

УДК 531.53

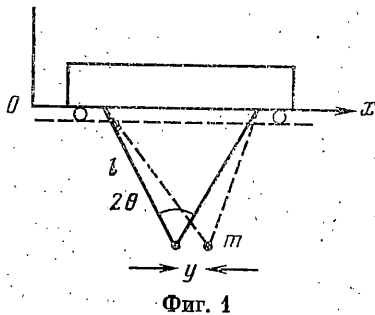
## УПРАВЛЕНИЕ КОЛЕБАНИЯМИ МАЯТНИКОВОЙ СИСТЕМЫ С БИФИЛЯРНЫМ ПОДВЕСОМ

НГУЕН ЧЫОНГ

Рассматривается механическая система маятникового типа, представляющая собой материальную точку, связанную посредством бифилярного подвеса с тележкой, которая перемещается вдоль горизонтальной прямой. Система управляется изменением скорости тележки в заданных пределах.

Строится релейное управление с тремя участками постоянства скорости, обеспечивающее перемещение маятника на заданное расстояние с гашением колебаний. Решена задача о переводе системы из состояния покоя в состояние поступательного движения с фиксированной скоростью. Задачи, решаемые в публикуемой статье, по постановке близки к рассмотренным в [1, 2]. Полученные результаты представляют интерес в связи с исследованием оптимальных режимов работы перегрузочных механизмов, перемещающих колеблющийся груз на бифилярном подвесе.

1. Рассматривается движение маятника в вертикальной плоскости. Груз подвешен на двух одинаковых нерастяжимых нитях, составляющих бифилярный подвес с углом раствора, равным  $2\theta$  (фиг. 1). Точки подвеса прикреплены к тележке, перемещающейся в заданном горизонтальном



направлении. Управление движением тележки осуществляется скоростями, развиваемыми двигателями, обладающими ограниченными скоростями. Обозначим через  $y$  отклонение маятника от положения относительного покоя в горизонтальном направлении, через  $x \geq 0$  — координату середины точек прикрепления нитей подвеса, отсчитанную от начального положения вдоль заданного горизонтального направления  $Ox$ ,  $v$  — скорость тележки, вдоль  $Ox$ ,  $m$  — массу груза,  $l$  — расстояние центра масс груза до точки подвеса. Ограничимся рас-

смотрением малых колебаний, т. е. пренебрежем членами второго порядка малости относительно  $y$ . При этом предположении уравнения движения системы маятник — тележка имеют следующий вид:

$$y'' + x'' \cos^2 \theta + g \sin \theta \cos \theta \operatorname{sign} y + [g/(l \cos \theta)] y, \quad x' = v \quad (1.1)$$

где  $y$  считается положительной, когда груз находится на правой стороне от положения относительного равновесия,  $g$  — ускорение силы тяжести.

На управляющую скорость наложены ограничения ( $v_1, v_2$  — различные положительные постоянные величины):

$$-v_2 \leq v(t) \leq v_1 \quad (1.2)$$

Ставятся следующие задачи управления.

*Задача перемещения.* Требуется найти управление  $v(t)$ , удовлетворяющее ограничениям (1.2) и перемещающее систему (1.1) из состояния по-

коя на заданное расстояние  $a$  с гашением колебаний

$$x(0) = y(0) = y'(0) = v(0) = 0 \quad (1.3)$$

$$y(T) = y'(T) = v(T) = 0, \quad x(T) = a \quad (1.4)$$

*Задача разгона.* Требуется найти управление  $v(t)$ , удовлетворяющее ограничениям (1.2) и перемещающее систему (1.1) из состояния покоя (1.3) в состояние поступательного движения со скоростью  $c \in [0, v_1]$  с гашением колебаний, при этом значение  $x(T)$  не фиксируется

$$y(T) = y'(T) = 0, \quad v(T) = c \quad (1.5)$$

Введем безразмерные переменные  $t', x', y', v'$  и параметры  $k, a', c', v_0$  по формулам

$$t' = (g/l \cos \theta)^{1/2} t, \quad v' = v/v_1.$$

$$x' = [\sqrt{g/l} (v_1 \cos^2 \theta \sqrt{l \cos \theta})] x, \quad y' = [\sqrt{g/l} (v_1 \cos^2 \theta \sqrt{l \cos \theta})] y$$

$$c' = c/v_1, \quad k = (g/l \cos \theta)^{1/2} \sin \theta v_1, \quad \gamma = v_2/v_1 \quad (1.6)$$

$$a' = (g/l \cos \theta)^{1/2} a/v_1 \cos^2 \theta, \quad v_0 = 1/\cos^2 \theta$$

