$, т. е. проводится упругий расчет, из которого определяются σ_i^\pm , и проверка первого условия (2.6). Если оно не удовлетворяется, вычисляются φ_i^\pm , ψ_i^\pm по знакам выражений $\sigma_i^\pm - \sigma_{ai}^\pm$ для упругого расчета и по (1.7) определяются окончательные значения σ_i^\pm , а также новые значения ε_{pi}^\pm и остальных параметров, входящих в структурную модель.

При постоянстве параметров модели выражения (2.4) и (2.6) справедливы при любых значениях Δt , но для отображения непрерывных процессов следует принимать $\Delta t \ll [\eta_i / (E_{ai}^\pm + E_{Ti}^\pm)]_{\min}$, назначая число элементов так, чтобы $\Delta x_i = c_i \Delta t$.

Для иллюстрации точности метода на фиг. 3 показано распределение напряжений $\sigma^v = \sigma / (\rho c v_0)$ по длине $x^v = x / (c \tau_0)$ полубесконечного упруго-вязкого стержня для некоторых моментов времени $t^v = t / \tau_0$ при ударе по торцу с постоянной скоростью v_0 . При $t^v = 0$ величина $\sigma^v(0) = 1$. Стержень — из материала Максвелла, для которого $\varphi_i^\pm = 0,5 \Delta t / \tau_0$, $\psi_i^\pm = 0$ ($\tau_0 = \eta / E$ — время релаксации). Светлые точки (выборочно) соответствуют $\Delta t^v = \Delta t / \tau_0 = 0,1$, темные — $\Delta t^v = 0,02$; и те, и другие практически совпадают с аналитическим решением [14], показанным сплошными линиями. Даже при $\Delta t^v = 1$ (штриховые линии) получается правильная осредненная картина процесса.

На фиг. 4 приведены распределения напряжений σ^v и полных деформаций ϵ^v по длине x^v упруговязкопластического полубесконечного стержня



Фиг. 4

для ряда моментов времени t^v для задачи удара по торцу со скоростью, изменяющейся по закону $v_0^v = v_{0*}^v t^v / t_*^v$ при $t^v / t_*^v < 1$ и $v_0^v = v_{0*}^v$ при $t^v / t_*^v \geq 1$.

Свойства материала описываются соотношениями (2.1) при $\sigma_T = \text{const}$, $E_a = \text{const}$, где $\sigma^v = \sigma / \sigma_T$, $\epsilon^v = \epsilon / \sigma_T$, $t^v = t / \tau$, $x^v = x / (c \tau)$, $\tau = \eta / E$, $v_0^v = \rho c v_0 / \sigma_T$, $E_h^v = E_a / (E + E_a)$. Принято $v_{0*}^v = 5$, $E_h^v = 0,2$; сплошные линии соответствуют мгновенному удару $t_*^v = 0$, штриховые — продолжительности удара $t_*^v = 10$. Там же показаны диаграммы динамического деформирования в сечениях $x^v = 0$ и $x^v = 10$. При $t^v \gg 1$, а при затяжном ударе при $t^v \gg t_*^v$ эффект превышения динамических напряжений над кривой статического деформирования заметно ослабевает, скорость пластической волны в соответствии с деформационной теорией становится близкой к $c_p = c(E_h^v)^{1/2}$ и образуются плата постоянных напряжений и деформаций [3, 15]. Результаты расчета для $t_*^v = 0$ практически совпадают с данными, полученными для этого случая численным интегрированием по методу характеристик [3].

3. Наибольший эффект рассматриваемый метод дает применительно к задачам с переменными условиями на границах при многократных отражениях волн.

1. Удар жесткого тела конечной массы по упругопластическому стержню конечной длины. Свойства материала описываются соотношениями (2.1) при $\eta = 0$, $\sigma_T = \text{const}$, $E_a = \text{const}$, т. е. теорией упругопластической деформации с линейным упрочнением и учетом эффекта Баушингера. В этом случае

$$\varphi_i^\pm = 0,5 E / E_a, \quad \varphi_i^\pm = -\varphi_i^\pm [E_a \epsilon_{pi}^\pm + \text{sign}(\sigma_i^\pm - E_a \epsilon_{pi}^\pm) \sigma_T] / E \quad (3.1)$$

Масса M ударяет с начальной скоростью $v(0) = v_0$ по левому торцу первого элемента, правый конец жестко закреплен, для него по (1.9)

