МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 4 · 1984

УДК 539.374

О РАСТУЩЕМ ГРАВИТИРУЮЩЕМ ВЯЗКОУПРУГОМ ШАРЕ ПРИ КОНЕЧНЫХ ДЕФОРМАЦИЯХ

АРУТЮНЯН Н. Х., ДРОЗДОВ А. Д.

Получены основные уравнения, описывающие напряженно-деформированное состояние в растущем гравитирующем шаре из стареющего вязкоупругого материала при конечных деформациях. Решены задачи о наращивании сплошного и полого шара из несжимаемого материала при центрально-симметричной деформации. Сформулированы условия устойчивости гравитирующего шара из сжимаемого и несжимаемого материалов. Определение устойчивости вязкоупругого тела на бесконечном интервале времени соответствует классическому определению устойчивости динамической системы по Ляпунову.

1. Постановка задачи и основные уравнения. Пусть до деформации тело K_0 находится в натуральном состоянии [1] и занимает область Ω_0 с кусочно-гладкой границей $\partial\Omega_0$. В момент времени $t=0$ к телу прикладываются поверхностные и объемные усилия, и начинается процесс наращивания. Он заключается в том, что за время dt на часть границы тела накладывается пленка, толщина которой пропорциональна dt и мгновенно сращивается с телом. Наращивание продолжается до момента времени $t=T$. Процесс непрерывного наращивания можно рассматривать как предел процесса дискретного наращивания, который заключается в следующем. Имеется основное тело K_0 и набор тел $K_1, K_2, \ldots, K_N$. Фиксируем моменты времени $0=t_0<t_1<\ldots<t_N=T$. При дискретном наращивании в момент времени t_i к телу $K_0 \cup K_1 \cup \ldots \cup K_{i-1}$ присоединяется тело K_i. До деформации тело K_i находится в натуральном состоянии и занимает область Ω_i^0.

Введем понятие начального состояния тела K_i. Положим $D_0=\Omega_0$. Обозначим через γ_0 часть границы области D_0, на которой определен процесс наращивания. Под начальным состоянием тела K_1 понимается такое состояние, из которого оно может быть наложено на γ_0 без деформации как жесткое целое с сохранением сплошности вдоль γ_0. Область, занятую телом K_1, находящимся в начальном состоянии и наложенным на γ_0, обозначим через Ω_1. Положим $D_1=\Omega_0\cup\Omega_1$. Часть границы области D_1, на которой определен процесс наращивания, обозначим через γ_1. Под начальным состоянием тела K_2 понимается такое состояние, из которого оно может быть наложено на γ_1 без деформации как жесткое целое с сохранением сплошности вдоль γ_1. Аналогично определяется начальное состояние для любого тела K_i. Таким образом, если все тела K_i находятся в начальном состоянии и деформации отсутствуют, то геометрически процесс дискретного наращивания можно описать как процесс присоединения в момент времени t_i к области D_{i-1} новой области Ω_i.

Построение теории наращивания вязкоупругих тел основано на введении трех состояний элементов тела: естественного, начального и актуального. Отметим, что в выборе начального состояния имеется определенный произвол. Если задан технологический процесс наращивания данного объекта или сооружения, то начальное состояние отражает фактическую картину этого процесса (план наращивания). Если же технологический процесс наращивания не задан, то начальное состояние может быть выбрано исходя из условий изготовления тела или из конструктивных и других соображений.

Введем в области D_N систему координат $\xi_1\xi_2\xi_3$. Координаты $\xi=(\xi_j)$ примем за лагранжевы координаты точек основного тела K_0 и наращиваемых элементов K_i $(i=1,\ldots,N)$. Обозначим через $r_0(\xi)$, $r^\circ(\xi)$ радиусы-векторы точки ξ в начальном и натуральном состояниях. Через $g_{0i}=r_{0,i}$, $g_i^\circ=r_{,i}^\circ$ обозначим базисные векторы лагранжевой системы координат в этих состояниях (индекс после запятой означает производную по соответствующей лагранжевой координате), через g_0^i, $g^{\circ i}$ — векторы взаимного базиса, $g_0^i\cdot g_{0j}=\delta_j^i$, $g^{\circ i}\cdot g_j^\circ=\delta_j^i$ (δ_j^i — символы Кронекера), а через g_{0ij}, g_0^{ij}, g_{ij}°, $g^{\circ ij}$ — метрические тензоры в начальном и натуральном состояниях: $g_{0ij}=g_{0i}\cdot g_{0j}$, $g_0^{ij}=g_0^i\cdot g_0^j$, $g_{ij}^\circ=g_i^\circ\cdot g_j^\circ$, $g^{\circ ij}=g^{\circ i}\cdot g^{\circ j}$.

Переходя к пределу при $N\to\infty$, получим лагранжеву систему координат в наращиваемом теле, а также базисные векторы и метрические тензоры в начальном и актуальном состоянии при непрерывном наращивании.

В момент времени $t\geqslant 0$ наращиваемое тело $K(t)$ занимает в начальном состоянии область $D_0(t)$, а в актуальном состоянии — область $D(t)$. За время dt к нему присоединяется элемент $dK(t)$. Этот элемент занимает в натуральном состоянии область $dD^\circ(t)$, а в начальном состоянии — область $dD_0(t)$. В момент времени t наращиваемый элемент $dK(t)$ мгновенно переводится из натурального состояния в начальное, затем из начального в актуальное и сращивается с телом $K(t)$.

Обозначим через $V(t)$ скорость наращивания тела по нормали к границе. Величина V определяется в начальном состоянии. Через $\varkappa(\xi)$ обозначим момент присоединения к телу $K(t)$ элемента в окрестности точки ξ. Радиус-вектор точки ξ в актуальном состоянии обозначим через $r(t,\xi)$. Введем базисные векторы основного и взаимного базисов g_i, g^i, а также метрические тензоры g_{ij}, g^{ij} в актуальном состоянии по формулам $g_i=r_{,i}$, $g^i\cdot g_j=\delta_j^i$, $g_{ij}=g_i\cdot g_j$, $g^{ij}=g^i\cdot g^j$.

Обозначим через $u(t,\xi)=r-r_0=u^ig_i=u_ig^i$ вектор перемещений точки ξ при переходе из начального состояния в актуальное, а через $\varepsilon_{ij}=(g_{ij}-g_{0ij})/2$ — компоненты тензора деформаций Альманзи

$$2\varepsilon_{ij}=\nabla_iu_j+\nabla_ju_i-\nabla_iu^k\nabla_ju_k \tag{1.1}$$

Здесь ∇_i — оператор ковариантного дифференцирования в базисе актуального состояния по аргументу ξ_i; по повторяющимся индексам производится суммирование.

