

УДК 539.215

## КОЛИЧЕСТВЕННАЯ ФОРМУЛИРОВКА УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЙ ДИЛАТАНСИОННОЙ МОДЕЛИ (НА ПРИМЕРЕ ПЕСЧАНИКА)

КАПУСТЯНСКИЙ С. М., НИКОЛАЕВСКИЙ В. Н.

Известные в литературе экспериментальные данные статических испытаний песчанников обрабатываются в рамках упругопластической теории при дилатансионном неассоциированном течении. Выделен параметр упрочнения (разупрочнения). Построены в инвариантной форме последовательность поверхностей нагружения и паспорт прочности. Прослежена зависимость прочности от начальной пористости песчанника. Выявлена зависимость скорости дилатансии от параметра упрочнения (разупрочнения) и давления.

1. Математическая формулировка модели. Необратимое деформирование геоматериалов обуславливается ростом (или закрытием) внутренних трещин и пор, взаимными подвижками минеральных зерен и движением дислокаций внутри индивидуальных зерен. Относительная роль этих элементарных механизмов меняется с ростом давлений (и температур), что в рамках упругопластической теории выражается как усложнение поверхностей текучести  $\Phi_e=0$ , зависимостей от параметров упрочнения (разупрочнения)  $\kappa_i$ , а также связей между приращениями  $De_{ij}^p$  пластических деформаций и напряжений  $\sigma_{ij}$  (закона течения). Наиболее существенным кинематическим свойством адекватного пластического течения является эффект дилатансионного изменения объема. Количественные его измерения необходимо приводят к неассоциированному закону течения.

Согласно дилатансионной упругопластической модели [1, 2], полные приращения деформаций  $De_{ij}$  являются суммой упругих и пластических  $De_{ij}^p$  составляющих

$$De_{ij} = De_{ij}^e + De_{ij}^p = \varepsilon_{ij} Dt \quad (1.1)$$

Приращения  $De_{ij}$  задаются в смысле Олдройда,  $\varepsilon_{ij}$  — компоненты тензора скоростей деформаций.

Приращение тензора девиатора упругих деформаций определяется приращениями тензора девиатора напряжений

$$De_{ij}^e - \frac{1}{3} De^e \delta_{ij} = DS_{ij} / (2G) \quad (1.2)$$

$$S_{ij} = \sigma_{ij} + \delta_{ij} p, \quad p = -\frac{1}{3} \sigma_{ii}, \quad e^e = e_{ii}^e$$

где  $\delta_{ij}$  — единичный тензор,  $G$  — модуль сдвига, суммирование производится по повторяющимся индексам.

Изменение объемной упругой деформации определяется выражением ( $K$  — модуль объемного сжатия):

$$De^e = -Dp/K \quad (1.3)$$

Приращения пластических деформаций  $De_{ij}^p$  отличны от нуля, если в рассматриваемой точке среды выполнено условие пластичности

$$\Phi_\sigma(p, \tau, \kappa_i) = 0, \quad J_2 = S_{ij} S_{ij} / 2 = 4\tau^2 / 3 \quad (1.4)$$

и идет процесс активного нагружения

$$D_*\Phi_\sigma = \Phi_{\sigma, p} Dp + \Phi_{\sigma, \tau} D\tau > 0 \quad (1.5)$$

для деформационно упрочняющейся среды или

$$D_*\Phi_\sigma = \Phi_{\sigma, p} Dp + \Phi_{\sigma, \tau} D\tau < 0 \quad (1.6)$$

для среды с уменьшающейся прочностью.

Приращения  $De_{ij}^p$  равны нулю, если имеет место разгрузка ( $\Phi_\sigma < 0$ ) или нейтральное нагружение ( $\Phi_\sigma = 0, D_*\Phi_\sigma = 0$ ). Параметры  $\kappa_i$ , характеризующие процессы упрочнения (разупрочнения), будут выбраны ниже.

Приращения пластических деформаций  $De_{ij}^p$  определяются законом течения

$$De_{ij}^p = (\partial\Psi/\partial\sigma_{ij}) D\lambda \quad (1.7)$$

где  $\Psi$  — пластический потенциал. В соответствии со сказанным  $D\lambda > 0$  при выполнении условий (1.4), (1.5) или (1.6) и  $D\lambda = 0$  при разгрузке или нейтральном нагружении. В случае неассоциированного течения  $\Psi \neq \Phi_\sigma$ .

Для определения пластического потенциала  $\Psi$  зададимся связью [2] между пластическими приращениями объема  $De^p$  и сдвига  $D\gamma^p$  ( $\Lambda = \Lambda(p, \kappa_i)$  — скорость дилатансии):

$$De^p = \Lambda |D\gamma^p|, \quad |D\gamma^p| = \sqrt{3I_2'} \quad (1.8)$$

$$I_2' = 1/2 (De_{ij}^p - \delta_{ij} De^p/3) (De_{ij}^p - \delta_{ij} De^p/3)$$

Для сред, необратимо деформирующихся при всестороннем сжатии, и использовании незамкнутых поверхностей нагружения (1.4), как это будет сделано ниже, необходимо под приращениями необратимых деформаций  $De_{ij}^p$  и  $De^p \delta_{ij}$ , входящих в выражения (1.7) и (1.8), понимать разность между полными приращениями пластических деформаций и приращениями их гидростатической части [1]. Если же поверхности текучести имеют замкнутую форму, то учет этого обстоятельства при выборе функций  $\Phi_\sigma$ ,  $\Psi$  и условия (1.8) позволит адекватно описать экспериментальные данные.