$\sigma_n^+ = (\sigma_n - \rho c v_n - E \psi_n^+) / (1 + \varphi_n^+)$. Меняющиеся в процессе удара граничные условия на левом конце можно представить в виде соотношений

$$\sigma_{1*}^- = \sigma_1^- = \frac{\sigma_1 - \rho c [v(t) - v_1] - E \psi_1^-}{1 + 0,5\gamma + \varphi_1^-} \lambda,$$

$$\Delta v = \frac{\sigma_1^-}{\rho c} \gamma$$

$$v(t + \Delta t) = v(t) + \Delta v, \quad (3.2)$$

$$\gamma = \rho c F \Delta t / M = M_0 \Delta t / (M t_{**})$$

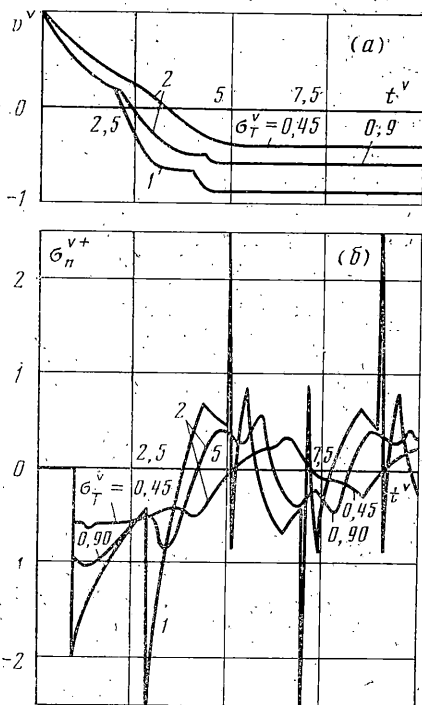
$$v_{1*}^- = [v(t) + 0,5\Delta v] \lambda + [v_1 + \sigma_1 / (\rho c) - c \psi_1^-] (1 - \lambda)$$

$$\delta(t + \Delta t) = \delta(t) +$$

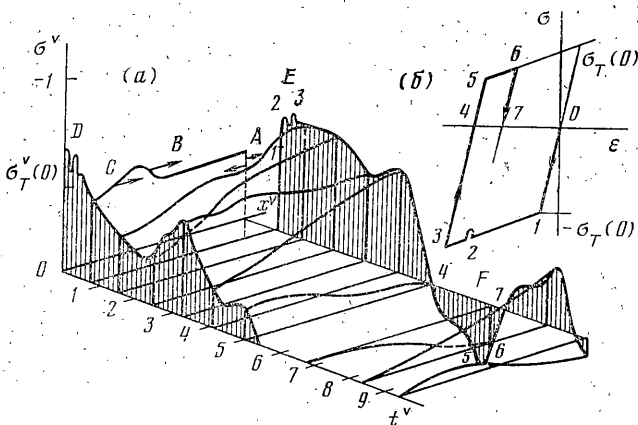
$$+ [v_{1*}^- - v(t) - 0,5\Delta v] (1 - \lambda) \Delta t$$

Здесь $M_0 = \rho F l$ — масса стержня, $t_{**} = l/c$ — время распространения волны по длине стержня, $v(t)$ — скорость массы, $\delta(t)$ — зазор между массой и стержнем. При $\delta(t) = 0$ принимается $\lambda = 1$, но если получится $\sigma_1^- > 0$, то делается пересчет при $\lambda = 0$. При $\delta(t) > 0$ принимается $\lambda = 0$, но если получится $\delta(t + \Delta t) < 0$, то делается пересчет при $\lambda = |\delta(t + \Delta t)| / (\delta(t) + |\delta(t + \Delta t)|)$.

Условия контакта проверяются при значениях φ_1^- , ψ_1^- , удовлетворяющих (2.6). Для описания плавного изменения скорости $v(t)$ достаточно



Фиг. 5

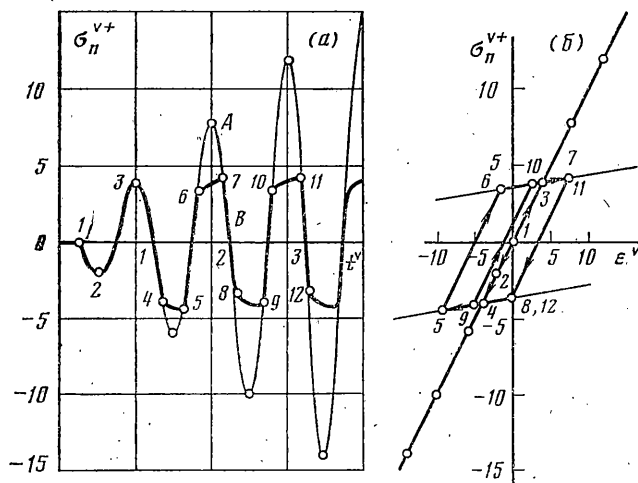


Фиг. 6

принять $\gamma \ll 1$, что достигается выбором необходимого числа элементов (при $M \sim M_0$ должно быть $n \gg 1$) — ниже $n = 50$.

