

УДК 539.214

ТРЕХМЕРНЫЕ КОНТАКТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ МНОГОСЛОЙНОГО УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО ПАКЕТА

КУЗЬМЕНКО В. И.

Полученные результаты в теории краевых и контактных задач для слоистых сред относятся, как правило, к упругим и вязкоупругим многослойным телам бесконечных размеров [1–5]. В [6] предложена и исследована постановка контактных задач для упругопластических слоистых тел конечных размеров с учетом неполного контакта (отставаний) слоев в рамках теории малых упругопластических деформаций; на основе такой постановки получено численное решение контактных задач для многослойного пакета в условиях плоской деформации [7].

Рассматривается трехмерная задача о действии штампов на упругопластическое слоистое тело специальной формы — многослойный пакет. Учет возможного отставания слоев приводит к условиям в виде неравенств на поверхностях возможного контакта. Для решения возникающей неклассической задачи математической физики использован вариационный подход [8–10]. Развита и обоснована метод декомпозиции (разложения) исходной трехмерной задачи на последовательность некоторых двумерных вариационных задач. Представлены примеры численного решения задач о сжатии трехслойного пакета плоскими и выпуклыми штампами. Выполнен анализ качественных особенностей упругопластического деформирования.

1. Под слоистым телом [6] будем понимать систему тел (слоев) $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_N$, форма и взаимное положение которых таковы, что в исходном недеформированном состоянии каждый слой соприкасается по крайней мере с одним из остальных слоев системы; площадки контакта в процессе деформирования могут только уменьшаться (неполный контакт слоев). Рассматриваются слоистые тела специальной формы — многослойные пакеты. Обозначим через (x_1, x_2, x_3) координаты декартова пространства. Слои Ω_k ограничены двумя плоскостями $x_3 = H_k = \text{const}$, $x_3 = H_{k+1} = \text{const}$ и цилиндрической поверхностью L_k с образующей $l_k(x_1, x_2) = 0$ и направляющей, параллельной оси x_3 . Линия $l_k(x_1, x_2) = 0$ предполагается замкнутой, кусочно-гладкой, без самопересечений и точек возврата, а постоянные $H_1, H_2, \dots, H_N$ удовлетворяют условиям $H_1 > H_2 > \dots > H_k > H_{k+1} > \dots > H_N$.

Совокупность слоев описанной формы будем называть многослойным пакетом. Перемещения и деформации в точках пакета предполагаются малыми.

Многослойный пакет находится между двумя жесткими телами с уравнениями поверхностей $x_3 = \Psi_+(x_1, x_2)$, $x_3 = \Psi_-(x_1, x_2)$, ограничивающими возможные перемещения верхней и нижней граней пакета. Случаи $\Psi_+ < H_1$ и $\Psi_- > H_N$ не исключаются и соответствуют внедрению жестких тел в многослойный пакет. Если на гранях пакета действуют штампы, то вне штампов следует положить $\Psi_+(x_1, x_2) = t$, $\Psi_-(x_1, x_2) = -t$ для достаточно больших t . Каждый слой Ω_k находится под действием массовых сил $F_i^{(k)}(x_1, x_2, x_3)$ и поверхностных сил $X_i^{(k)}(x_1, x_2, x_3)$, распределенных по боковой поверхности L_k .

Принимается, что трение между слоями, а также между гранями пакета и ограничивающими поверхностями отсутствует. Слои при деформировании могут отставать один от другого.

Сформулируем условия на контактных поверхностях. Обозначим через S_k площадь, ограниченную образующей $l_k(x_1, x_2) = 0$. Как обычно, под u_i ,

ε_{ij} , σ_{ij} будем понимать вектор малых перемещений, тензор малых деформаций и тензор напряжений, отнесенный к недеформированному состоянию пакета. Номер слоя, к которому относится данная величина, обозначен верхним индексом.