На основе формул (1.7) и (1.8) можно получить конкретное выражение

$$\Psi = \frac{4}{3} \tau^2 - 2 \int \Lambda \tau dp + \text{const} \quad (1.9)$$

и записать определяющие уравнения пластического деформирования

$$De_{ij}^p = (S_{ij} + 2/3 \delta_{ij} \Lambda \tau) d\lambda \quad (1.10)$$

Приращение  $D\lambda$  находится из условия, что вдоль поверхности нагружения  $D\Phi_\sigma = 0$ . Последующее исключение приращений напряжения при помощи выражений (1.1)–(1.3) и (1.10) приводит к следующему результату:

$$\begin{aligned} \frac{D\lambda}{Dt} = \frac{1}{2} \left( \frac{3}{4} G \frac{S_{ij} \varepsilon_{ij}}{\tau^2} \frac{\partial \Phi_\sigma}{\partial \tau} - K \frac{\varepsilon_{ii}}{\tau} \frac{\partial \Phi_\sigma}{\partial p} + \right. \\ \left. + \frac{1}{\tau} \frac{D\kappa_i}{Dt} \frac{\partial \Phi_\sigma}{\partial \kappa_i} \right) \left( G \frac{\partial \Phi_\sigma}{\partial \tau} - \Lambda K \frac{\partial \Phi_\sigma}{\partial p} \right)^{-1} \end{aligned} \quad (1.11)$$

Поскольку параметры системы (например,  $G, K$ ) зависят лишь от  $p$  и  $\kappa_i$  (параметр  $K$  может зависеть еще от знака  $Dp$ , если среда необратимо деформируется при всестороннем сжатии и используются лишь незамкнутые поверхности нагружения), но не от температуры, то из энергетиче-

ских уравнений будем использовать лишь неравенство

$$DW^p = \sigma_{ij} D e_{ij}^p > 0 \quad (1.12)$$

**2. Исходные экспериментальные данные.** Воспользуемся результатами [3—6] о трехосных испытаниях цилиндрических образцов песчаника. Осевое сжатие или растяжение (здесь и далее сжимающие напряжения считаются положительными) производилось либо при постоянном боковом давлении  $\sigma_2 = \sigma_3 = \text{const}$ , либо при условии  $\sigma_3/\sigma_1 = C = \text{const}$ . По опытным данным авторы [3, 5] выделяют предел упругости

$$\begin{aligned} \tau = \tau_y = \tau_y^\circ \exp(BC) \quad (C_0 \leq C \leq C_m) \\ \tau = \tau_y^m = \text{const} \quad (C \geq C_m) \end{aligned} \quad (2.1)$$

предел прочности (максимальной)

$$\begin{aligned} \tau = \tau_f = \tau_f^\circ \exp(AC) \quad (C_0 \leq C \leq C_m) \\ \tau = \tau_f^m = \text{const} \quad (C \geq C_m) \end{aligned} \quad (2.2)$$

и остаточную прочность

$$\begin{aligned} \tau = \tau_r = \tau_r^\circ \exp(EC) \quad (C_r \leq C \leq C_m) \\ \tau = \tau_r^m = \text{const} \quad (C \geq C_m), \quad E = \ln(\tau_f^m/\tau_r^\circ)/C_m \end{aligned} \quad (2.3)$$

зависящие только от параметра  $C$ . Здесь и далее верхние индексы  $^\circ$  и  $m$  характеризуют величины, соответствующие аргументам  $C=0$  и  $C=C_m$ .

Предельные линии  $\tau_y$ ,  $\tau_f$  и  $\tau_r$  представлены кривыми 1, 2 и 3 на фиг. 1, а. В выражениях (2.1), (2.2) и (2.3) величины  $A$ ,  $B$ ,  $E$ ,  $C_0$ ,  $C_r \leq C_0$ ,  $C_m$ ,  $\tau_y^\circ$ ,  $\tau_f^\circ$ ,  $\tau_r^\circ$ ,  $\tau_y^m$  — константы среды<sup>1</sup>. При  $C \leq C_0$  или  $C \leq C_r$  (для участка с остаточной прочностью) сдвиговое течение отсутствует (разрушение происходит отрывом). При  $\tau \leq \tau_y$  материал деформируется упруго, при  $\tau > \tau_y$ ,  $C > C_0$  происходит пластическое деформирование образцов, причем после достижения  $\tau = \tau_f$  упрочнение сменяется разупрочнением вплоть до  $\tau = \tau_r$ . При условии  $C_0 \leq C \leq C_m$  пластический сдвиг сопровождается дилатансией, а при  $C \geq C_m$  или  $\tau = \tau_r$  и  $C \geq C_r$  дилатансия отсутствует.

На основе обработки результатов испытаний при  $C = \text{const}$  и  $\sigma_3 = \text{const}$  функция упрочнения была представлена [4] в виде

$$\tau = \tau_y(C_y) + \beta_1 \sqrt{e_1^p} \quad (2.4)$$

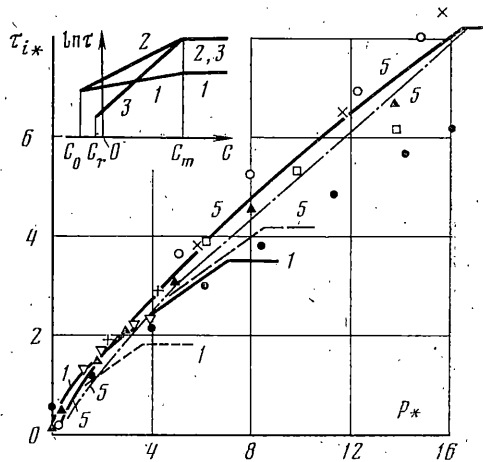
где  $C_y$  — значение параметра  $C$ , соответствующее точке пересечения пути деформирования с поверхностью (2.1),  $\beta_1 = \text{const}$  для фиксированной породы,  $e_1^p$  — осевая пластическая деформация.