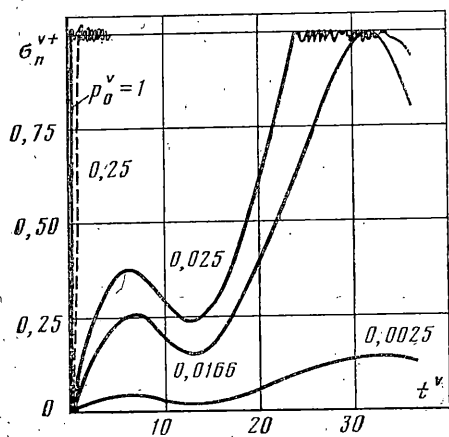
На фиг. 5, а показано изменение скорости $v^{\sim} = v/v_0$ массы при ударе по упругому (кривые 1) и упругопластическому (кривые 2) стержню в зависимости от времени $t^{\sim} = t/t_{**}$ для $M/M_0 = 1,31$, $\sigma_T^{\sim} = \sigma_T / (\rho c v_0) = 0,45$ и $0,9$ и $E_k^{\sim} = 0,1$. Виден известный эффект повторного соударения стержня с отскочившей массой; для упругопластического стержня это явление может не наблюдаться. На фиг. 5, б приведено изменение напряжения в заделке $\sigma_n^{\sim+} = \sigma_n^+ / (\rho c v_0)$ (при $x^{\sim} = x/l = 1$) в обоих случаях.

Картина движения волновых фронтов и изменения напряжений показана на фиг. 6, а. Видны начальная упругая волна (А) с интенсивностью предела текучести недеформированного материала $\sigma_T^{\sim}(0) = \sigma_T^{\sim}$; волны пластической догрузки из-за упрочнения (В) и последующей разгрузки из-за падения скорости массы (С), а также три зоны пластической деформации:



Фиг. 7

у торца, по которому происходит удар (D), у заделки при первом отражении волны (E) и у заделки при перемене знака напряжений вследствие падения предела текучести из-за эффекта Баушингера (F). Процесс упругопластического деформирования у заделки показан на фиг. 6, б (цифры при характерных точках на фиг. 6, а и б одинаковы). Аналогичная задача удара по упруговязкому телу была рассмотрена в [7].



Фиг. 8

На фиг. 7, а приведены начальные участки расчетных осциллограмм, т. е. зависимостей напряжения в заделке $\sigma_n^{\sim+} = \sigma_n^{\sim+}/p_0$ от времени $t^{\sim} = t f_1$ ($f_1 = c/(4l)$ — первая собственная частота колебаний стержня) при возбуждении с постоянной резонансной частотой ($\nu = 0, f^{\sim} = f/f_1 = 1$) для упругого ($\sigma_T^{\sim} = \sigma_T/p_0 = \infty$) — кривая А и упругопластического ($\sigma_T^{\sim} = 4$) — кривая В стержней, а на фиг. 7, б — соответствующие диаграммы деформирования. Расчеты показывают, что пластическая деформация концентрируется вблизи заделки.

На фиг. 8 построены амплитудно-частотные характеристики упругопластического стержня (огнивающие осциллограмм напряжений $\sigma_n^{\sim+} =$

2. Вынужденные неустойчивые колебания упругопластического стержня. К левому торцу стержня из предыдущего примера приложена квазигармоническая сила

$$\sigma_1^{\sim}(t) = p_0 \sin [2\pi(f_0 + 0,5\nu t)t] \quad (3.3)$$

с медленно меняющейся мгновенной частотой возбуждения

$$f(t) = [(f_0 + 0,5\nu t)t]^{\sim} = f_0 + \nu t \quad (3.4)$$

где f_0 — начальная частота процесса, ν — скорость изменения частоты возбуждения.