Условие несжимаемости материала имеет вид

$$g=g^\circ=g_0,\quad g=\det|g_{ij}|,\quad g^\circ=\det|g_{ij}^\circ|,\quad g_0=\det|g_{0ij}| \tag{1.2}$$

Через σ^{ij} обозначим компоненты тензора напряжений Коши, измеряемых на единицу площади поверхности деформированного тела в базисе актуального состояния. Пусть внешняя нагрузка прикладывается достаточно медленно, так что силами инерции можно пренебречь. Тогда уравнения равновесия элемента тела запишем в следующей форме:

$$\nabla_i\sigma^{ij}+F^j=0 \tag{1.3}$$

Здесь $F=F^ig_i$ — вектор массовых сил, действующих на единицу массы в актуальном состоянии.

Уравнение состояния материала тела примем в виде

$$\sigma^{ij}=pg^{ij}+\mu(I-L)(g^{0ij}-J_1g^{ij}/3) \tag{1.4}$$

$$Ih=h(t,\xi),\qquad Lh=\int\limits_{\varkappa(\xi)}^{t}l(t-\varkappa(\xi),\tau-\varkappa(\xi))h(\tau,\xi)d\tau$$

Здесь μ — постоянный коэффициент, p — давление, $J_1=g^{\circ ij}g_{ij}$ — первый инвариант тензора деформаций, I — единичный оператор, L — оператор релаксации, $l(t, \tau)$ — ядро релаксации.

Уравнение (1.4) принято на основании экспериментальных исследований, проводимых над полимерными и резиноподобными материалами [2]. Если вязкостью материала можно пренебречь ($L=0$), уравнение (1.4) описывает материал Трелоара [1].

Пусть на всей границе тела $K(t)$ заданы поверхностные усилия. Тогда граничные условия имеют вид

$$\sigma^{ij}n_i=f^j \tag{1.5}$$

Здесь $f=f^i g_i$ — интенсивность поверхностных усилий, действующих на единицу площади поверхности в актуальном состоянии, $n=n_i g^i$ — вектор единичной внешней нормали к поверхности $\partial D(t)$.

2. Наращивание гравитирующего шара из несжимаемого стареющего вязкоупругого материала. До деформации тело K_0 находится в натуральном состоянии и занимает шаровую область $D_0=\Omega_0$, внешний радиус которой равен b_0. В момент времени $t=0$ на тело начинает действовать создаваемое им гравитационное поле и начинается процесс наращивания. Поверхностные усилия на границе тела отсутствуют. Задача наращивания без учета гравитационных сил решена в [3].

Процесс непрерывного наращивания рассматривается как предел следующего процесса дискретного наращивания. Задан набор наращиваемых элементов $K_1, K_2, \ldots, K_N$. В начальном состоянии тело K_i занимает область Ω_i — полый шар, внутренний радиус которого равен b_{i-1}, а внешний — b_i. В момент времени t_i область Ω_i присоединяется к D_{i-1}.

Введем в области D_N сферические координаты $Or\vartheta\varphi$. Начало координат находится в центре шара Ω_0. Координаты r, ϑ, φ примем за лагранжевы координаты точек основного тела и наращиваемых элементов.

При переходе из натурального состояния в начальное реализуется центрально-симметричная деформация. Тело K_i в натуральном состоянии занимает область Ω_i° — полый шар, внутренний радиус которого b_{i-1}°, а внешний — b_i°. В области Ω_i° также введем сферические координаты $Or^\circ\vartheta^\circ\varphi^\circ$. Начало координат находится в центре шара Ω_i°, причем $\vartheta^\circ=\vartheta$, $\varphi^\circ=\varphi$. Переходя к пределу при $N\to\infty$, получим координаты точек тела $K(t)$ в начальном и натуральном состоянии при непрерывном наращивании.

Считаем, что при переходе из начального состояния в актуальное реализуется центрально-симметричная деформация. В момент времени t тело $K(t)$ занимает в начальном состоянии шаровую область $D_0(t)$, внешний радиус которой $b(t)$. Введем в области $D(t)$ сферические координаты $OR\Theta\Phi$. Начало координат находится в центре шара $D(t)$, причем $\Theta=\vartheta$, $\Phi=\varphi$. Координаты R, Θ, Φ примем за координаты точек тела $K(t)$ в актуальном состоянии.

При центрально-симметричном наращивании $R=R(t, r)$, $r^\circ=\psi(r)$. Ненулевые компоненты метрических тензоров в начальном, актуальном и натуральном состояниях равны

$$g_{011}=1,\quad g_{022}=r^2,\quad g_{033}=(r\sin\vartheta)^2,\quad g_0^{11}=1,\quad g_0^{22}=r^{-2},\quad g_0^{33}=(r\sin\vartheta)^{-2}$$

$$g_{11}=(R')^2,\ g_{22}=R^2,\ g_{33}=(R\sin\vartheta)^2,\ g^{11}=(R')^{-2},\ g^{22}=R^{-2},\ g^{33}=(R\sin\vartheta)^{-2} \tag{2.1}$$

$$g_{11}^\circ=(\psi')^2,\ g_{22}^\circ=\psi^2,\ g_{33}^\circ=(\psi\sin\vartheta)^2,\ g^{\circ 11}=(\psi')^{-2},\ g^{\circ 22}=\psi^{-2},\ g^{\circ 33}=(\psi\sin\vartheta)^{-2}$$

где штрихом обозначена производная по аргументу r.

Согласно (1.2), $g_0=(r^2\sin\vartheta)^2$, $g^\circ=(\psi'\psi^2\sin\vartheta)^2$, $g=(R'R^2\sin\vartheta)^2$ и условие несжимаемости принимает вид

$$R'R^2=r^2,\qquad \psi'\psi^2=r^2 \tag{2.2}$$

Интегрируя равенства (2.2), получим

$$R^3(t,\ r)=r^3+C(t) \tag{2.3}$$

При дискретном наращивании $\psi^3(r)=r^3+H_N(r)$, $H_N(r)=C_j$ $r\in(b_{j-1}, b_j)$, $H_N(r)=0$ $r\in(0,\ b_0)$, где $C(t)$ — подлежащая определению функция времени, C_j — заданные постоянные.

Обозначим через $H(r)$ предел функции $H_N(r)$ при $N\to\infty$. Считаем, что при непрерывном наращивании

$$\psi^3(r)=r^3+H(r) \tag{2.4}$$

где $H(r)$ — известная функция радиуса.

Подставляя выражения (2.1) в (1.4) и учитывая (2.2), найдем ненулевые компоненты тензора напряжений

$$\begin{gathered}\sigma^{11}=r^{-4}[pR^4+\mu\psi^4(I-L)(1-J_1(R/\psi)^4/3)]\\ \sigma^{22}=pR^{-2}+\mu\psi^{-2}(I-L)(1-J_1(\psi/R)^2/3)\\ \sigma^{33}=[pR^{-2}+\mu\psi^{-2}(I-L)(1-J_1(\psi/R)^2/3]\sin^{-2}\vartheta\\ J_1=(\psi/R)^4+2(R/\psi)^2\end{gathered} \tag{2.5}$$

Обозначим через $\sigma_r=\sigma^{11}(R')^2$, $\sigma_\vartheta=\sigma^{22}R^2$, $\sigma_\varphi=\sigma^{33}(R\sin\vartheta)^2$ физические компоненты тензора напряжений. Согласно (2.5)

$$\begin{gathered}\sigma_r=p+\mu(\psi/R)^4(I-L)(1-J_1(\psi/R)^{-4}/3)\\ \sigma_\varphi=\sigma_\vartheta=p+\mu(\psi/R)^{-2}(I-L)(1-J_1(\psi/R)^2/3)\end{gathered} \tag{2.6}$$

Обозначим через e_R, e_Θ, e_Φ единичные векторы сферической системы координат в актуальном состоянии. Гравитационный потенциал шара $K(t)$ в точке с радиус-вектором $P=Re_R$ определяется по формуле

$$W(t,P)=\gamma\rho\int\limits_{D(t)}\frac{dv(P_1)}{|P_1-P|} \tag{2.7}$$

Здесь γ — гравитационная постоянная, ρ — постоянная плотность материала тела, $dv(P)$ — элемент объема области $D(t)$ в точке с радиус-вектором P.