В величинах (1.6) соотношения (1.1)–(1.5) примут следующий вид (здесь и далее штрихи для удобства записи опущены):

$$y'' + v' + k \operatorname{sign} y + y = 0, \quad x' = v_0 v \quad (1.7)$$

$$-\gamma \leq v(t) \leq 1 \quad (1.8)$$

$$x(0) = y(0) = y'(0) = v(0) = 0, \quad (1.9)$$

$$y(T) = y'(T) = v(T) = 0, \quad x(T) = a$$

$$y(T) = y'(T) = 0, \quad v(T) = c \quad (1.10)$$

2. Рассмотрим решение задачи перемещения. При введении новой переменной  $z = y + v$  уравнения (1.7) и краевые условия (1.9) примут вид

$$y' = z - v, \quad z' = -y - k \operatorname{sign} y, \quad x' = v_0 v \quad (2.1)$$

$$x(0) = y(0) = z(0) = v(0) = 0, \quad (2.2)$$

$$y(T) = z(T) = v(T) = 0, \quad x(T) = a$$

При  $\theta = 0$  маятник с бифилярным подвесом превратится в математический маятник и рассматриваемая задача сведется к рассмотренной в [1, 2], где показано, что управление скоростями оптимально по быстродействию только при нечетном количестве интервалов постоянства управления и следует релейному принципу по Понтрягину [3]. При  $\theta \neq 0$  будем строить режим управления с нечетным количеством интервалов постоянства управления, равным трем — это минимально возможное число, при котором краевые условия удовлетворяются. Будем искать управление в задаче перемещения в виде

$$v(t) = 1 \quad \text{при } 0 < t < t_1$$

$$v(t) = -\gamma \quad \text{при } t_1 < t < t_2$$

$$v(t) = 1 \quad \text{при } t_2 < t < T \quad (2.3)$$

где  $t_1, t_2$  — моменты переключения,  $T$  — время перемещения. Заметим, что в точках  $t = \tau$ , изменения знака  $\operatorname{sign} y$  скорость груза претерпевает скачкообразное изменение, так что груз подвергается в этот момент воздействию типа импульса величины  $S$ . Согласно механической теории удара, уравнения теоремы импульсов в проекциях на главную нормаль траектории

груза непосредственно после  $t=\tau$ , при пренебрежении импульсом силы тяжести дают нормальную составляющую импульса

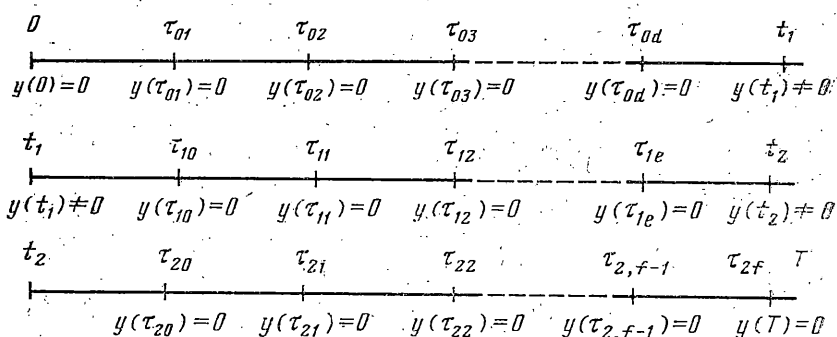
$$S_n = mV^- \sin 2\theta \quad (2.4)$$

(где  $V^-$  — реальная скорость груза непосредственно до  $\tau$ , остальные величины в (2.4) — в реальной размерности), а в проекции на касательную

$$y^*(\tau_i^+) = y^*(\tau_i^-) \cos 2\theta \quad (2.5)$$

где величины — безразмерные по (1.6). Здесь и далее индексы «плюс» и «минус» означают непосредственно «до» и «после» воздействия соответственно.