Взаимодействие слоев Ω_k и Ω_{k+1} в произвольной точке (x_1, x_2) общей границы $C_k \cap C_{k+1}$ характеризуется условиями [6]:

$$u_3^{(k)} \geq u_3^{(k+1)}, \quad \sigma_{13} = \sigma_{32} = 0, \quad \sigma_{33} \leq 0, \quad \sigma_{33} [u_3^{(k)} - u_3^{(k+1)}] = 0 \quad (k=1, 2, \dots, N) \quad (1.1)$$

Условия вида $u_3^{(k)} \geq u_3^{(k+1)}$ выражают требование взаимного непроникания слоев. Условия $\sigma_{33} \leq 0$ означают, что нормальные напряжения на контактных поверхностях не могут быть растягивающими, причем если в некоторой точке произошло отставание ($u_3^{(k)} > u_3^{(k+1)}$), то $\sigma_{33} = 0$. Подчеркнем, что при формулировке условий (1.1) не предполагается, что фактические площадки контакта известны.

Аналогично в каждой точке площадок C_1 и C_N возможного контакта граней пакета с поверхностями ограничивающих тел должны быть выполнены условия

$$u_3^{(1)} \leq \Psi_+, \quad \sigma_{13} = \sigma_{32} = 0, \quad \sigma_{33} \leq 0, \quad \sigma_{33} [u_3^{(1)} - \Psi_+] = 0 \quad (1.2)$$

$$u_3^{(N)} \geq \Psi_-, \quad \sigma_{13} = \sigma_{32} = 0, \quad \sigma_{33} \leq 0, \quad \sigma_{33} [u_3^{(N)} - \Psi_-] = 0 \quad (1.3)$$

Предполагается, что внешние нагрузки изменяются пропорционально одному и тому же параметру и обеспечивают процесс активного нагружения во всех точках пакета. Материал считается однородным в направлении x_3 . Используются соотношения теории малых упругопластических деформаций в форме А. А. Ильюшина [11]:

$$\sigma_{ij} = 2\mu_k(x_1, x_2) \varepsilon_{ij} + \lambda_k(x_1, x_2) \theta \delta_{ij} - 2\mu_k(x_1, x_2) \omega_k(x_1, x_2, e_u) e_{ij} \quad (1.4)$$

$$\theta = \varepsilon_{ii}, \quad e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \frac{1}{3} \theta \delta_{ij}, \quad e_u = \left(\frac{2}{3} e_{ij} e_{ij} \right)^{1/2}$$

Функция $\omega_k(x_1, x_2, e_u)$ удовлетворяет условиям [12]:

$$0 \leq \omega_k(x_1, x_2, e_u) \leq \frac{\partial (e_u \omega_k(x_1, x_2, e_u))}{\partial e_u} \leq \alpha_k < 1, \quad \frac{\partial \omega_k(x_1, x_2, e_u)}{\partial e_u} \geq 0$$

Присоединяя к соотношениям (1.1) — (1.4) уравнения равновесия, соотношения Коши и граничные условия в напряжениях, получаем замкнутую математическую постановку задачи об определении u_i , ε_{ij} , σ_{ij} . Однако такая постановка содержит условия в виде неравенств, поэтому задача не может быть сведена к классическим задачам математической физики и решена классическими средствами.

2. Для каждого слоя Ω_k введем пространство С. Л. Соболева $[W_2^1(\Omega_k)]^3$, содержащее вектор-функции $\mathbf{v}(\mathbf{x}) = (v_1(x), v_2(x), v_3(x))$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$, определенные в области Ω_k , и такие, что существует интеграл

$$\int_{\Omega_k} \left(v_i v_i + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) d\Omega \quad (2.1)$$

Введем в $[W_2^1(\Omega_k)]^3$ скалярное произведение

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega_k} \left(u_i v_i + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) d\Omega$$

и определим гильбертово пространство H вектор-функций $\mathbf{v}$, заданных в области $\Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \dots \cup \Omega_N$ как прямое произведение пространств $[W_2^1(\Omega_k)]^3$ ($k=1, 2, \dots, N$).