Разлагая величину $|P_1-P|^{-1}$ по присоединенным полиномам Лежандра [4], найдем

$$|P_1-P|^{-1}=R^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{R_1}{R}\right)^{\alpha_n}\Bigg[S_n(\cos\Theta)S_n(\cos\Theta_1)+$$

$$+2\sum_{m=1}^{n}\frac{(n-m)!}{(n+m)!}S_n^m(\cos\Theta)S_n^m(\cos\Theta_1)\cos m(\Phi-\Phi_1)\Bigg] \tag{2.8}$$

$$\alpha_n=-(n+1)\ \text{при}\ R<R_1,\qquad \alpha_n=n\ \text{при}\ R>R_1$$

Обозначим через a внутренний радиус шара $K(t)$ в начальном состоянии, а через $A(t)$ — его внутренний радиус в актуальном состоянии. Подставляя выражение (2.8) в (2.7) и выполняя интегрирование, найдем

$$W(t,\ P)={}^2/_3\pi\gamma\rho(3B^2-R^2-2A^3R^{-1}) \tag{2.9}$$

Вектор массовой силы, действующей на единицу массы, направлен по e_R и равен

$$F=\rho(\partial W/\partial R)e_R=-{}^1/_4\pi\gamma\rho^2R[1-(A/R)^3]e_R \tag{2.10}$$

Уравнение равновесия элемента тела имеет вид [1]:

$$\frac{\partial\sigma_r}{\partial R}+2\frac{\sigma_r-\sigma_\vartheta}{R}-\frac{4}{3}\pi\gamma\rho^2R\left[1-\left(\frac{A}{R}\right)^3\right]=0 \tag{2.11}$$

Учитывая, что на внешней поверхности шара усилия равны нулю, найдем

$$\sigma_r|_{R=B(t)}=0 \tag{2.12}$$

Рассмотрим сначала случай сплошного шара ($A=0$). Из соотношения (2.3) и условия центральной симметрии деформации следует, что $C(t)=0$. Следовательно, $R(t, r)=r$, $B(t)=b(t)$. При этом

$$\begin{gathered}\sigma_r=\sigma_\vartheta=p \quad r\in[0, b_0)\\ \sigma_r=p+{}^2/_3\mu(\psi/r)^4(I-L)\,[1-(r/\psi)^6]\\ \sigma_\vartheta=p+{}^1/_3\mu(r/\psi)^2(I-L)\,[1-(\psi/r)^6] \quad r\in(b_0, b(t)]\end{gathered} \tag{2.13}$$

Проинтегрируем равенство (2.11) по R в пределах от r до $B(t)$, $r\in[0, b_0)$. Учитывая граничные условия (2.12) и соотношения (2.13), найдем

$$p(t,r)=\frac{2}{3}\mu\int\limits_{b_0}^{b(t)}\left(\frac{\psi}{r}\right)^4\left\{2(I-L)\left[1-\left(\frac{r}{\psi}\right)^6\right]-\left(\frac{r}{\psi}\right)^6(I-L)\times\right.$$
$$\left.\times\left[1-\left(\frac{\psi}{r}\right)^6\right]\right\}\frac{dr}{r}-\frac{2}{3}\pi\gamma\rho^2[b^2(t)-r^2] \tag{2.14}$$

Выражение (2.14) определяет напряженное состояние в основном теле K_0 при непрерывном наращивании с натягом. Если деформация натяга равна нулю ($H(r)=0$), то из (2.14) следует, что $p(t, r)=-{}^2/_3\pi\gamma\rho^2[b^2(t)-r^2]$.

При малой деформации натяга ($H(r)b_0^{-3}\ll1$) из (2.14) получим

$$p(t,r)=4\mu\int\limits_{b_0}^{b(t)}(I-L)H(r)r^{-4}\,dr-\frac{2}{3}\pi\gamma\rho^2[b^2(t)-r^2]$$

Подставляя в это равенство выражения для операторов I и L, найдем

$$p(t,r)=4\mu\int\limits_{b_0}^{b(t)}\left[1-\int\limits_{\varkappa(r)}^{t}l(t-\varkappa(r),\tau-\varkappa(r))\,d\tau\right]H(r)r^{-4}\,dr-\frac{2}{3}\pi\gamma\rho^2[b^2(t)-r^2] \tag{2.15}$$

Перейдем к исследованию задачи о деформации полого шара ($A>0$). В этом случае к граничному условию (2.12) на внешней поверхности шара нужно добавить условие отсутствия напряжений на внутренней поверхности

$$\sigma_r|_{R=A(t)}=0 \tag{2.16}$$

Проинтегрируем соотношение (2.11) по R в пределах от $A(t)$ до $B(t)$. Учитывая (2.6) и граничные условия (2.12), (2.16), найдем

$$\int\limits_{A(t)}^{B(t)}\left(\frac{\psi}{R}\right)^4\left\{2(I-L)\left[1-\left(\frac{R}{\psi}\right)^6\right]-\left(\frac{R}{\psi}\right)^6(I-L)\left[1-\left(\frac{\psi}{R}\right)^6\right]\right\}\frac{dR}{R}=$$
$$=\frac{\pi\gamma\rho^2}{\mu B(t)}[B^3(t)-3A^2(t)B(t)+2A^3(t)]$$

Перейдем к интегрированию по переменной r. С учетом соотношений (2.2)–(2.4) получим

$$\int_a^{b(t)}\left(\frac{r^3+H}{r^3+C}\right)^{4/3}\left\{2(I-L)\left[1-\left(\frac{r^3+C}{r^3+H}\right)^2\right]-\left(\frac{r^3+C}{r^3+H}\right)^2(I-L)\left[1-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\left(\frac{r^3+H}{r^3+C}\right)^2\right]\right\}\frac{r^2\,dr}{r^3+C}=\frac{\pi\gamma\rho^2}{\mu[b^3+C]^{1/3}}[b^3+2a^3+3C-3(a^3+C)^{2/3}(b^3+C)^{1/3}] \tag{2.17}$$