$=\sigma_n^+/\sigma_T$ при прохождении системы через резонансную частоту $f \sim 1$ со скоростью $v \sim v/f_1^2 = 5 \cdot 10^{-3}$ при разных отношениях амплитуды возбуждения к пределу текучести $p_0 \sim p_0/\sigma_T$. При малых значениях $p_0 < 1/Q$, где $Q = \sigma_{\max}/p_0$ — коэффициент усиления при $\sigma_T = 0$, зависящий от v (в данном примере $Q \approx 60$), прохождение через резонанс осуществляется при упругих деформациях; при $p_0 > 1/Q$ пластические деформации «срезают» резонансный пик, а при $p_0 \sim 1$ динамическое усиление вообще отсутствует.

Применение изложенного метода к решению ряда задач на соударения деформируемых стержней при внешнем вязком и сухом трении рассмотрено в [16]³.

Автор признателен Г. В. Мельниковой, М. М. Стратоновой и О. Б. Шорр, выполнившим примеры расчетов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Эйбрамсон Х. Н., Пласс Х. Дж., Риппергер Э. А. Распространение волн напряжений в стержнях и балках. — В кн.: Проблемы механики. М.: Изд-во иностр. лит., 1961, с. 24–90.
2. Рахматуллин Х. А. Обзор работ по распространению упругопластических волн. — В кн.: Прочность и пластичность. М.: Наука, 1971, с. 307–316.
3. Степанов Г. В. Поведение конструкционных материалов в упругопластических волнах нагрузки. Киев: Наук. думка, 1978. 111 с.
4. Гоффельд Д. А., Кононов К. М., Садаков О. С., Черняховский О. Ф. Проблемы прочности термонапряженных конструкций. — В кн.: Итоги науки и техники. Механика деформируемого тела. Т. 12. М.: ВИНТИ, 1978, с. 91–194.
5. Кадашевич Ю. И., Новожилков В. В. Теория пластичности и ползучести металлов, учитывающая микронапряжения. — Изв. АН СССР. МТТ, 1981, № 5, с. 99–110.
6. Шорр Б. Ф. Прямое математическое моделирование процесса распространения механических возмущений в твердых деформируемых телах. — Тр. Куйбышевск. авиац. ин-та, 1976, вып. 78, с. 70–75.
7. Мельникова Г. В., Стратонова М. М., Шорр Б. Ф. Численное решение одномерных нелинейных задач механики сплошной среды методом прямого математического моделирования. — В кн.: Вопросы вычислительной и прикладной математики. Вып. 60. Ташкент: Изд-е Ин-та кибернетики АН УзССР, 1980, с. 46–53.
8. Соколовский В. В. Распространение упруговязкопластических волн в стержнях. — ПММ, 1948, т. 12, вып. 3, с. 261–280.
9. Swan W. D. On a class of models for the yielding behavior of continuous and composite systems. — Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech., 1967, v. 34, p. 612–617. — Рус. перев.: Прикл. механ. Тр. Америк. о-ва инж.-механ. Сер. E, 1967, т. 34, № 3, с. 156–163.
10. Ишлинский А. Ю. Продольные колебания стержня при наличии линейного закона последствия и релаксации. — ПММ, 1940, т. 4, вып. 1, с. 79–92.
11. Ишлинский А. Ю. Общая теория пластичности с линейным упрочнением. — Укр. матем. ж., 1954, т. 6, № 3, с. 314–325.
12. Термопрочность деталей машин. М.: Машиностроение, 1975. 455 с.
13. Шорр Б. Ф. Теория знакопеременного неизотермического упругопластического деформирования. — Физика и механика деформации и разрушения: Сб. статей. М.: Атомиздат, 1979, вып. 7, с. 115–133.
14. Lee E. H., Kanter J. Wave propagation in finite rods of viscoelastic material. — J. Appl. Phys., 1953, v. 24, No. 9, p. 1115–1122.
15. Кукуджанов В. Н. Распространение упругопластических волн в стержне с учетом влияния скорости деформации. М.: ВЦ АН СССР, 1967. 47 с.
16. Шорр Б. Ф., Мельникова Г. В. Приложение метода математического моделирования процесса распространения механических возмущений к анализу нелинейных колебаний лопаток с соударениями. — Пробл. прочности, 1976, № 3, с. 108–113.

Москва

Поступила в редакцию
4.III.1983

³ См. также: Мельникова Г. В., Шорр Б. Ф. Исследование динамики систем с демпфируемыми элементами сухого трения методом математического моделирования процесса распространения возмущений. — В кн.: V Всес. съезд по теор. и прикл. механике. Алма-Ата: Наука, 1981, с. 253.