Экспериментальные данные, полученные при  $\sigma_3 = \text{const}$  [5], для режима разупрочнения представимы в виде

$$\tau = \tau_f(C_f) - \beta_2 [e_1^p - e_1^p(C_f)] \quad (2.5)$$

где  $C_f$  — значение параметра  $C$ , соответствующее точке пересечения пути деформирования с поверхностью (2.2),  $\beta_2$  — модуль спада.

<sup>1</sup> Эти величины, вообще, зависят от скорости деформирования.



Фиг. 1

Таблица 1

№	$m, \%$	$K \cdot 10^{-4}$	$G \cdot 10^{-4}$	$\tau_y^\circ$	$\tau_f^\circ$	$\tau_r^\circ$	$C_0$
1	0,36	4,9	2,5	89	120	—	-0,21
2	1	2,9	2,8	100	143	—	-0,40
3	1,49	2,9	2,4	104	143	—	-0,29
4	2	3,2	2,6	135	159	—	-0,15
5	6	0,8	0,8	51	65	—	-0,19
6	6	1,4	1,4	60	71	6	—
7	6	—	—	—	150	—	—
8	7,4	1,1	0,8	51	66	—	-0,12
9	13,6	1,1	0,9	24	39	—	-0,20
10	25	0,1	0,1	—	13	—	—

№	$C_m$	A	B	E	$\beta_1 \cdot 10^{-5}$	$\beta_2 \cdot 10^{-5}$	$\mu_0$	Г
1	0,25	5,0	3,5	—	2,4	—	2,4	3,2
2	0,27	4,3	3,4	—	2,7	—	1,2	3,2
3	0,40	5,3	4,2	—	3,0	—	2,5	5,0
4	0,32	6,2	5,1	—	2,1	—	2,3	1,8
5	0,25	8,4	6,8	—	2,3	—	3,3	6,4
6	0,28	6,6	5,1	15,3	2,3	1,5	4,0	10
7	—	—	—	—	—	—	—	—
8	0,28	6,2	4,0	—	1,7	—	5,4	6,7
9	0,18	8,4	6,8	—	1,3	—	10,7	11
10	—	—	—	—	—	—	—	—

Опыты [4], проведенные в условиях  $C = \text{const}$  и  $\sigma_3 = \text{const}$ , показывают, что на участке пластического упрочнения коэффициент поперечной деформации  $\mu$  имеет вид ( $\mu^\circ$ ,  $\Gamma$  — постоянные)

$$\mu = |e_3^p|/e_1^p = \mu^\circ \exp(-\Gamma C) \quad (C_0 \leq C \leq C_m) \quad (2.6)$$

$$\mu = 0,5 \quad (C \geq C_m)$$

На участке разупрочнения, как это следует из опытов [5], величина  $\mu$  приближенно может вычисляться по формуле (2.6).

Значения постоянных, входящих в выражения (1.2), (1.3) и (2.1) — (2.6), для некоторых типов песчаника различной пористости  $m_0$  приведены в табл. 1, где  $N=1-10$  — шифр геоматериала: П-0, Д-9, П-03, П-02, ВО, НВО, Nugget, Д-8, П-04, ВП, а значения размерных величин даны в единицах МПа.

**3. Представление поверхностей текучести.** Будем искать инвариантную форму поверхностей текучести в виде

$$\Phi_\sigma = \tau_* - \tau_{i*}(p_*) - f_i(p_*) \chi_i = 0 \quad (3.1)$$

$$\tau_* = \tau/\tau_f^\circ, \quad p_* = p/p_f^\circ, \quad p_f^\circ = \frac{2}{3}\tau_f^\circ$$

где  $\tau_{i*}$ ,  $f_i$  — функции давления, индекс  $i=1$  соответствует пластическому упрочнению,  $i=2$  — разупрочнению,  $i=3$  — участку остаточной прочности.

Для использования данных (2.1) — (2.6) следует, прежде всего, выразить параметр пути нагружения  $C$  через инварианты тензора напряжений

$$C = \sigma_3/\sigma_1 = (p_* - \tau_*)/(p_* + 2\tau_*) \quad (3.2)$$

Функции  $\tau_{i*}(p_*)$  определяются как

$$\tau_{1*} = \tau_{y*}(p_*), \quad \tau_{2*} = \tau_{f*}(p_*), \quad \tau_{3*} = \tau_{r*}(p_*) \quad (3.3)$$

т. е. соответствуют зависимостям  $\tau_*$  от  $p_*$  вдоль пределов упругости, прочности и остаточной прочности соответственно. Эти функции хорошо описываются следующими выражениями:

$$\begin{aligned} \tau_{i*} &= (Y_i + \alpha_i p_*)^{s_i} \quad (p_{i*} \leq p_* \leq p_{i*}^m) \\ \tau_{i*} &= \tau_{i*}^m \quad (p_* \geq p_{i*}^m) \\ Y_i &= Z_i X_i, \quad \alpha_i = Z_i (1 - X_i) / \tau_{i*}^0, \quad Z_i = (\tau_{i*}^0)^{1/s_i} \\ \tau_{1*}^0 &= \tau_y^0 / \tau_f^0, \quad \tau_{2*}^0 = 1, \quad \tau_{3*}^0 = \tau_r^0 / \tau_f^0 \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$X_1 = \exp(-1/2 B/s_1), \quad X_2 = \exp(-1/2 A/s_2), \quad X_3 = \exp(-1/2 E/s_3)$$