Составляющая  $S_n$  (2.4) может вызывать свободные колебания груза вдоль направления нити, натянутой непосредственно после  $\tau$ . Нити при-



Фиг. 2

нимаются абсолютно неупругими, так что  $S_n$  мгновенно погашена и не влияет на последующее движение груза. Соотношение (2.5) указывает на то, что скорость груза относительно тележки уменьшается каждый раз при переходе через нулевые значения  $y$ .

В пределах постоянства управления, где  $u = \text{sign } y$ , система (2.1) дает

$$y'' + y = -ku \quad (2.6)$$

и в пределах постоянства  $\text{sign } y$  имеем  $z'' + z = v$ .

Проинтегрируем систему (2.6) при краевых условиях (2.2) и учете (2.3) в пределах постоянства  $v$  и  $u$  и состыкуем решения в точках изменения знака  $u$  и в точках  $t_1, t_2$ .

Обозначим через  $\tau_{ij}$  момент перехода через нулевые значения  $y$ , причем первый индекс  $i$  ( $i=0, 1, 2$ ) указывает, с начала какого из трех интервалов в (2.3) ведется счет времени, а именно:  $i=0$  — с момента  $t=0$ ;  $i=1$  — с момента  $t=t_1$ ;  $i=2$  — с момента  $t=t_2$ ; второй индекс  $j$  ( $j=0, 1, 2, \dots$ ) — порядковый номер цикла колебания, отсчитанный с начала одного из трех интервалов в (2.3). Один цикл колебания здесь будем понимать как один ход колебания при постоянном  $u$  между двумя смежными нулевыми значениями  $y$ . Например,  $\tau_{01}$  — это момент, когда  $y$  в первый раз обращается в нуль после  $t=0$ , а  $\tau_{10}$  — момент обращения  $y$  в нуль первый раз после  $t=t_1$ ;  $\tau_{11}$  — момент окончания первого цикла колебания от  $y(\tau_{10})=0$  до  $y(\tau_{11})=0$ . Приведенные примеры и смысл обозначения схематически показаны на фиг. 2.

Выполнив упомянутое интегрирование, учитывая (2.5) и  $\tau_{ij}$ , получим

$$\tau_{10} - t_1 = \arccos \left\{ \frac{[y(t_1) + ku]ku + y^*(\tau_{10}^-)}{[y(t_1) + ku]^2 + y^2(t_1^+)} \right\}$$

$$\begin{aligned}
\tau_{1j} - \tau_{10} &= \sum_{i=1}^j \arccos \left\{ \frac{k^2 - [y^*(\tau_{10}^-) \cos^i 2\theta]^2}{k^2 + [y^*(\tau_{10}^-) \cos^i 2\theta]^2} \right\} \\
\tau_{0j} &= \sum_{i=1}^j \arccos \left[ \frac{k^2 - \cos^{2(i-1)} 2\theta}{k^2 + \cos^{2(i-1)} 2\theta} \right] \\
t_1 - \tau_{0d} &= \arccos \left\{ \frac{[y(t_1) + ku]ku + y^*(t_1^-)y^*(\tau_{0d}^+)}{k^2 + y^{*2}(\tau_{0d}^+)} \right\} \\
t_2 - \tau_{1e} &= \arccos \left\{ \frac{[ku + y(t_2)]ku + y^*(t_2^-)y^*(\tau_{1e}^+)}{k^2 + y^{*2}(\tau_{1e}^+)} \right\} \\
\tau_{20} - t_2 &= \arccos \left\{ \frac{[ku + y(t_2)]ku + y^*(\tau_{20}^-)y^*(t_2^+)}{k^2 + [y^*(\tau_{20}^-) \cos^i 2\theta]^2} \right\} \\
\tau_{2j} - \tau_{20} &= \sum_{i=1}^j \arccos \left\{ \frac{k^2 - [y^*(\tau_{20}^-) \cos^i 2\theta]^2}{k^2 + [y^*(\tau_{20}^-) \cos^i 2\theta]^2} \right\}
\end{aligned} \tag{2.7}$$

где индекс  $d$  в  $\tau_{0d}$  — количество циклов колебаний, совершенных грузом вплоть до наступления  $t_1$ ; индекс  $e$  в  $\tau_{1e}$  — количество совершенных циклов колебаний от момента  $\tau_{10}$  вплоть до наступления  $t_2$  (фиг. 2); если верхний индекс суммирования равен нулю, то соответствующая сумма полагается равной нулю.