Выделим множество допустимых перемещений V , в которое включим перемещения $v \in H$, удовлетворяющие кинематическим условиям из (1.1) — (1.3):

$$\begin{aligned} v_3^{(h)}(x_1, x_2, H_h) &\geq v_3^{(h+1)}(x_1, x_2, H_h), & V(x_1, x_2) &\in C_h \cap C_{h+1} \\ v_3^{(1)}(x_1, x_2, H_1) &\leq \Psi_+(x_1, x_2), & V(x_1, x_2) &\in C_1 \\ v_3^{(N)}(x_1, x_2, H_N) &\geq \Psi_-(x_1, x_2), & V(x_1, x_2) &\in C_N \end{aligned} \quad (2.2)$$

Множество V — выпуклое и замкнутое подмножество пространства H . Тогда [6] среди всех допустимых перемещений $v \in H$ действительным перемещениям $u \in V$ соответствует наименьшее значение функционала

$$\begin{aligned} J(v) = \sum_{h=1}^N \left\{ \int_{\Omega_h} \left[-\frac{1}{2} \lambda_h(x_1, x_2) \vartheta^2 - \mu_h(x_1, x_2) \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij} - \right. \right. \\ \left. \left. - 3\mu_h(x_1, x_2) \int_0^{e_u} s \omega_h(x_1, x_2, s) ds - F_i^{(h)} v_i \right] d\Omega - \int_{L_h} X_i^{(h)} v_i dL \right\} \end{aligned} \quad (2.3)$$

Наоборот, решение вариационной задачи

$$\inf_{v \in V} J(v) \quad (2.4)$$

является обобщенным решением задачи в исходной постановке. При некоторых естественных ограничениях на функции $F_i^{(h)}$, $X_i^{(h)}$ доказано [6] существование и единственность решения вариационной задачи (2.4) для сложных тел произвольной формы.

В дальнейшем функционал (2.3) заменяется последовательностью квадратичных функционалов с использованием метода упругих решений [11, 12] в форме дополнительных напряжений. На p -м шаге возникающего итерационного процесса производится решение вариационной задачи

$$\inf_{v \in V} J^{(p)}(v) \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} J^{(p)}(v) = \sum_{h=1}^N \left\{ \int_{\Omega_h} \left[-\frac{1}{2} \lambda_h(x_1, x_2) \vartheta^2 + \mu_h(x_1, x_2) \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij} - \right. \right. \\ \left. \left. - 2\mu_h(x_1, x_2) \omega_h(x_1, x_2, e_u^{(p-1)}) \varepsilon_{ij}^{(p-1)} \varepsilon_{ij} - F_i^{(h)} v_i \right] d\Omega - \int_{L_h} X_i^{(h)} v_i dL \right\} \end{aligned} \quad (2.6)$$

3. Вариационный подход образует универсальную основу для численного решения задач с ограничениями в виде неравенств [7, 13, 14]. Обычно при помощи того или иного способа дискретизации исходная вариационная задача типа (2.4) приближенно заменяется задачей нелинейного программирования. Повышение точности достигается увеличением числа дискретных параметров, а следовательно, увеличением размерности задачи нелинейного программирования. Необходимое количество параметров, особенно в трехмерных задачах, оказывается настолько большим, что прямое решение задач нелинейного программирования сопряжено со значительными трудностями и во многих случаях не может быть реализовано. Один из возможных путей преодоления такого рода трудностей состоит в разложении (декомпозиции) исходной задачи на последовательность более простых, допускающих эффективное решение задач [15].

Введем для слоя Ω_h местную систему координат (x^h, y^h, z^h) с началом в точке пересечения оси x_3 с нижней гранью слоя; направление осей x^h, y^h, z^h совпадает с направлением осей x_1, x_2, x_3 . Если это не вызывает

недоразумений, индексы для сокращения записи опускаются. Используя идею Л. В. Канторовича [16], представим перемещения $v \in [W_2^1(\Omega_k)]^3$ в виде

$$v_i(x, y, z) = \sum_{m=1}^{n_k} U_{im}(x, y) \Phi_{im}(z) \quad (3.1)$$

где $U_{im}(x, y)$ — новые искомые функции, $\Phi_{im}(z)$ — некоторые заданные функции. Представление (3.1) позволяет приближенно заменить вариационную задачу для функций v_1, v_2, v_3 , определенных в трехмерной области, вариационной задачей для функций U_{im} , определенных в двумерной области. Снижение размерности связано с увеличением количества искоемых функций, поэтому эффективность указанной замены определяется удачным выбором функций $\Phi_{im}(z)$. Поскольку функционал (2.6) является квадратичным, то представляется естественным в качестве $\Phi_{im}(z)$ выбирать ортогональные, в частности тригонометрические, функции.