Интегральное уравнение (2.17) позволяет определить функцию $C(t)$, характеризующую радиальные перемещения в наращиваемом полом шаре. При наращивании без натяга, когда натуральное состояние наращиваемого элемента совпадает с его начальным состоянием ($H=0$), из (2.17) найдем

$$\int_{a^3}^{b^3(t)}\left(1+\frac{C}{x}\right)^{-7/3}\left\{2(I-L)\left[1-\left(1+\frac{C}{x}\right)^2\right]-\left(1+\frac{C}{x}\right)^2(I-L)\left[1-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\left(1+\frac{C}{x}\right)^{-2}\right]\right\}\frac{dx}{x}=\frac{3\pi\gamma\rho^2}{\mu b\left(1+\frac{C}{b^3}\right)^{1/3}}\left[b^3\left(1+\frac{C}{b^3}\right)+2a^3\left(1+\frac{C}{a^3}\right)-\right.$$

$$\left.-3a^2b\left(1+\frac{C}{a^3}\right)^{2/3}\left(1+\frac{C}{b^3}\right)^{1/3}\right] \tag{2.18}$$

Если $a\sim b$, $\gamma\rho^2b^2/\mu\ll 1$, то можно считать деформации малыми ($Ca^{-3}\ll\ll 1$). При этом из (2.18) следует соотношение

$$\int_a^{b(t)}(I-L)Cr^{-4}\,dr=\frac{\pi\gamma\rho^2b^2}{6\mu}\left[2\left(\frac{a}{b}\right)^3-3\left(\frac{a}{b}\right)^2+1\right]$$

Подставляя выражения для операторов I и L, найдем

$$\int_a^{b(t)}\left[C(t)-\int_{\varkappa(r)}^t l(t-\varkappa(r),\tau-\varkappa(r))C(\tau)\,d\tau\right]r^{-4}\,dr=$$

$$=\frac{\pi\gamma\rho^2b^2(t)}{6\mu}\left[2\left(\frac{a}{b(t)}\right)^3-3\left(\frac{a}{b(t)}\right)^2+1\right]$$

Меняя порядок интегрирования, получим для определения функции $C(t)$ интегральное уравнение Вольтерра второго рода

$$C(t)[a^{-3}-b^{-3}(t)]-\int_0^t l_1(t,\tau)C(\tau)\,d\tau=$$

$$=\frac{\pi\gamma\rho^2b^2(t)}{2\mu}\left[2\left(\frac{a}{b(t)}\right)^3-3\left(\frac{a}{b(t)}\right)^2+1\right]$$

$$l_1(t,\tau)=(a^{-3}-b_0^{-3})l(t,\tau)+3\int_{b(\tau)}^{b(t)}l(t-\varkappa(r),\tau-\varkappa(r))r^{-4}\,dr$$

Обозначим через $l_2(t,\tau)$ ядро релаксации вида

$$l_2(t,\tau)=[a^{-3}-b^{-3}(\tau)]^{-1}\left[(a^{-3}-b_0^{-3})l(t,\tau)+\right.$$

$$\left.+3\int_\tau^t l(t-s,\tau-s)b^{-4}(s)\frac{db(s)}{ds}\,ds\right]$$

а через $k_2(t, \tau)$ — соответствующее ему ядро ползучести. Функция $C(t)$ определяется по формуле

$$C(t)=\frac{\pi\gamma\rho^2}{2\mu}[a^{-3}-b^{-3}(t)]^{-1}\left\{b^2(t)\left[2\left(\frac{a}{b(t)}\right)^3-3\left(\frac{a}{b(t)}\right)^2+1\right]+\right.$$

$$\left.+\int_0^t k_2(t,\tau)b^2(\tau)\left[2\left(\frac{a}{b(\tau)}\right)^3-3\left(\frac{a}{b(\tau)}\right)^2+1\right]d\tau\right\} \qquad (2.19)$$

Согласно (2.3), при малых деформациях радиальное перемещение равно

$$u_r=R-r=C(t)\,/\,(3r^2) \qquad (2.20)$$

Соотношения (2.19) и (2.20) позволяют определить перемещения точек наращиваемого гравитирующего шара при наращивании без натяга в случае малых деформаций.

3. Постановка и основные уравнения задачи устойчивости. Рассмотрим деформацию тела K_0 в случае, когда наращивание отсутствует, а к телу в момент времени $t=0$ приложены массовые силы F^* и поверхностные усилия f^*. Параметры напряженно-деформированного состояния, отвечающего данной нагрузке, будем обозначать звездочкой. Предположим теперь, что на тело действует нагрузка $F=F^*+\Delta F$, $f=f^*+\Delta f$, где ΔF, Δf — малые возмущения массовых и поверхностных усилий. При этом вектор перемещений произвольной точки ξ равен $u=u^*+\Delta u$, где $\Delta u=$ $=\Delta u^i g_i^*=\Delta u_i g^{*i}$ — вектор дополнительных перемещений, вызванных возмущениями внешней нагрузки. Считаем, что дополнительные перемещения достаточно малы, так что квадратами дополнительных удлинений, сдвигов и углов поворота можно пренебречь по сравнению с единицей. При этом компоненты тензора деформаций в возмущенном состоянии определяются по формулам

$$\varepsilon_{ij}=\varepsilon_{ij}^*+\Delta\varepsilon_{ij}, \quad 2\Delta\varepsilon_{ij}=\nabla_i^*\Delta u_j+\nabla_j^*\Delta u_i \qquad (3.1)$$

Из условия несжимаемости материала (1.2) получим [5]:

$$\Delta\theta=g^{*ij}\Delta\varepsilon_{ij}=0 \qquad (3.2)$$

Обозначим через $\Delta\sigma^{ij}=\sigma^{ij}-\sigma^{*ij}$ приращения компонент тензора напряжений. Считаем, что величины $\Delta\sigma^{ij}$ достаточно малы, так что их произведениями на дополнительные удлинения, сдвиги и углы поворота можно пренебречь.

Предположим, что в возмущенном состоянии на тело действуют массовые усилия вида $F=(g\,/\,g^*)^{1/2}(F^*+\delta F+\Delta F)$. Здесь $\delta F=\delta F^i g_i^*$ — вектор дополнительных внешних массовых усилий, вызванных деформацией тела K_0, $\Delta F=\Delta F^i g_i^*$ — вектор возмущений внешних воздействий.