Для удовлетворения граничным условиям (2.2) должно быть

$$y(T) = z(T) = 0, \quad \tau_{2f} = T \tag{2.8}$$

где индекс  $f$  — количество циклов колебаний от  $\tau_{20}$  до момента окончания перемещения  $T = \tau_{2f}$  (фиг. 2).

Используя теорему импульсов, имеем

$$\begin{aligned}
y^*(0^+) &= -1, \quad y^*(t_1^+) = y^*(t_1^-) + (1 + \gamma) \\
y^*(t_2^+) &= y^*(t_2^-) - (1 + \gamma), \quad y^*(T^-) = -1
\end{aligned} \tag{2.9}$$

Поскольку внутри каждого интервала постоянства скорости маятник колеблется в инерциальной системе отсчета, то, учитывая (2.5), (2.9), имеем

$$\begin{aligned}
y^*(\tau_{20}^-) &= (-1)^{f+1} \cos^{-f} 2\theta, \quad y^*(\tau_{0d}^+) = (-1)^{d+1} \cos^d 2\theta \\
y^*(\tau_{1e}^+) &= (-1)^e y^*(\tau_{10}^-) \cos^{e+1} 2\theta
\end{aligned} \tag{2.10}$$

Введем обозначения

$$\begin{aligned}
X_1 &= k + uy(t_1), \quad X_2 = k + uy(t_2) \\
Y_1 &= y^*(t_1^-), \quad Y_2 = y^*(t_2^-), \quad W_1 = y^*(\tau_{10}^-) \\
W_2 &= y^*(\tau_{1e}^+) = (-1)^e W_1 \cos^{e+1} 2\theta
\end{aligned} \tag{2.11}$$

Используя соотношения (2.7) — (2.11), после подстановки их в (2.7) и выполнения вычисления имеем

$$t_1 = \arccos \left( \frac{kX_1 + (-1)^{d+1} Y_1 \cos^d 2\theta}{k^2 + \cos^{2d} 2\theta} \right) + \sum_{i=1}^d \arccos \left( \frac{k^2 - \cos^{2(i-1)} 2\theta}{k^2 + \cos^{2(i-1)} 2\theta} \right) \tag{2.12}$$

$$t_2 - t_1 = \arccos\left(\frac{kX_2 + Y_2 W_2}{k^2 + W_2^2}\right) + \sum_{i=1}^f \arccos\left(\frac{k^2 - W_1^2 \cos^{2i} 2\theta}{k^2 + W_1^2 \cos^{2i} 2\theta}\right) + \arccos\left\{\frac{kX_1 + W_1(Y_1 + (1+\gamma))}{X_1^2 + [Y_1 + (1+\gamma)]^2}\right\} \quad (2.13)$$

$$\tau_{2f} - \tau_{20} = T - \tau_{20} = \sum_{i=1}^f \left(\frac{k^2 - \cos^{2(i-f)} 2\theta}{k^2 + \cos^{2(i-f)} 2\theta}\right) \quad (2.14)$$

$$Y_1 = 1/2[W_1^2 - \cos^{2d} 2\theta - (1+\gamma)^2](1+\gamma)^{-1} \\ Y_2 = 1/2[W_2^2 - \cos^{-2f} 2\theta + (1+\gamma)^2](1+\gamma)^{-1} \\ X_1 = (k^2 + \cos^{2d} 2\theta - Y_1^2)^{1/2}, \quad X_2 = (k^2 + W_2^2 - Y_2^2)^{1/2} \quad (2.15)$$