Рассмотрим функцию $v \in [W_2^1(\Omega_k)]^3$ при фиксированных x, y как функцию от z , определенную на отрезке $[0, h]$ ($h = H_k - H_{k+1}$), и доопределим v_1 и v_2 на $(-\infty, +\infty)$ как четные функции, а v_3 — как нечетную функцию с периодом $2h$. Чтобы устранить возникающие разрывы функций $\partial v_1 / \partial z, \partial v_2 / \partial z, v_3$ в точках $z = nh, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, введем следующие дополнительные функции: $g_1(x, y, z) = \varphi_1(x, y) (z/h)^2 - \varphi_2(x, y) (1 - z/h)^2$, $g_2(x, y, z) = \psi_1(x, y) (z/h)^2 - \psi_2(x, y) (1 - z/h)^2$, $g_3(x, y, z) = w_1(x, y) z/h + w_2(x, y) (1 - z/h)$.

Аппроксимируя разность $v_i(x, y, z) - g_i(x, y, z)$ тригонометрическими полиномами, получаем для $v_i(x, y, z)$ искомое представление в форме (3.1):

$$\begin{aligned} v_1(x, y, z) &= g_1(x, y, z) + U_0(x, y) + \sum_{m=1}^{n_k} U_m(x, y) \cos \frac{m\pi z}{h} \\ v_2(x, y, z) &= g_2(x, y, z) + V_0(x, y) + \sum_{m=1}^{n_k} V_m(x, y) \cos \frac{m\pi z}{h} \\ v_3(x, y, z) &= g_3(x, y, z) + \sum_{m=1}^{n_k} W_m(x, y) \sin \frac{m\pi z}{h} \end{aligned} \quad (3.2)$$

Таким образом, задача нахождения трех функций $v_1(x, y, z), v_2(x, y, z), v_3(x, y, z)$ заменяется задачей определения для каждого слоя $8 + 3n_k$ функций $\varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2, w_1, w_2, U_0, V_0, U_m, V_m, W_m$ ($m = 1, 2, \dots, n_k$), заданных в двумерной области C_k .

Потребуем, чтобы новые искомые функции были элементами пространства С. Л. Соболева $W_2^1(C_k)$, определенного для двумерной области C_k аналогично пространству $[W_2^1(\Omega_k)]^3$. Применяя к интегралу (2.1) теорему Фубини, получаем, что функции (v_1, v_2, v_3) , определенные согласно (3.2), принадлежат пространству $[W_2^1(\Omega_k)]^3$ и образуют в нем подпространство. Прямое произведение таких подпространств для $k = 1, 2, \dots, N$ является подпространством H_T пространства H . Из полноты системы тригонометрических функций следует, что любой элемент пространства H может быть получен как предельная точка некоторой последовательности из H_T .

Очевидно, что с учетом представления (3.2) условия (2.2) заменяются условиями, налагаемыми только на функции $w_1^{(k)}(x, y)$ и $w_2^{(k)}(x, y)$ ($k = 1, 2, \dots, N$), и имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} w_2^{(k)}(x, y) &\geq w_1^{(k+1)}(x, y), \quad V(x, y) \in C_k \cap C_{k+1} \quad (k = 1, 2, \dots, N-1) \\ w_1^{(1)}(x, y) &\leq \Psi_+(x, y), \quad V(x, y) \in C_1, \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$w_2^{(N)}(x, y) \geq \Psi_-(x, y), \quad V(x, y) \in C_N$$

Функции (v_1, v_2, v_3) , определенные согласно (3.2), при $w_1^{(k)}, w_2^{(k)}$, удовлетворяющих условиям (3.3), образуют выпуклое замкнутое множество V_T пространства H_T .