Согласно [1], из уравнений равновесия (1.3) следуют равенства

$$\nabla_i^*(\Delta\sigma^{ij}+\sigma^{*ij}\Delta\theta+\sigma^{*ik}\nabla_k^*\Delta u^j)+\delta F^j+\Delta F^j=0 \qquad (3.3)$$

Примем уравнения состояния материала в виде (1.4). Учитывая сделанные выше допущения, найдем

$$\Delta\sigma^{ij}=\Delta p g^{*ij}-2p^*\Delta\varepsilon^{ij}+{}^1/_3\mu(I-L)(2J_1^*\Delta\varepsilon^{ij}-\Delta J_1 g^{*ij})$$
$$\Delta J_1=2g_0^{ij}\Delta\varepsilon_{ij} \qquad (3.4)$$

При записи граничных условий будем пренебрегать изменением границы тела при переходе из невозмущенного в возмущенное актуальное состояние. Пусть на тело действует «мертвая» поверхностная нагрузка $f ds_t=(f^*+\Delta f)ds_t^*$, где ds_t, ds_t^* — элементы площади поверхности тела в актуальном возмущенном и невозмущенном состояниях. Тогда согласно

[1] из граничных условий (1.5) найдем

$$(\Delta\sigma^{ij}+\sigma^{*ij}\Delta\theta+\sigma^{*ik}\nabla_k^*\Delta u^j)n_i^*=\Delta f^j \qquad (3.5)$$

При заданной зависимости вектора δF от перемещений точек тела уравнения (3.1)—(3.4) с граничными условиями (3.5) описывают малые возмущения исходного напряженно-деформированного состояния.

Определение. Вязкоупругое тело называется устойчивым по Ляпунову на бесконечном интервале времени, если для любого $\varepsilon>0$ существует такое $\delta(\varepsilon)>0$, что из неравенств $|\Delta F|<\delta$, $|\Delta f|<\delta$ следует оценка $\|\Delta u\|<\varepsilon$ $(t\geqslant 0)$:

$$\|\Delta u\|^2=\int\limits_{D^*(t)}\Delta u^j\,\Delta u_j\,dv,\quad \|\Delta F\|^2=\int\limits_{D^*(t)}\Delta F^j\,\Delta F_j\,dv,\quad \|\Delta f\|^2=\int\limits_{\partial D^*(t)}\Delta f^j\,\Delta f_j\,ds_t^*$$

$$|\Delta F|=\sup_t\|\Delta F\|,\qquad |\Delta f|=\sup_t\|\Delta f\|$$

Считаем, что главный вектор и главный момент возмущений внешней нагрузки равны нулю, так что дополнительное смещение области $D^*(t)$ как жесткого целого отсутствует.

Сделаем следующие предположения относительно ядра релаксации: функция l допускает представление в виде $0\leqslant l(t,\tau)=l^{(1)}(t,\tau)+l^{(2)}(t,\tau)(t-\tau)^{-\eta}$, где $l^{(1)}$, $l^{(2)}$ — непрерывные функции, $0<\eta<1$;

справедливо неравенство $|l|=\sup_t\int\limits_0^t l(t,\tau)\,d\tau<1$.

4. Устойчивость гравитирующего шара из несжимаемого стареющего вязкоупругого материала. Пусть тело K_0 представляет собой шар радиуса b_0, изготовленный из вязкоупругого стареющего материала. Материал тела однороден $(\varkappa\equiv 0)$. В момент времени $t=0$ на шар начинает действовать гравитационное поле, создаваемое этим телом, и к нему прикладываются возмущения поверхностных и объемных усилий. Требуется определить значение критического радиуса $b°$, при котором шар теряет устойчивость. Аналогичная задача об устойчивости стержня и кольца из упругого материала с помощью технической теории устойчивости исследовалась в [6], а задача о колебаниях самогравитирующего шара из идеальной жидкости рассматривалась в [7].

В невозмущенном состоянии, когда $\Delta F=0$, $\Delta f=0$, в шаре реализуется центрально-симметричное напряженно-деформированное состояние. Согласно (2.3), перемещения точек шара равны нулю и $g^{*ij}=g_0{}^{ij}$. При этом, согласно (2.6), $J_1^*=3$ и тензор напряжений шаровой $\sigma^{*ij}=p^*g_0{}^{ij}$, причем величина p^* определяется по формуле (2.15)

$$p^*=-{}^2/_3\pi\gamma\rho^2(b_0{}^2-r^2) \qquad (4.1)$$

Из уравнений (3.1)—(3.5) найдем

$$\Delta\varepsilon_{ij}=(\nabla_{0i}\Delta u_j+\nabla_{0j}\Delta u_i)/2 \qquad (4.2)$$

$$g_0{}^{ij}\Delta\varepsilon_{ij}=0 \qquad (4.3)$$

$$\nabla_{0i}(\Delta\sigma^{ij}+p^*g_0{}^{ik}\nabla_{0k}\Delta u^j)+\delta F^j+\Delta F^j=0 \qquad (4.4)$$

$$\Delta\sigma^{ij}=\Delta p g_0{}^{ij}-2p^*\Delta\varepsilon^{ij}+2\mu(I-L)\Delta\varepsilon^{ij} \qquad (4.5)$$

$$(\Delta\sigma^{ij}+p^*g_0{}^{ik}\nabla_{0k}\Delta u^j)n_{0i}=\Delta f^j \qquad (4.6)$$

Здесь ∇_{0i} — оператор ковариантного дифференцирования в базисе начального состояния; n_{0i} — компоненты вектора единичной внешней нормали к поверхности шара в недеформированном состоянии в базисе начального состояния.

Введем декартову систему координат $Ox_1x_2x_3$ с началом в центре объема Ω_0. Координаты x_i примем за лагранжевы координаты точек тела. Проекции произвольного вектора e на оси системы координат $x_1x_2x_3$ обозначим через e_{x_i}.

Пусть $P_1=R_1e_R=x_{1i}g_{0i}$ — радиус-вектор произвольной материальной точки объема Ω_0, $P_2=P_1+\Delta u(t, P_1)$ — радиус-вектор той точки, в которую перешла данная точка при дополнительной деформации. Согласно (2.7), для любой точки $P=Re_R=x_ig_{0i}$:

$$W(t,P)=\gamma\rho\int\limits_{D(t)}\frac{dv(P_2)}{|P_2-P|}$$

Из условия несжимаемости получим

$$W(t,P)=\gamma\rho\int\limits_{\Omega_0}\frac{dv(P_1)}{|P_1+\Delta u(t,P_1)-P|}$$

Поскольку объемный потенциал можно дифференцировать под знаком интеграла, с точностью до квадратов дополнительных удлинений, сдвигов и углов поворота получим

$$W(t,P)=\gamma\rho\int\limits_{\Omega_0}\frac{dv(P_1)}{|P_1-P|}+\gamma\rho\int\limits_{\Omega_0}\frac{\partial}{\partial x_{1i}}|P_1-P|^{-1}\,\Delta u_{x_i}(t,P_1)\,dv(P_1)$$

Из этого равенства и (2.9) следует, что

$$W(t,P)=\frac{2}{3}\pi\gamma\rho(3b_0^2-R^2)+$$

$$+\gamma\rho\int\limits_{\Omega_0}\frac{\partial}{\partial x_{1i}}|P_1-P|^{-1}\Delta u_{x_i}(t,P_1)\,dv(P_1)$$

Интегрируя по частям и учитывая условие несжимаемости, найдем

$$W(t,P)=\frac{2}{3}\pi\gamma\rho(3b_0^2-R^2)+\gamma\rho\int\limits_{\partial\Omega_0}\frac{\Delta u_{x_i}(t,P_1)\,n_{0x_i}(P_1)\,ds(P_1)}{|P_1-P|}$$