Кусочно-непрерывное представление величин  $\tau_{i*}$  свидетельствует о смене микромеханизмов необратимых деформаций с ростом уровня напряжений. При этом давления  $p_{1*}^m = p_{y*}^m$  и  $p_{2*}^m = p_{3*}^m = p_{f*}^m \approx (\alpha_2^{12} / \alpha_3^{13})^{\xi}$ ,  $\xi = 1/(s_3 - s_2)$  характеризуют хрупкопластический переход, соответственно, в начальной стадии разрушения и на пределе прочности. Давление  $p_{1*} = p_{2*} = p_{0*}$  определяет пересечение предельных линий упругости и прочности. Величины  $p_{y*}^m$ ,  $p_{0*}$  и  $p_{3*} = p_{r*}$  вычисляются по формуле (3.2) для значений  $C = C_m$ ,  $\tau_* = \tau_{y*}^m$ ;  $C = C_0$ ,  $\tau_* = \tau_{f*}(C_0)$ ;  $C = C_r$ ,  $\tau_* = \tau_{r*}(C_r)$ . Параметры  $s_i$  — постоянные для каждого геоматериала. Величины  $X_i$  настолько малы, что  $Y_i$  имеет наибольший порядок  $\sim 0,03$ .

Опыты [4]<sup>2</sup> показывают, что пластические деформации  $e^p$ ,  $\gamma^p$  и  $e_1^p = 1/3(e^p + 2\gamma^p)$  зависят от пути нагружения, а поэтому, вообще, не могут использоваться как параметр  $\kappa_i$ . Вместе с тем обработка результатов экспериментов [4] показала, что параметром упрочнения может служить более сложная комбинация

$$\begin{aligned} \kappa_1 &= p_{y*}^n \sqrt{(e^p + 2\gamma^p)/3} \\ n = n_1 &= \frac{1}{2} \frac{s_1}{\tau_{2*} / \tau_{1*} - 1} \quad (p_{y*} \leq p_{y*}^m) \\ n &= n_1 \quad (p_{f*}^m - p_{y*}) / (p_{f*}^m - p_{y*}^m) \\ & \quad (p_{y*}^m \leq p_{y*} \leq p_{f*}^m) \quad n = 0 \quad (p_{y*} > p_{f*}^m) \end{aligned} \quad (3.5)$$

Здесь  $p_{y*}$  — давление отсчета, соответствующее точке пересечения пути деформирования с предельной упругой линией.

Практическая независимость параметра  $\kappa_1$  от пути нагружения (в противоположность зависимости  $e_1^p$  от этого пути) иллюстрируется табл. 2. Здесь даны экспериментальные значения параметров в точках пересечения двух путей нагружения:  $\sigma_3 = \text{const}$  (первые столбцы) и  $C = \text{const}$  (следующие столбцы) в трех точках, принадлежащих дилатирующим состояниям и определяемым указанными координатами на плоскости  $p_*$ ,  $\tau_*$ . Видно, что значения  $e_1^p$  при разных путях нагружения расходятся в 2–3 раза, тогда как значения  $\kappa_1$  близки друг другу и мало отличаются от значений, соответствующих полуэмпирической формуле (3.5) (последний столбец).

Подбор параметра разупрочнения наталкивается на трудности, связанные с тем, что имеются лишь экспериментальные данные при  $\sigma_3 = \text{const}$ . Предположим, что выражение (2.5) справедливо и в условиях нагружения  $C = \text{const}$ . Тогда параметр разупрочнения можно определить следующим образом:

$$\kappa_2 = \frac{M}{3p_{f*}^q} \Delta(2\gamma^p + e^p), \quad q = \frac{1}{2} \frac{s_2}{1 - (\tau_{3*} / \tau_{2*})} \quad (3.6)$$

<sup>2</sup> Shipman F. H., Johnson J. N., Green S. J. Mechanical properties of two highly porous geologic materials. Terra Tek Inc., AMMRC CTR 74-25, Salt Lake City, Utah, 1974, 60 p.

Таблица 2

$p$	$\tau$	$e_1^p \cdot 10^3$	$p_y$	$\kappa_1$	$e_1^p \cdot 10^3$	$p_y$	$\kappa_1$	$\kappa_1$
5,4	3,2	1,7	4,3	0,22	3,7	2,7	0,20	0,23
6,5	3,5	1,7	5,5	0,24	4,2	3,4	0,23	0,24
9,3	4,2	1,7	8,2	0,24	4,7	5,3	0,28	0,24

Таблица 3

№	$m_0, \%$	$p_{y*}^m$	$p_{f*}^m$	$P_{0*}$	$A_1$	$M^\circ \cdot 10^{-3}$	$s_1$
1	0,36	3,6	7,0	0,17	20	—	0,56
2	1	3,7	6,7	0,03	19	—	0,56
3	1,49	11,8	25,0	0,07	21	—	0,61
4	2	10,5	17,5	0,24	13	—	0,65
5	6	8,5	16,3	0,11	35	—	0,71
6	6	9,0	13,6	—	32	2,1	0,68
7	7,4	5,1	12,3	0,32	26	—	0,60
8	18,6	3,5	7,5	0,09	33	—	0,71

№	$s_2$	$s_3$	$\Delta_1^*$	$a_1$	$a_2$	$b_2$	$a$	$b$
1	0,66	—	1,45	0,30	0,18	—	0,53	—
2	0,62	—	1,40	0,95	0,57	—	0,50	—
3	0,67	—	1,70	0,50	0,30	—	0,49	—
4	0,70	—	1,20	0,10	0,07	—	0,37	—
5	0,75	—	1,65	0,27	0,15	—	0,36	—
6	0,71	0,85	1,90	0,55	0,35	0,20	0,48	0,15
7	0,69	—	1,75	0,26	0,13	—	0,57	—
8	0,75	—	2,00	0,25	0,13	—	0,46	—