Третье уравнение (2.1) при учете (2.2), (1.6) дает

$$T = a_1 + (1+\gamma)(t_2 - t_1), \quad a_1 = a/v_0 \quad (2.16)$$

Учитывая очевидное соотношение  $T = (T - \tau_{20}) + (\tau_{20} - t_2) + (t_2 - t_1) + t_1$  и (2.8), (2.16), имеем

$$a_1 = \sum_{i=1}^f \arccos\left[\frac{k^2 - \cos^{2(i-f)} 2\theta}{k^2 + \cos^{2(i-f)} 2\theta}\right] + \arccos\left\{\frac{kX_2 + (-1)^{f+1} \cos^{-f} 2\theta [Y_2 - (1+\gamma)]}{X_2^2 + [Y_2 - (1+\gamma)]^2}\right\} - \gamma(t_2 - t_1) + \arccos\left[\frac{kX_1 + (-1)^{d+1} Y_1 \cos^d 2\theta}{k^2 + \cos^{2d} 2\theta}\right] + \sum_{i=1}^d \arccos\left[\frac{k^2 - \cos^{2(i-1)} 2\theta}{k^2 + \cos^{2(i-1)} 2\theta}\right] = T_1(W_1, d, e, f) \quad (2.17)$$

где соответствующая сумма полагается равной нулю, если верхний индекс суммирования равен нулю; через  $T_1(\dots)$  обозначена правая часть (2.17). Соотношение (2.17) показывает, что путь  $a_1$  является функцией  $W_1$ , а также параметров  $d, e, f$ .

Если  $d, e, f$  выбраны, можно получить  $W_1$  через  $a_1$  из (2.17), а следовательно, после подстановки  $W_1$  в (2.12), (2.13), (2.16) получить  $t_1, t_2, T$ . Значения  $d, e, f$  зависят от конкретно выбранного характера интервала между переключениями.

3. Проведем анализ решения задачи перемещения. Для случая  $\theta=0$  в [2] была определена оптимальность по быстродействию при  $t_1 = T - t_2$ . При  $\theta \neq 0$  сохраним этот характер между интервалами, т. е. положим  $d=f$ , что означает равенство чисел циклов колебаний в интервалах  $(0, t_1)$  и  $(t_2, T)$  и влечет за собой  $e=0, 2, 4, \dots$  — четное число, так как при данном характере циклов  $W_1, W_2$  в (2.11) имеют одинаковые знаки. Рассматривая решения системы (2.6) в интервалах  $(\tau_{1e}, t_2), (t_2, \tau_{20})$  и учитывая (2.10), находим минимально возможное значение  $W_2$ , равное

$$\inf |W_2| = |y^*(\tau_{20}^-)| - (1+\gamma) \quad (3.1)$$

Аналогично из рассмотрения интервалов  $(\tau_{0d}, t_1), (t_1, \tau_{10})$  имеем

$$\inf |W_1| = |y^*(\tau_{0d}^+)| + (1+\gamma) \quad (3.2)$$

Подставляя (3.1), (3.2) в последнее соотношение (2.11), при учете (2.10) имеем

$$[\cos^d 2\theta + (1+\gamma)] \cos^{e+1} 2\theta = \cos^{-f} 2\theta - (1+\gamma) \quad (3.3)$$

При  $f=d$  соотношение (3.3) дает максимально возможное значение  $d=f$  при определенном значении  $e$ , которое выбирается так, чтобы движение со скоростью  $v=-\gamma$  происходило за минимально возможное число циклов колебаний, т. е. следует положить  $e=0$ . Из (3.3) получим максимально возможное число циклов  $d_M$  при  $e=0$ :

$$d_M = E \left\{ \frac{\log^{1/2} [\sqrt{(1+A)^2(1+\gamma)^2 + 4A(1+\gamma)} + (1+A)(1+\gamma)]}{-\log A} \right\} \quad (3.4)$$

где  $E\{\cdot\}$  — целая часть аргумента,  $A = \cos 2\theta$ .

Для существования  $d_M$  должно удовлетворяться условие

$$\cos 2\theta \geq -\gamma / (2+\gamma) \quad (3.5)$$

которое в наиболее интересных случаях ( $\gamma=1$  и  $\gamma=0$ ) всегда выполняется на практике. Максимальное значение пути  $a_1$ , для которого можно пользоваться режимом движения  $d=f$ ,  $e=0$  при учете (2.7), (2.10), равно ( $d_M$  определено в (3.4)):

$$a_{1 \max}^{(1)} \leq \tau_{0d_M} + (\tau_{2d_M} - \tau_{20}) \quad (3.6)$$

$$a_{1 \max}^{(1)} \leq \sum_{i=1}^{d_M} \arccos \left[ \frac{k^2 - \cos^{2(i-1)} 2\theta}{k^2 + \cos^{2(i-1)} 2\theta} \right] + \sum_{i=1}^{d_M} \arccos \left[ \frac{k^2 - \cos^{2(i-d_M)} 2\theta}{k^2 + \cos^{2(i-d_M)} 2\theta} \right]$$