Проекции массовой силы равны

$$F_{x_i}(t,P)=\rho\frac{\partial W(t,P)}{\partial x_i}=-\frac{4}{3}\pi\gamma\rho^2x_i+$$

$$+\gamma\rho^2\frac{\partial}{\partial x_i}\int\limits_{\partial\Omega_0}\frac{\Delta u_{x_i}(t,P_1)\,n_{0x_i}(P_1)\,ds(P_1)}{|P_1-P|}$$

Пусть в невозмущенном состоянии материальная точка имеет радиус-вектор P. В возмущенном состоянии она переходит в точку с радиус-вектором $P_1=P+\Delta u(t, P)$. Приращения массовой силы, действующей на данную точку при переходе из невозмущенного состояния в возмущенное, определяются по формуле

$$\delta F_{x_i}=F_{x_i}(t,P_1)-F^*_{x_i}(t,P)=-\frac{4}{3}\pi\gamma\rho^2x_{1i}+$$

$$+\gamma\rho^2\frac{\partial}{\partial x_{1i}}\int\limits_{\partial\Omega_0}\frac{\Delta u_{x_j}(t,P_2)\,n_{0x_j}(P_2)\,ds(P_2)}{|P_2-P_1|}+\frac{4}{3}\pi\gamma\rho^2x_i$$

Учитывая, что $x_{1i}=x_i+\Delta u_{x\ i}$, найдем

$$\delta F_{x_i}=-\frac{4}{3}\pi\gamma\rho^2\Delta u_{x_i}+\gamma\rho^2\frac{\partial}{\partial x_{1i}}\int_{\partial\Omega_0}\frac{\Delta u_{x_j}(t,\ P_2)\,n_{0x_j}(P_2)\,ds(P_2)}{|P_2-P_1|}$$

Пусть точка P находится внутри области Ω_0. Тогда с указанной степенью точности получим

$$\frac{\partial}{\partial x_{1i}}\int_{\partial\Omega_0}\frac{\Delta u_{x_j}(t,\ P_2)\,n_{0x_j}(P_2)\,ds(P_2)}{|P_2-P_1|}=\frac{\partial}{\partial x_i}\int_{\partial\Omega_0}\frac{\Delta u_{x_j}(t,\ P_2)\,n_{0x_j}(P_2)\,ds(P_2)}{|P_2-P|}$$

откуда найдем

$$\delta F_{x_i}=-\frac{4}{3}\pi\gamma\rho^2\Delta u_{x_i}+\gamma\rho^2\frac{\partial}{\partial x_i}\int_{\partial\Omega_0}\frac{\Delta u_{x_j}(t,\ P_2)\,n_{0x_j}(P_2)\,ds(P_2)}{|P-P_2|}\qquad(4.7)$$

Перейдем к выводу условий устойчивости. Умножим j-е равенство (4.4) на Δu_j, просуммируем по j и проинтегрируем по области Ω_0. Интегрируя по частям и учитывая (4.2) и граничные условия (4.6), найдем

$$\int_{\Omega_0}(\Delta\sigma^{ij}\nabla_{0i}\Delta u_j+p^*g_0^{ik}\nabla_{0k}\Delta u^j\nabla_{0i}\Delta u_j)\,dv=I_1+\int_{\Omega_0}\delta F^j\Delta u_j dv,\qquad(4.8)$$

$$I_1=\int_{\Omega_0}\Delta F^j\,\Delta u_j\,dv+\int_{\partial\Omega_0}\Delta f^j\,\Delta u_j\,ds$$

Обозначим через $\Delta\omega_{ij}=(\nabla_{0i}\Delta u_j-\nabla_{0j}\Delta u_i)/2$ компоненты тензора дополнительных вращений. Из соотношений (4.3), (4.5), (4.8) найдем

$$\int_{\Omega_0}(2\mu-p^*)\,\Delta\varepsilon^{ij}\Delta\varepsilon_{ij}\,dv=J+I_1+I_2+I_3$$

$$J=-\int_{\Omega_0}p^*\Delta\omega^{ij}\,\Delta\omega_{ij}\,dv,\quad I_2=2\mu\int_{\Omega_0}\Delta\varepsilon_{ij}L\Delta\varepsilon^{ij}\,dv,\quad I_3=\int_{\Omega_0}\delta F^j\,\Delta u_j\,dv\qquad(4.9)$$

Преобразуем последнее слагаемое в (4.9), с учетом выражения (4.7)

$$I_3=\int_{\Omega_0}\delta F_{x_i}\Delta u_{x_i}dv=-\frac{4}{3}\pi\gamma\rho^2\int_{\Omega_0}\Delta u_{x_i}\Delta u_{x_i}\,dv+$$

$$+\gamma\rho^2\int_{\Omega_0}\Delta u_{x_i}(t,\ P)\frac{\partial}{\partial x_i}\int_{\partial\Omega_0}\frac{\Delta u_{x_j}(t,P_1)\,n_{0x_j}(P_1)\,ds(P_1)}{|P-P_1|}\,dv(P)$$

Интегрируя по частям и учитывая условие несжимаемости, найдем

$$I_3=-\frac{4}{3}\pi\gamma\rho^2\int_{\Omega_0}\Delta u^j\,\Delta u_j\,dv+$$

$$+\gamma\rho^2\int_{\partial\Omega_0}\int_{\partial\Omega_0}\frac{\Delta u^i(t,P_1)\,n_{0i}(P_1)\,\Delta u^j(t,P_2)\,n_{0j}(P_2)\,ds(P_1)\,ds(P_2)}{|P_1-P_2|}\qquad(4.10)$$

Подставляя это выражение в (4.9), получим

$$\int_{\Omega_0}[(m+b_0^2-r^2)\Delta\varepsilon^{ij}\Delta\varepsilon_{ij}+2\Delta u^j\Delta u_j]\,dv=J_0+m[I_1/(2\mu)+I_2],\quad m=3\mu/(\pi\gamma\rho^2)\qquad(4.11)$$

$$J_0=\int\limits_{\Omega_0}(b_0^2-r^2)\Delta\omega^{ij}\Delta\omega_{ij}\,dv+$$

$$+\frac{3}{2\pi}\int\limits_{\partial\Omega_0}\int\limits_{\partial\Omega_0}\frac{\Delta u^i(t,P_1)n_{0i}(P_1)\Delta u^j(t,P_2)n_{0j}(P_2)ds(P_1)ds(P_2)}{|P_1-P_2|}$$

Обозначим через U множество непрерывно дифференцируемых функций $w(\xi)=w^i g_{0i}=w_i g_0^i$, $\nabla_{0i}w^i=0$, для которых отсутствует смещение области Ω_0 как жесткого целого. Положим

$$\Lambda_1=\sup_W\left[\int\limits_{\Omega_0}(b_0^2-r^2)\,\omega^{ij}\omega_{ij}\,dv+\right.$$

$$\left.+\frac{3}{2\pi}\int\limits_{\partial\Omega_0}\int\limits_{\partial\Omega_0}|P_1-P_2|^{-1}w^i(P_1)n_{0i}(P_1)w^j(P_2)n_{0j}(P_2)ds(P_1)ds(P_2)\right]\times$$

$$\times\left\{\int\limits_{\Omega_0}[m(1-|l|)+b_0^2-r^2)e^{ij}e_{ij}+2w^iw_i]dv\right\}^{-1}$$

$$e_{ij}=\frac{1}{2}(\nabla_{0i}w_j+\nabla_{0j}w_i),\qquad \omega_{ij}=\frac{1}{2}(\nabla_{0i}w_j-\nabla_{0j}w_i)$$

Теорема 1. Пусть $\Lambda_1<1$. Тогда гравитирующий шар из несжимаемого материала устойчив по Ляпунову.