Здесь  $p_{f*}$  — давление отсчета, соответствующее точке пересечения пути деформирования с предельной линией прочности;  $\Delta(e^p + 2\gamma^p)$  — приращение величины  $e^p + 2\gamma^p$ , отсчитанное от ее значения на пределе прочности. Используя экспериментальные данные [5], модуль спада  $M$  можно определить формулой

$$M = M^\circ (p_{f*}^m - p_{f*}^\circ)^2 / (p_{f*}^m - 1)^2, \quad (3.7)$$

$$M^\circ = \beta_2^\circ / \tau_f^\circ$$

Функции  $f_i(p_*)$  представимы степенными выражениями

$$f_i(p_*) = A_i p_*^{-m_i}, \quad A_1 = \beta_1 / \tau_f^\circ, \quad A_2 = -1, \quad A_3 = 0, \quad m_1 \approx n, \quad m_2 \approx -q \quad (3.8)$$

Постоянные, входящие в уравнения поверхностей текучести, для некоторых геоматериалов приведены в табл. 3, где  $N=1-8$  соответствует П-0, Д-9, П-03, П-02, ВО, НВО, Д-8, П-04.

Поверхности текучести (3.1) могут быть кусочно линейно аппроксимированы традиционными поверхностями Мора — Кулона

$$2\tau_{i*} - \alpha_i p_* - Y_i = 0 \quad (3.9)$$

Однако величины  $\alpha_i$ ,  $Y_i$  постоянны лишь на малых интервалах значений  $p$ ,  $\tau$ .

На фиг. 1, б приведены данные для предельных поверхностей прочности (сплошные линии и точки), упругости (штриховые линии) и остаточной прочности (штрихпунктирные линии). Кривые 1 и 5 построены на

основе расчета по (3.4); номера кривых совпадают с номерами песчаников (см. табл. 3). Темные точки соответствуют расчету по формуле [7]:

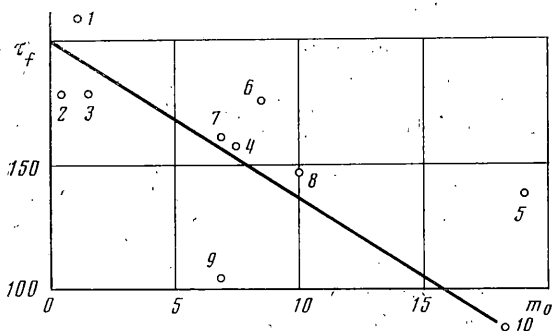
$$\tau_* = \tau_{0*} + \mu p_* [1,5 + \mu p_* (\tau_{i*} - \tau_{0*})]^{-1} \quad (3.10)$$

где  $\mu$  — коэффициент внутреннего трения. В соответствии с рекомендациями [7] для песчаников было положено:  $\tau_{0*} = 0,56$ ,  $\tau_{i*} = 25$ ,  $\mu = 0,7$ .

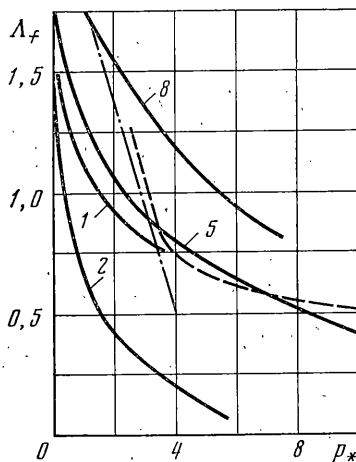
Остальные точки на фиг. 1, б (прямые кресты, темные и светлые треугольники, квадраты, светлые точки) соответствуют данным из [8—10]<sup>3-5</sup>.

Видно, что в координатах  $\tau_{i*}$ ,  $p_*$  данные из<sup>3-5</sup>, [8, 9] группируются относительно кривой 5. Расчет по [7] дает значения, почти совпадающие с кривой 1 вне интервалов малых и больших давлений.

Проанализируем влияние начальной пористости  $m_0$  на прочностные свойства песчаников. На фиг. 2 представлена сводная зависимость от



Фиг. 2



Фиг. 3

$m_0$  (%) максимальной прочности песчаников при фиксированном давлении  $p = 150$  МПа. Прослеживается тенденция к уменьшению  $\tau_f$  (МПа) с ростом  $m_0$ . Точки 1—5 соответствуют материалам П-4, П-0, П-01, Д-8, П-04 [4], а точки 6—10 — Wagon Wheel, RBE-01, Gasbuggy, Rulison, Sulfur Creek<sup>6</sup>. Разброс точек объясняется различиями в цементирующем материале и минеральных составах (помимо возможных ошибок эксперимента). Из табл. 3 видно, что параметры  $s_i$  сравнительно слабо зависят от  $m_0$ .

4. Дилатансионные характеристики. Обратим внимание, что объемная пластическая деформация  $e^p$  выражается через пластический сдвиг  $\gamma^p$  и коэффициент поперечной деформации  $\mu$  следующим образом:

$$e^p = \gamma^p [2\mu(C) - 1] / [\mu(C) + 1] \quad (4.1)$$

Это дает согласно (2.6) прямолинейную зависимость  $e^p \sim \gamma^p$  вдоль пути простого нагружения  $C = \text{const} \leq C_m$ . В соответствии с (3.2) значение  $C$  есть функция  $p_*$  и  $\tau_*$ , а в области дилатансионного деформирования  $\tau_* = \tau_*(p_*, \kappa_i) = \tau_*(p_*, e^p, \gamma^p)$ . Поэтому скорость дилатансии определяется

<sup>3</sup> Daba A. G., Abey A. E., Bonner B. P., Heard H. C., Schock R. N. High-pressure mechanical properties of Kaunata sandstone. Lawrence Laboratory, UCRL-51526, Livermore, 1974. 22 p.

<sup>4</sup> Schock R. N., Abey A. E., Bonner B. P., Daba A., Heard H. C. Mechanical properties of Nugget sandstone. Lawrence Laboratory, UCRL-51447, Livermore, 1973. 19 p.