Если  $a_1 > a_{1 \max}$ , то нельзя гасить колебания в конце перемещения при режиме движения  $f=d$ ,  $e=0$ . В этом случае нужно воспользоваться режимом другого характера, который будем искать с минимальным  $f$  и, как раньше, при  $e=0$ . Для этого режима можно показать одинаковость четности  $d$  и  $f$ , поэтому следует различать два случая:  $f=0$  и  $f=1$ .

При  $f=0$  обе величины  $W_1$ ,  $W_2$  — положительные. Для удовлетворения краевым условиям на конце пути  $W_2$ ,  $W_1$  должны иметь, как минимум, следующие значения:

$$\inf W_2 = \gamma, \quad \inf W_1 = (1+\gamma) - |y^*(\tau_{0d}^+)| \quad (3.7)$$

Подставляя (3.7) в последнее соотношение (2.11), при учете (2.10) имеем выражение  $[(1+\gamma) - \cos^d 2\theta] \cos 2\theta = \gamma$ , решив которое, получим

$$d_M^{(0)} = E \left[ \frac{\log \{A[(1+\gamma)A - \gamma]^{-1}\}}{-\log A} \right], \quad A = \cos 2\theta \quad (3.8)$$

$$\cos 2\theta > \gamma / (1+\gamma)$$

При  $f=1$  величины  $W_1$ ,  $W_2$  — отрицательные и  $\inf |W_1| = (1+\gamma) - |y^*(\tau_{0d}^+)|$ ,  $\inf |W_2| = |y^*(\tau_{20}^-)| - (1+\gamma)$ .

Поступая аналогично случаю  $f=0$ , имеем

$$d_M^{(1)} = E \left[ \frac{\log \{A^2 [A(1+\gamma)(1+A) - 1]^{-1}\}}{-\log A} \right], \quad A = \cos 2\theta \quad (3.9)$$

$$2[\sqrt{(1+\gamma)^2 + 4(1+\gamma)} + (1+\gamma)]^{-1} < \cos 2\theta < 2[\sqrt{(1+\gamma)^2 + 4\gamma + (1+\gamma)}]^{-1} \quad (3.10)$$

Для диапазона угла  $2\theta$ , часто встречаемого на практике, из двух значений  $\gamma=0, 1$  последние неравенства выполняются только при значении  $\gamma=0$ , что представляет интерес для практики.

Максимальная дальность перемещения в режиме движения при минимальном  $f$  будет  $(d_M^{(r)} = d_M^{(0)}$  и  $d_M^{(1)}$  определены в (3.8), (3.9)):

$$a_1^{(2)} \max \leq \sum_{i=1}^{d_M^{(r)}} \arccos \left[ \frac{k^2 - \cos^2(i-1) 2\theta}{k^2 + \cos^2(i-1) 2\theta} \right] \quad (3.11)$$

Итак, искомое решение задачи перемещения с гашением колебаний в конце пути полностью построено и определяется следующим образом. При заданных значениях  $\theta, \gamma$  определяются  $d_M^{(r)}$  из (3.4), (3.8), (3.9). Сравнение заданного пути перемещения  $a_1$  (2.16) с  $a_{1\max}^{(1)}$ ,  $a_{1\max}^{(2)}$  из (3.6), и (3.11) после подстановки в них вычисленных  $d_M^{(r)}$  и определяет характер режима движения.