Вариационная задача (2.5) приближенно заменяется следующей:

$$\inf_{v \in V_T} J^{(p)}(v) \quad (3.4)$$

4. Разобьем введенные в п. 3 новые искомые функции на $\sum_{k=1}^N (3+n_k)+1$ групп:

$$S_1^{(k)} = \{w_1^{(k)}, w_2^{(k)}, w_1^{(k+1)}, w_2^{(k+1)}\}, \quad (k=1, 2, \dots, N-1)$$

$$S_1^{(0)} = \{w_1^{(1)}, w_2^{(1)}\}, \quad S_1^{(N)} = \{w_1^{(N)}, w_2^{(N)}\}, \quad S_2^{(k)} = \{U_0^{(k)}, V_0^{(k)}\},$$

$$S_3^{(k)} = \{\Phi_1^{(k)}, \Phi_2^{(k)}, \Psi_1^{(k)}, \Psi_2^{(k)}\} \quad (4.1)$$

$$T_1^{(k)} = \{U_1^{(k)}, V_1^{(k)}, W_1^{(k)}\}, \dots, \quad T_{n_k}^{(k)} = \{U_{n_k}^{(k)}, V_{n_k}^{(k)}, W_{n_k}^{(k)}\} \quad (k=1, 2, \dots, N)$$

Сопоставим каждой группе функций так называемую базисную вариационную задачу с тем же наименованием. Базисная вариационная задача для некоторой группы функций из (4.1) заключается в определении функций этой группы, доставляющих значение точной нижней грани функционалу (2.6) при фиксированных функциях остальных групп. Отметим, что в соответствии с условиями (3.3) экстремальные задачи с ограничениями возникают только для функций группы $S_1^{(k)}$. Остальные базисные вариационные задачи являются задачами безусловной оптимизации. Каждая базисная вариационная задача состоит в определении небольшого числа (не более четырех) функций, заданных в двумерной области, существенно проще исходной вариационной задачи и допускает эффективное решение на ЭВМ за сравнительно короткое время.

Для получения приближенного решения предлагается итерационный алгоритм поочередного циклического решения базисных вариационных задач, обобщающий метод покоординатного спуска Гаусса — Зейделя [15]. На каждом шаге такого итерационного процесса функционал $J^{(p)}$ убывает. Учитывая также, что $J^{(p)}(v)$ является выпуклым и дифференцируемым по Гато, получаем, что возникающая в итерационном процессе последовательность $\{v_{1n}, v_{2n}, v_{3n}\}$ является минимизирующей последовательностью для функционала $J^{(p)}$ на множестве V_T . Как показано в [6], из такой последовательности можно извлечь подпоследовательность, слабо сходящуюся к решению вариационной задачи (3.4).

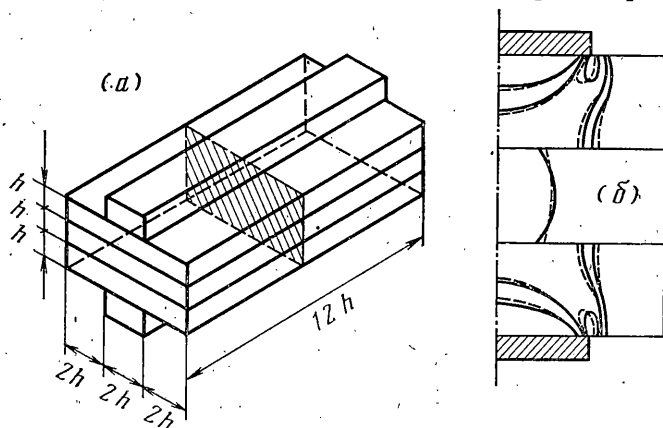
Очевидно, что скорость сходимости итерационного процесса, характеризующая эффективность декомпозиции, определяется степенью взаимной связанности групп функций (4.1) при подстановке представления (3.2) в функционал $J^{(p)}(v)$. Отметим, прежде всего, что группы функций, соответствующие различным слоям, за исключением $S_1^{(k)}$, взаимно независимы. Далее, благодаря ортогональности тригонометрических функций группы $T_1, \dots, T_m, \dots, T_{n_k}$ ($k=1, 2, \dots, N$) также непосредственно не связаны между собой. Указанные обстоятельства и определяют высокую эффективность алгоритма декомпозиции, подтвержденную численными расчетами на ЭВМ.