<sup>5</sup> Косые кресты соответствуют результатам публикации, указанной на стр. 117.

<sup>6</sup> Schock R. N., Heard H. C., Stephens D. R. Comparison of the mechanical properties of graywacke sandstones from several gas stimulation sites. Lawrence Laboratory, UCRL-51261, Livermore, 1972. 24 p.

так:

$$\Lambda = \frac{De^p}{|D\gamma^p|} = \frac{2\mu-1}{\mu+1} + \frac{D}{DC} \left( \frac{2\mu-1}{\mu+1} \right) \frac{DC}{|D\gamma^p|} \quad (4.2)$$

В дальнейшем, учитывая приближенность зависимости  $\mu(C)$ , для упрощения пренебрегаем вторым слагаемым в (4.2). В ближней зоне сразу за пределом упругости или сразу после прохождения максимальной прочности в режиме разупрочнения формула (4.2) запишется в следующем виде:

$$\Lambda = \Lambda_i + \kappa_i \Gamma(1 + \Lambda_i) (2 - \Lambda_i) p_*^* f_i (p_* + 2\tau_{i*})^{-1} \quad (i=1, 2) \quad (4.3)$$

где  $\Lambda_1 = \Lambda_y(p_*)$ ,  $\Lambda_2 = \Lambda_f(p_*)$  — значения скорости дилатансии на поверхностях упругости и прочности.

Расчеты, проведенные по (4.2), показали, что величина  $\Lambda$  в широком диапазоне значений параметров  $p_*$ ,  $\kappa_i$  может быть определена по приближенной формуле

$$\Lambda = \Lambda_i^* \exp [a_i (p_{i*} - p_*) - b_i (p_{i*} - p_{0*}^*)]$$

$$\Lambda_2^* = \Lambda_1^* \exp [-b_1 (p_{1*}^m - p_{0*}^*)], \quad p_{1*}^* = p_{0*}, \quad p_{2*}^* = p_{1*}^m \quad (4.4)$$

$$p_{1*} \leq p_* \leq p_{1*}^m \quad (i=1) \quad p_* \leq p_{2*} \quad (i=2)$$

Здесь индекс  $i=1$  соответствует пластическому упрочнению,  $i=2$  — разупрочнению,  $p_{i*}$  — давление в точке пересечения поверхности текучести с поверхностью максимальной прочности (при  $i=1$ ) или с поверхностью остаточной прочности (при  $i=2$ ), определяемое в зависимости от параметров  $\kappa_i$  приближенными формулами  $p_{1*} = p_{0*} + (1 - p_{0*}) (\kappa_1 / \kappa_{1f}^0)^a$  и  $p_{2*} = p_{1*}^m - (p_{1*}^m - \tau_{r*}^0) (\kappa_2 / \kappa_{2r}^0)^b$ . Параметры  $a$  и  $b$  появляются из-за обращения формул (3.1) при  $i=1$ ,  $\tau_* = \tau_{2*}$  и  $i=2$ ,  $\tau_* = \tau_{3*}$ . Их вычисленные значения, а также значения констант  $\Lambda_i^*$ ,  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $b_1 = a_2$ ,  $b_2$  приведены в табл. 3.

Выражение (4.4), в частности, позволяет определить характерные значения  $\Lambda$  вдоль предельных поверхностей упругости  $\Lambda_y$ , прочности  $\Lambda_f$  и остаточной прочности  $\Lambda_r$  (со стороны участка разупрочнения)

$$\Lambda_y = \Lambda_1^* \exp [-a_1 (p_* - p_{0*}^*)] \quad (4.5)$$

$$\Lambda_f = \Lambda_1^* \exp [-a_2 (p_* - p_{0*}^*)], \quad \Lambda_r = \Lambda_2^* \exp [b_2 (p_{1*}^m - p_*)]$$

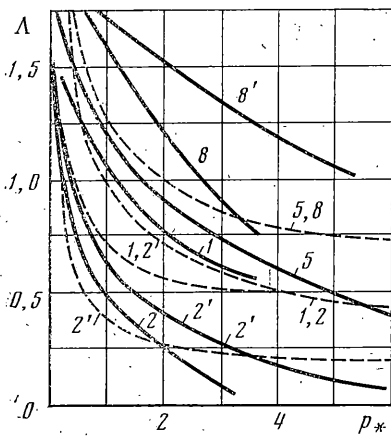
Из выражений (4.3), (4.4) видно, что при фиксированном значении  $p_*$  скорость дилатансии после достижения предела упругости растет с ростом  $\kappa_1$ , а в запредельной области убывает с ростом  $\kappa_2$ . Видно также, что величина  $\Lambda$  падает с ростом  $p_*$  (особенно сильно в области малых значений  $p_*$  и вдоль поверхности упругости).

Приведем данные по скоростям дилатансии для высокопористых песчанников Nugget и ВП, испытанных в условиях постоянного бокового давления