Значение целого  $d$  определяется сравнением заданного пути перемещения  $a_1$  со спектрами следующих функций при различных  $d=0, 1, 2, \dots$ . Для режима  $d=f, e=0$ :

$$T_2(d) = \tau_{0d} + (T - \tau_{20}) = \sum_{i=1}^d \arccos \left[ \frac{k^2 - \cos^2(i-1) 2\theta}{k^2 + \cos^2(i-1) 2\theta} \right] + \\ + \sum_{i=1}^d \arccos \left[ \frac{k^2 - \cos^2(i-d) 2\theta}{k^2 + \cos^2(i-d) 2\theta} \right] \quad (3.12)$$

Для режима с минимальным  $f$  и  $e=0$ :

$$T_3(d) = \tau_{0d} = \sum_{i=1}^d \arccos \left[ \frac{k^2 - \cos^2(i-1) 2\theta}{k^2 + \cos^2(i-1) 2\theta} \right] \quad (3.13)$$

Если значения  $a_1$  находятся внутри интервала вида  $T_m(d_1) < a_1 \leq T_m(d_1 + 1)$  ( $m=2$  или  $3$ ), то следует брать  $d=d_1$ .

Для режима  $d=f, e=0$ , зная значение  $d=d_1$ , можем определить  $W_1$  из (2.17), а следовательно,  $t_1, t_2$  из (2.12), (2.13) и  $T$  — из (2.16) через (2.15). При определении  $W_1$  следует иметь в виду, что если  $d=f$  — четно, то  $W_1 > 0, Y_1 < 0, Y_1 + (1+\gamma) > 0, Y_2 > 0, Y_2 - (1+\gamma) < 0$ . Эти неравенства при учете (2.15) дают

$$\cos^{-2} 2\theta [\cos^{-2d} 2\theta - (1+\gamma)^2] < W_1^2 < \cos^{2d} 2\theta + (1+\gamma)^2 \quad (3.14)$$

Если  $d=f$  нечетно, имеем

$$W_1 < 0, Y_1 > 0, Y_2 > 0, Y_2 - (1+\gamma) > 0, \\ W_1^2 > \cos^{-2} 2\theta [\cos^{-2d} 2\theta + (1+\gamma)^2] \quad (3.15)$$

В режиме с минимальным  $f$  и  $e=0$  следует брать  $f=0$ , если  $d$  четно, и  $f=1$ , если  $d$  нечетно. В последнем случае можно гасить колебания в конце пути при помощи  $\gamma=0$ . При известных  $d, f$  и  $e=0$  значения  $t_1, t_2, T$  определяются аналогично случаю  $d=f$ .

4. Оптимальность управления по быстродействию в задаче разгона из состояния покоя для случая  $\theta=0$  определена в [2] в виде двух участков постоянства скорости. Для случая  $\theta \neq 0$ , т. е. для маятника с бифилярным подвесом, также строим управления с двумя участками постоянства,

а именно

$$v(t) = 1 \text{ при } 0 < t < t_1 \text{ и } t \geq T \quad (4.1)$$

$$v(t) = -\gamma \text{ при } t_1 < t < T$$

Так как в момент  $t=0^+$   $u=-1$ , из соображения быстродействия будем искать момент переключения в первом же цикле колебания, т. е. в области  $u=-1$ . Решения системы (2.6) при  $u=-1$  в интервалах  $(0, t_1)$  и  $(t_1, T)$  дают соответственно

$$t_1 = \arccos[(kX_1 - Y_1)/(k^2 + 1)] \quad (4.2)$$

$$T - t_1 = \arccos \left\{ \frac{kX_1 + (\gamma + c)[Y_1 + (1 + \gamma)]}{X_1^2 + [Y_1 + (1 + \gamma)]^2} \right\}$$

где, как и в (2.11),  $X_1 = k + uy(t_1) = k - y(t_1) > 0$ ,  $Y_1 = y'(t_1^-)$ .

Возводя в квадрат решения системы (2.6) в интервалах  $(0, t_1)$ ,  $(t_1, T)$  и вычитая один результат из другого, получим

$$Y_1 = \frac{(\gamma + c)^2 - 1 - (1 + \gamma)^2}{2(1 + \gamma)}, \quad X_1 = \sqrt{1 + k^2 - Y_1^2} \quad (4.3)$$

Подстановка (4.3) в (4.2) и дает решение поставленной задачи.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Черноусько Ф. Л. Оптимальное перемещение маятника. — ПММ, 1975, т. 39, вып. 5, с. 808–816.
2. Черноусько Ф. Л., Акуленко Л. Д., Соколов Б. Н. Управление колебаниями. М.: Наука, 1980. 383 с.
3. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1969. 384 с.

Ханой

Поступила в редакцию  
18.I.1982