Касаясь решения базисных вариационных задач, укажем, что по своей структуре такие задачи родственны вариационным задачам двумерной теории упругости и к ним могут быть применены хорошо апробированные алгоритмы численного решения, основанные, в частности, на конечно-разностной и конечноэлементной аппроксимации. Базисные задачи $S_1^{(k)}$, содержащие условия в виде неравенств, могут быть эффективно решены с использованием методов нелинейного программирования, модифицированных для такого класса задач [7, 13, 14].

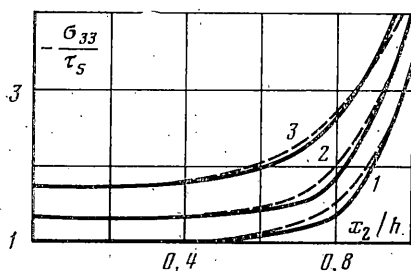
5. Описанный в пп. 3, 4 алгоритм декомпозиции для случая слоев, прямоугольных в плане, реализован в виде комплекса программ на ФОРТРАНе для ЕС ЭВМ.

Дискретизация базисных вариационных задач осуществлялась при помощи треугольных конечных элементов с представлением искомых функций в виде $a_0 + a_1\xi + a_2\eta$. Решение возникающих задач нелинейного программирования выполнялось с использованием предложенного ранее метода [7], представляющего обобщение метода последовательной верхней релаксации на случай задач минимизации с линейными ограничениями в виде неравенств.

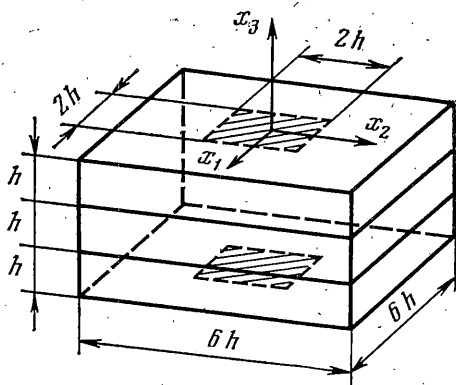
Для оценки достоверности алгоритма и программного комплекса рассмотрим задачу о сжатии достаточно широкого трехслойного пакета двумя плоскими штампами (фиг. 1, а). В срединном сечении, показанном на фиг. 1, а штриховкой, будет реализовано деформированное состояние, близкое к плоскому. Сравним решение этой за-



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

дачи как трехмерной с решением соответствующей задачи плоской деформации, полученной при помощи методики, описанной в [7].

Численное решение проводилось для однородных слоев с использованием схемы линейно-упрочняющегося тела. Слои имеют одинаковые механические свойства. Упругий и касательный модули сдвига связаны соотношением $G/G_t = 20$, коэффициент Пуассона $\nu = 0.3$. Для каждого слоя в представлении (3.2) были взяты восемь гармоник, а область S в плоскости (x_1, x_2) разбивалась на 640 элементов. При решении задачи плоской деформации использовалось 738 прямоугольных конечных элементов.

На фиг. 1, б приведены границы зон пластической деформации в срединном сечении, соответствующие сближениям штампов, равным $1.6\tau_s h/G$, $2\tau_s h/G$, $2.8\tau_s h/G$. Границы пластических зон, полученные при решении трехмерной задачи, показаны сплошными линиями; при решении двумерной задачи — штриховыми.