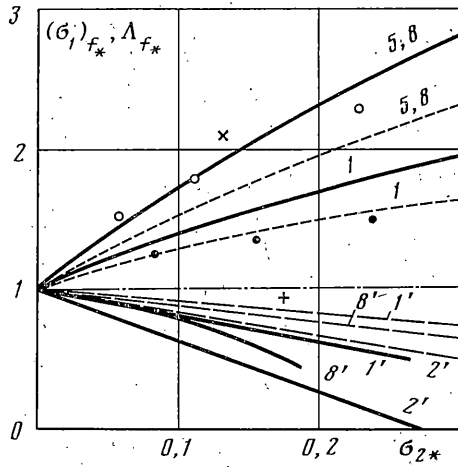
$\sigma_3$ (МПа)	0	0	0	0	0	0	0	100	100	100
$p$ (МПа)	0	20	40	80	93	97	100	300	370	400
$\tau$ (МПа)	0	30	60	120	140	145	150	300	400	450
$e^p$ (%)	0	-0,20	-0,22	-0,08	0,22	0,42	0,79	0,07	0,26	0,49
$\gamma^p$ (%)	0	0,26	0,33	0,56	0,78	0,90	1,10	0,41	0,97	1,43
$\Lambda$	-0,75	-0,29	0,60	1,35	1,70	1,85		0,34	0,50	
$\sigma_3$ (МПа)	190	190	190	190	190	400	400	400	400	400
$p$ (МПа)	190	260	290	340	340	400	470	530	570	600
$\tau$ (МПа)	0	100	150	175	225	0	100	200	250	300
$e^p$ (%)	0	-4,0	-2,5	0	8,0	0	-1,4	-3,6	-3,6	1,0
$\gamma^p$ (%)	0	9,2	17,5	23,8	43,0	0	5,0	13,0	18,6	35,0
$\Lambda$	-0,43	0,18	0,40	0,41		-0,28	-0,28	0	0,28	



С этой целью обработаны результаты испытаний, представленные в виде диаграмм  $\sigma_1 \sim e_1$  и  $\sigma_1 \sim e_3$  в<sup>7</sup>. При этом учитывалась зависимость коэффициента Пуассона и модуля упругости от  $p$ . Последние столбцы для каждого значения  $\sigma_3$  характеризуют предельные состояния образцов. Видно, что при  $\sigma_3 = 0$  деформирование песчаника Nugget начинается<sup>8</sup> с закрытия пор ( $\Lambda < 0$ ), а затем материал интенсивно разуплотняется. При  $\sigma_3 = 100$  МПа поры закрыты и деформирование происходит вначале упруго, а затем имеет место дилатансионное разуплотнение образца. Поведение



Фиг. 4



Фиг. 5

песчаника ВП при всех значениях  $\sigma_3$  характеризуется уплотнением материала, сменяющимся разуплотнением.

На фиг. 3 приведены значения  $\Lambda_f(p_*)$  для ряда песчаников. Для сравнения штриховой кривой представлено значение  $\Lambda_f$  для гранита Westerly [11]; штрихпунктирная кривая соответствует результатам из<sup>9</sup>. На фиг. 4 сплошные линии соответствуют значениям  $\Lambda_y(p_*)$ .

Отметим тенденцию увеличения  $\Lambda$  с ростом  $m_0$  в области небольших значений  $p_*$ .

**5. Модель ассоциированного течения.** Если такая модель была бы справедлива, то пластический потенциал  $\Psi$  должен совпадать с функцией текучести  $\Phi_\sigma$ . Тогда соответствующая скорость дилатансии определится по правилу

$$\Lambda_a = De^p / |D\gamma^p| = 2(\partial\Phi_\sigma / \partial p_*) / (\partial\Phi_\sigma / \partial \tau_*) \quad (5.1)$$

и при использовании найденной формы  $\Phi_\sigma$  (3.1) получим для участка упрочнения

$$\Lambda_a = 2(D\tau_{1*} / Dp_* + \kappa_1 Df_1 / Dp_*) \quad (5.2)$$

Видно, что  $\Lambda_a$  падает с ростом параметра  $\kappa_1$ . Это противоречит указанным выше фактическим данным. Пунктирные линии 1, 2, 5, 8 (см. фиг. 4) соответствуют значениям  $\Lambda_a = (\Lambda_a)_y$  вдоль поверхностей упругости, а сплошные — фактическим данным  $\Lambda_y$ . Кривые 2', 8' соответствуют значениям  $(\Lambda_a)_f$  и  $\Lambda_f$  вдоль поверхности прочности. В отличие от случая песков, где всюду  $\Lambda_a \gg \Lambda$ , для песчаников большой пористости на некотором интервале значений  $p_*$  возможна ситуация  $(\Lambda_a)_y < \Lambda$ . При очень малых и больших значениях  $p_*$  для всех песчаников  $(\Lambda_a)_y > \Lambda$ . С ростом параметра  $\kappa_1$  расхождение между величинами  $\Lambda_a$  и  $\Lambda$ , как правило, увеличивается.

<sup>7</sup> См. публикации, указанные на с. 117 и 119.

<sup>8</sup> На этапе закрытия пор следовало бы учесть и эффект гидростатического уплотнения. К сожалению, необходимые экспериментальные данные отсутствуют.

<sup>9</sup> См. публикацию, указанную на с. 119.

В случае простого нагружения величину  $(\Lambda_a)_y$  можно выразить через два параметра ( $B$  и  $C$ ):

$$(\Lambda_a)_y = \frac{2B(1-C)^2}{3+B(1+2C)(1-C)} \quad (C = \text{const}) \quad (5.3)$$

Отсюда следует, что величина  $(\Lambda_a)_y$  увеличивается с ростом  $B$ . Однако из опытов [4] не следует существования какой-либо корреляционной связи между скоростью дилатансии и величиной параметра  $B$ .

**6. Диссипация механической работы.** Первичный контроль успешного подбора реологической модели связан с проверкой условия неотрицательности пластической работы. Согласно (1.12), (1.10), это условие сводится к неравенству

$$\Lambda \leq 2\tau^*/p_* \quad (6.1)$$

Воспользовавшись выражениями (3.4) и (4.4), можно показать, что условие (6.1) выполнится, если справедливы неравенства

$$\tau_i^* \circ ki / (2,72a_i) < (2/\Lambda^i)^{1/ki}, \quad ki = 1 - si, \quad a_3 = b_2 \quad (i=1, 2, 3) \quad (6.2)$$

$$\Lambda_1 = \Lambda_1^* \exp(a_1 p_{0*}), \quad \Lambda_2 = \Lambda_1^* \exp(a_2 p_{0*}), \quad \Lambda_3 = \Lambda_2^* \exp(b_2 p_{j*}^m)$$

Для всех исследованных песчаников неравенства (6.2) оказались справедливыми. В частном случае нагружения при  $\sigma_2 = \sigma_3$  условие (6.1) может быть записано через параметры  $\mu_0$  и  $\Gamma$ , введенные в [4]

$$2\mu^0 \leq (1 + \sqrt{2})\Gamma \quad (6.3)$$

Для всех опытов [4] с различными геоматериалами неравенство (6.3) выполняется.