Доказательство теоремы аналогично доказательству теоремы об устойчивости вязкоупругого тела в [8].

5. Устойчивость гравитирующего шара из сжимаемого вязкоупругого материала, подверженного старению. Сформулируем условия устойчивости шара K_0, изготовленного из сжимаемого вязкоупругого материала, при условии малости деформаций в невозмущенном состоянии. Как и выше, предполагается, что в невозмущенном состоянии на шар воздействует только создаваемое им гравитационное поле. Считаем, что удлинения, сдвиги, углы поворота в невозмущенном состоянии малы, так что их квадратами, а также произведениями на дополнительные удлинения, сдвиги, углы поворота можно пренебречь по сравнению с единицей. Кроме того, можно пренебречь произведениями удлинений, сдвигов и углов поворота в невозмущенном состоянии на напряжения в невозмущенном состоянии, а также на приращения напряжений, вызванных возмущениями внешней нагрузки. Пренебрегаем изменением плотности материала тела и изменением границы тела при записи граничных условий. Уравнения состояния материала примем в виде [9]:

$$\sigma^{ij}=\lambda\theta g_0^{ij}+2\mu(I-L)\varepsilon^{ij}\tag{5.1}$$

где λ, μ — константы Ламе, а $\theta=g_0^{ij}\varepsilon_{ij}$ — первый инвариант тензора малых деформаций. Материал тела считаем однородным ($\varkappa=0$).

Определим сначала напряженно-деформированное состояние в невозмущенном объеме. В качестве лагранжевой системы координат выберем декартову систему $Ox_1x_2x_3$. Учитывая сделанные выше предположения о малости деформаций, запишем определяющие уравнения в следующем виде:

$$\begin{gathered}\varepsilon_{ij}=(\nabla_{0i}u_{x_j}+\nabla_{0j}u_{x_i})/2,\qquad \nabla_{0i}\sigma_{ij}={}^4/_3\pi\gamma\rho^2x_j\\ \sigma_{ij}=\lambda\theta g_{0ij}+2\mu(I-L)\varepsilon_{ij},\qquad \sigma_{ij}n_i|_{r=b_0}=0\end{gathered}\tag{5.2}$$

Как обычно, при записи уравнений в декартовой системе координат полагаем все индексы нижними.

Из соотношений (5.2) найдем

$$[\lambda I+\mu(I-L)]\,\nabla_{0j}\theta+\mu(I-L)\,\nabla_0^2 u_{x_j}={}^4/_3\pi\gamma\rho^2 x_j$$

$$\nabla_0^2=\partial^2/\partial x_1^2+\partial^2/\partial x_2^2+\partial^2/\partial x_3^2 \tag{5.3}$$

Будем искать решение системы уравнений (5.3) в виде $u_{x_i}=x_i r^{-1} u(t, r)$. Получим

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{2}{r^2}u=\frac{4\pi\gamma\rho^2}{3(\lambda+2\mu)}\left[I-\frac{2\mu}{\lambda+2\mu}L\right]^{-1} r$$

Общее решение этого уравнения имеет вид

$$u=C_1 r+C_2 r^{-2}+Ar^3,\quad A=\frac{2\pi\gamma\rho^2}{15(\lambda+2\mu)}\left(I-\frac{2\mu}{\lambda+2\mu}L\right)^{-1}\cdot 1 \tag{5.4}$$

где $C_1(t)$, $C_2(t)$ — произвольные функции времени.

Из условия ограниченности перемещений при $r=0$ найдем $C_2=0$. Компоненты тензора напряжений определяются равенствами

$$\sigma_{ii}=[(3\lambda+2\mu)I-2\mu L]C_1+[(5\lambda+2\mu)I-2\mu L]Ar^2+4\mu(I-L)Ax_i^2$$

$$\sigma_{ij}=4\mu(I-L)Ax_i x_j \quad (i\neq j) \tag{5.5}$$

Согласно граничному условию при $r=b_0$

$$C_1=-\frac{2\pi\gamma\rho^2 b_0^2(5\lambda+6\mu)}{15(\lambda+2\mu)(3\lambda+2\mu)}\left(I-\frac{2\mu}{3\lambda+2\mu}L\right)^{-1}\times$$

$$\times\left(I-\frac{6\mu}{5\lambda+6\mu}L\right)\left(I-\frac{2\mu}{\lambda+2\mu}L\right)^{-1}\cdot 1 \tag{5.6}$$

Соотношения (5.4)—(5.6) определяют напряженно-деформированное состояние шара при отсутствии возмущений внешней нагрузки.

Возмущения исходного напряженно-деформированного состояния описываются уравнениями (3.1), (3.3). При малых деформациях в этих соотношениях можно пренебречь различием компонент тензоров и векторов и различием операторов ковариантного дифференцирования в базисах начального и актуального невозмущенного состояния. В результате получим

$$\Delta\varepsilon_{ij}=(\nabla_{0i}\Delta u_j+\nabla_{0j}\Delta u_i)/2 \quad \Delta\theta=g_0^{ij}\Delta\varepsilon_{ij}$$

$$\nabla_{0i}(\Delta\sigma^{ij}+\sigma^{*ij}\Delta\theta+\sigma^{*ik}\nabla_{0k}\Delta u^j)+\delta F^j+\Delta F^j=0 \tag{5.7}$$

Согласно (5.1), при малых возмущениях внешней нагрузки приращения компонент тензора напряжений определяются равенствами

$$\Delta\sigma^{ij}=\lambda\Delta\theta g_0^{ij}+2\mu(I-L)\Delta\varepsilon^{ij} \tag{5.8}$$

Согласно (3.5), получим условие на границе недеформированного объема

$$(\Delta\sigma^{ij}+\sigma^{*ij}\Delta\theta+\sigma^{*ik}\nabla_{0k}\Delta u^j)n_{0i}=\Delta f^j \tag{5.9}$$

Уравнения (5.7), (5.8) с граничными условиями (5.9) описывают возмущения исходного напряженно-деформированного состояния при малых деформациях в невозмущенном состоянии.