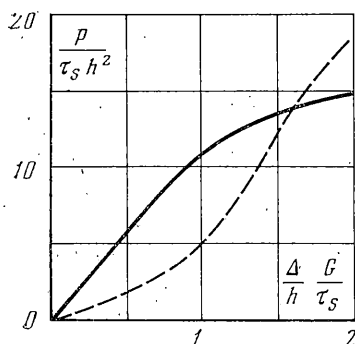
Распределение контактного давления под штампом показано на фиг. 2. Цифры 1, 2, 3 обозначают эпюры контактных давлений при сближениях штампов, равных $1.2\tau_s h/G$, $1.6\tau_s h/G$, $2.8\tau_s h/G$ соответственно. В пределах принятой погрешности аппроксимации решения практически совпадают.

В качестве примера рассмотрим задачу о сжатии двумя штампами трехслойного пакета со слоями, квадратными в плане (фиг. 3). Представленные результаты отно-

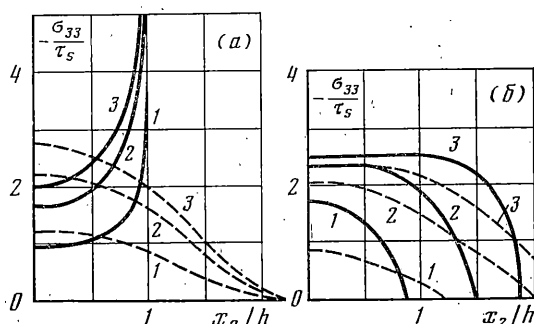
сятся к двум случаям: сжатие пакета плоскими штампами (на фиг. 3 пятна контакта штампов и поверхностей пакета заштрихованы); сжатие пакета выпуклыми штампами с уравнениями поверхностей $x_3 = \pm \frac{1}{2} \tau_s h (x_1^2/h^2 + x_2^2/h^2)/G$, $x_3 = -3h^{-1/2} \tau_s h (x_1^2/h^2 + x_2^2/h^2)/G$.

Штампы поступательно смещаются вдоль оси x_3 таким образом, что расстояние $3h - 2\Delta$ между ними монотонно уменьшается. Через 2Δ обозначено сближение штампов.

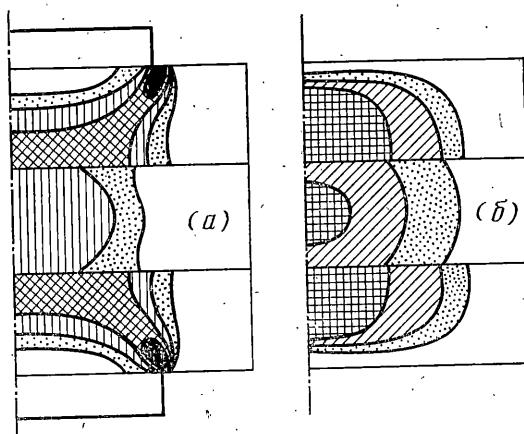
Расчеты производились для слоев, обладающих одинаковыми механическими свойствами, с использованием схемы линейно-упрочняющегося тела при $G/G_t = 20$,



Фиг. 4



Фиг. 5



Фиг. 6

$\nu = 0.3$. Для аппроксимации поля перемещений в виде (3.2) использовано восемь гармоник. Область $C = \{-3h \leq x_1 \leq 3h, -3h \leq x_2 \leq 3h\}$ разбивалась на 800 элементов со сгущением сетки у кромок штампа в случае сжатия плоскими штампами, и в окрестности точки $x_1 = 0, x_2 = 0$ — в случае сжатия выпуклыми штампами. Общее количество параметров равно 42336.

На фиг. 4 представлена зависимость сближения штампов от главного вектора нагрузки P . Сплошная линия соответствует сжатию пакета плоскими штампами, штриховая — сжатию выпуклыми штампами. Во втором случае кривая $P \sim \Delta$ содержит точку перегиба, позволяющую отделить величины нагрузок, при которых преобладают упругие деформации и зависимость $P \sim \Delta$ аналогична зависимостям Г. Герца, от нагрузок, вызывающих значительные пластические деформации.