Заметим, что условие диссипации механической работы (6.1) допускает различные соотношения между фактической скоростью дилатансии и значением  $\Lambda_a$ . Так, на предельных поверхностях упругости или прочности (со стороны участка разупрочнения) неравенство (6.1) можно записать в виде

$$\Lambda \leq \Lambda_a (Y_i + \alpha_1 p_*) / (si \alpha_1 p_*) \quad (6.4)$$

Отсюда следует, что лишь при  $Y_i = 0$ ,  $si = 1$  необходимо выполнение условия  $\Lambda \leq \Lambda_a$ . Если диссипация пластической работы отсутствует, то всегда должно быть  $\Lambda \geq \Lambda_a$ . В общем случае возможны ситуации  $\Lambda \leq \Lambda_a$  или  $\Lambda > \Lambda_a$ .

Согласно излагаемой здесь упругопластической модели, промежуточное напряжение  $\sigma_2$  влияет на прочностные и дилатансионные характеристики среды. Для демонстрации этого эффекта на фиг. 5 построены зависимости приведенных осевой нагрузки  $(\sigma_1)_{f*} = (\sigma_1)_f / (\sigma_1)_f^0$  (кривые 1, 5, 8) и скорости дилатансии  $\Lambda_{f*} = \Lambda_f / \Lambda_f^0$  (кривые 1, 2, 8), соответствующие максимальной прочности, от величины приведенного напряжения  $\sigma_{2*} = \sigma_2 / (\sigma_1)_f$  для путей нагружения  $\sigma_2 = \sigma_3$  (сплошные линии) и  $\sigma_1 \neq \sigma_2 \neq \sigma_3 = 0$  (штриховые линии). Светлые и темные точки соответствуют результатам из [10] при  $\sigma_2 = \sigma_3$  и  $\sigma_3 = 0$ ; косой и прямой крест соответствуют данным из [8] для  $\sigma_2 = \sigma_3$  и  $\sigma_3 = 0$ .

Штрихпунктирная кривая соответствует значениям  $(\sigma_1)_{f*}$  и  $\Lambda_{f*}$ , полученным в предположении о независимости прочностных и дилатансионных характеристик среды от величины  $\sigma_2$  (концепция Мора). Видно качественное соответствие кривых данным опытов [8] ( $\sigma_2 = \sigma_3$ ), [10, 12]. Для получения лучшего количественного согласования расчетных кривых с опытами необходимо, по-видимому, дополнительно учитывать эффект третьего инварианта тензора напряжения. Резкий выброс данных [8] для пути нагружения  $\sigma_3 = 0$  может объясняться раскалыванием образцов, непредотвращенным специальными условиями передачи нагрузки или наличием предварительных трещин в образце.

Авторы признательны А. Н. Ставрогину, Е. Д. Певзнеру за предоставление дополнительных опытных данных и консультации и Н. В. Зволинскому за полезное обсуждение.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Николаевский В. Н. О связи объемных и сдвиговых пластических деформаций и об ударных волнах в мягких грунтах.— Докл. АН СССР, 1967, т. 177, № 3, с. 542—545.
2. Николаевский В. Н., Сырников Н. М., Шефтер Г. М. Динамика упругопластических дилатирующих сред.— Успехи механики деформируемых сред: Сб. статей. М.: Наука, 1975, с. 397—413.
3. Каталог механических свойств горных пород. Л.: ВНИМИ, 1972. 267 с.
4. Ставрогин А. Н., Прогосеня А. Г. Пластичность горных пород. М.: Недра, 1979. 301 с.
5. Ставрогин А. Н., Тарасов Б. Г., Ширкес О. А., Певзнер Е. Д. Прочность и деформируемость горных пород в допредельной и запредельной областях.— Физ.-техн. пробл. разработки полезн. ископаемых, 1981, № 6, с. 3—11.
6. Ставрогин А. Н., Певзнер Е. Д., Тарасов Б. Г. Запредельные характеристики хрупких горных пород.— Физ.-техн. пробл. разработки полезн. ископаемых, 1981, № 4, с. 8—15.
7. Юхансон К., Персон П. Детонация взрывчатых веществ. М.: Мир, 1973. 352 с.
8. Чирков С. Е. Прочность горных пород при трехосном неравнокомпонентном сжатии.— Физ.-техн. пробл. разработки полезн. ископаемых, 1976, № 1, с. 11—17.
9. Brook N. Estimating the triaxial strength of rocks.— Internat. J. Rock Mech. Mining Sci. and Geomech. Abstr., 1979, v. 16, No. 4, p. 261—264.
10. Bieniawski Z. T. Deformational behavior of fractured rocks under multiaxial compression.— In: Structure, Solid Mechanics and Engineering design. L.: Wiley, 1971, pt 1, p. 589—598.
11. Brace W. F., Paulding B. W., Scholz C. Dilatancy in the fracture of crystalline rocks.— J. Geophys. Res., 1966, v. 71, No. 16, p. 3939—3953.
12. Mogi K. Flow and fracture of rock under general triaxial compression.— In: Proc 4th Internat. Congress Rock, Mech., Montreux, 1979, v. 3. Rotterdam, 1980, p. 123—130.

Москва

Поступила в редакцию  
8.IX.1982