Для получения условий устойчивости умножим j-е уравнение равновесия (5.7) на Δu_j, просуммируем по j и проинтегрируем по области Ω_0. Интегрируя по частям и учитывая граничные условия (5.9), получим

$$\int\limits_{\Omega_0}(\Delta\sigma^{ij}\Delta\varepsilon_{ij}+\sigma^{*ij}\Delta\varepsilon_{ij}\Delta\theta+\sigma^{*ij}\nabla_{0i}\Delta u^k\nabla_{0j}\Delta u_k)\,dv=I_1+I_3 \tag{5.10}$$

Преобразуем выражение в левой части равенства (5.10), воспользовавшись соотношением (5.8)

$$\int_{\Omega_0} [\lambda(\Delta\theta)^2+2\mu\Delta\varepsilon^{ij}\Delta\varepsilon_{ij}]\,dv=J+I_1+I_2+I_3$$
$$J=-\int_{\Omega_0} \sigma^{*ij}(\Delta\varepsilon_{ij}\Delta\theta+\nabla_{0i}\Delta u^k\nabla_{0j}\Delta u_k)\,dv \tag{5.11}$$

Для простоты ограничимся рассмотрением возмущений внешних воздействий, для которых поле дополнительных перемещений Δu является соленоидальным $\Delta\theta=0$. При этом величина I_3 определяется по формуле (4.10). Из (5.11) найдем

$$2\mu\int_{\Omega_0}\Delta\varepsilon^{ij}\Delta\varepsilon_{ij}\,dv+\frac{4}{3}\pi\gamma\rho^2\int_{\Omega_0}\Delta u^j\Delta u_j\,dv=-\int_{\Omega_0}\sigma^{*ij}\nabla_{0i}\Delta u^k\nabla_{0j}\Delta u_k\,dv+$$
$$+\gamma\rho^2\int_{\partial\Omega_0}\int_{\partial\Omega_0}|P_1-P_2|^{-1}\Delta u^i(t,P_1)n_{0i}(P_1)\Delta u^j(t,P_2)n_{0j}(P_2)\,ds(P_1)\,ds(P_2)$$

Положим

$$\Lambda_2(t)=\sup_W\Bigg|-\int_{\Omega_0}\sigma^{*ij}\nabla_{0i}w^k\nabla_{0j}w_k\,dv+$$
$$+\gamma\rho^2\int_{\partial\Omega_0}\int_{\partial\Omega_0}|P_1-P_2|^{-1}w^i(P_1)n_{0i}(P_1)w^j(P_2)n_{0j}(P_2)\,ds(P_1)\,ds(P_2)\Bigg|\times$$
$$\times\left[2\mu(1-|l|)\int_{\Omega_0}e^{ij}e_{ij}\,dv+\frac{4}{3}\pi\gamma\rho^2\int_{\Omega_0}w^jw_j\,dv\right]^{-1}\qquad(w\in U)$$

Теорема 2. Пусть возмущения внешней нагрузки таковы, что $\Delta\theta=0$. Если $\Lambda_2^\circ=\sup_t\Lambda_2(t)<1$, то гравитирующий шар из сжимаемого материала устойчив по Ляпунову.

Сформулируем условия устойчивости шара, у которого возмущения массовых сил равны нулю, а возмущения поверхностных усилий статически эквивалентны двум парам сил. Одна пара сил закручивает полушар $x_3>0$ против часовой стрелки, а вторая закручивает полушар $x_3<0$ по часовой стрелке. Поле дополнительных перемещений представим в виде [10]: $w_{x_1}=-\beta x_2x_3$, $w_{x_2}=\beta x_1x_3$, $w_{x_3}=0$, где $\beta(t)$ — некоторая функция времени. Ограничимся рассмотрением случая упругого материала ($L=0$). При этом

$$\int_{\Omega_0}w^iw_i\,dv=\frac{8\pi\beta^2b_0^7}{7!!},$$
$$\int_{\Omega_0}e^{ij}e_{ij}\,dv=\frac{4\pi\beta^2\beta_0^5}{5!!},\qquad -\int_{\Omega_0}\sigma^{*ij}\nabla_{0i}w^k\nabla_{0j}w_k\,dv=\frac{32\pi\beta^2b_0^7}{7!!}A(5\lambda+12\mu)$$

Согласно теореме 2, шар устойчив при $b_0^2<105\mu(\lambda+2\mu)/[8\pi\gamma\rho^2(5\lambda+14\mu)]$.

Обозначим через E модуль упругой деформации, а через ν — коэффициент Пуассона материала шара. Величина критического радиуса определяется по формуле $b^\circ=\{105E(1-\nu)/[16\pi\gamma\rho^2(1+\nu)(7-9\nu)]\}^{1/2}$.

Точное значение модуля упругой деформации E для планет, в том числе и для Земли, неизвестно. Обычно предполагается, что для Земли величина E находится в пределах от значения модуля упругой деформации для стекла до значения модуля упругой деформации для стали [11].

Положим $\nu=1/3$, $\gamma=6{,}7\cdot10^{-11}$ м^{2}кг$^{-1}$с$^{-2}$, $\rho=3{,}3\cdot10^3$ кг м$^{-3}$. При $E=0{,}56\cdot10^5$ МПа найдем $b^\circ\cong4{,}7\cdot10^4$ км. Если же $E=2{,}1\cdot10^5$ МПа, то $b^\circ\cong9\cdot10^4$ км.

Таким образом получаем, что критический радиус гравитирующего шара, модуль упругости которого равен модулю упругости стекла, составляет 0,7 радиуса Земли, а критический радиус шара, модуль упругости которого равен модулю упругости стали, составляет 1,4 радиуса Земли.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лурье А. И.* Теория упругости. М.: Наука, 1970. 940 с.
2. *Адамов А. А.* Об идентификации модели наследственной вязкоупругости при конечных деформациях.– В сб.: Структурная механика неоднородных сред. Свердловск: Изд. Урал. науч. центра АН СССР, 1982, с. 8–11.
3. *Арутюнян Н. Х., Дроздов А. Д.* Механика растущих вязкоупругих тел, подверженных старению, при конечных деформациях.– Докл. АН СССР, 1984, т. 276, № 4, с. 821–825.
4. *Суетин П. К.* Классические ортогональные многочлены. М.: Наука, 1976. 328 с.
5. *Грин А., Адкинс Дж.* Большие упругие деформации и нелинейная механика сплошной среды. М.: Мир, 1965. 456 с.
6. *Феодосьев В. И.* О некоторых необычных примерах устойчивости равновесия упругих систем.– Изв. АН СССР. МТТ, 1984, № 1, с. 130–136.
7. Гидромеханика невесомости. / Под ред. *А. Д. Мышкиса.* М.: Наука, 1976. 504 с.
8. *Арутюнян Н. Х., Дроздов А. Д.* К теории устойчивости вязкоупругих тел при конечных деформациях.– Докл. АН СССР, 1984, т. 276, № 5, с. 1082–1086.
9. *Арутюнян Н. Х., Колмановский В. Б.* Теория ползучести неоднородных тел. М.: Наука, 1983. 336 с.
10. *Ляв А.* Математическая теория упругости. М.–Л.: Гостехиздат, 1935. 676 с.
11. *Жарков В. Н., Трубицын В. П.* Физика планетных недр. М.: Наука, 1980. 448 с.

Москва

Поступила в редакцию
14.III.1984