Распределение контактного давления между штампом и пакетом (сплошные линии) и между слоями (штриховые линии) в сечении плоскостью $x_1 = 0$ показано: для первого случая — на фиг. 5, а и для второго — на фиг. 5, б. Кривые 1, 2, 3 соответствуют сближениям штампов, равным $1,2\tau_s h/G$, $2,8\tau_s h/G$, $4,4\tau_s h/G$. Отметим, что характер контактного взаимодействия между слоями незначительно зависит от формы штампа. Давление под выпуклыми штампами по мере их сближения практически выравнивается на большей части контактной поверхности.

Процесс развития пластических деформаций в сечении пакета плоскостью $x_1 = x_2 = 0$ показан на фиг. 6. Границы зон отмечены в случае плоских штампов для сближений $1,2\tau_s h/G$, $2\tau_s h/G$, $2,8\tau_s h/G$, $4,4\tau_s h/G$; в случае выпуклых штампов — для

сближений $2,8\tau_s h/G$, $3,6\tau_s h/G$, $4,4\tau_s h/G$. При действии плоских штампов пластическое деформирование развивается от кромок штампа, а при действии выпуклых штампов — от противоположных по отношению к штампам сторон крайних слоев и от центра среднего слоя. В обоих случаях под штампами существуют области упругих деформаций, сохраняющиеся даже при значительном сжатии пакета; в таких областях реализуется напряженное состояние, близкое к всестороннему сжатию.

ЛИТЕРАТУРА

1. Приварников А. К. Пространственная деформация многослойного основания. — В кн.: Устойчивость и прочность элементов конструкций. Днепропетровск: Изд-е Днепропетровск. ун-та, 1973, с. 27–45.
2. Никишин В. С., Шаниро Г. С. Задачи теории упругости для многослойных сред. М.: Наука, 1973. 131 с.
3. Шевляков Ю. А. Матричные алгоритмы в теории упругости неоднородных сред. Киев — Одесса: Вища школа, 1977. 215 с.
4. Шульга Н. А. Основы механики слоистых сред периодической структуры. Киев: Наук. думка, 1981. 199 с.
5. Fremond M. Concrete slab resting on a stratified medium. — Highway Res. Rec., 1972, No. 407, p. 116–129.
6. Кузьменко В. И. О вариационном подходе в теории контактных задач для нелинейно-упругих слоистых тел. — ПММ, 1979, т. 43, вып. 5, с. 893–901.
7. Власенко Ю. Е., Кузьменко В. И., Фень Г. А. Контактная задача для упругопластического многослойного пакета с учетом отставания слоев. — Изв. АН СССР. МТТ, 1978, № 5, с. 67–73.
8. Fichera G. Problemi elastostatici con vincoli unilaterali: il problema di Signorini con ambigue condizioni al contorno. — Atti Accad. Naz. Lincei, Mem. Cl. sci. fis., mat. e natur., 1964, ser. 1, v. 7, No. 5, p. 91–140.
9. Дюво Г., Лионс Ж.-Л. Неравенства в механике и физике. М.: Наука, 1980. 483 с.
10. Кравчук А. С. Постановка задачи о контакте нескольких деформируемых тел как задачи нелинейного программирования. — ПММ, 1978, т. 42, вып. 3, с. 466–474.
11. Ильюшин А. А. Пластичность. М.: Гостехиздат, 1948. 376 с.
12. Ворovich И. И., Красовский Ю. П. О методе упругих решений. — Докл. АН СССР, 1959, т. 126, № 4, с. 740–743.
13. Гловински Р., Лионс Ж.-Л., Тремольер Р. Численное исследование вариационных неравенств. М.: Мир, 1979. 574 с.
14. Кравчук А. С., Васильев В. А. Численные методы решения контактной задачи для линейно- и нелинейно-упругих тел конечных размеров. — Прикл. механика, 1980, т. 16, вып. 6, с. 9–15.
15. Сеа Ж. Оптимизация. Теория и алгоритмы. М.: Мир, 1973. 244 с.
16. Канторович Л. В., Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа. М.—Л.: Физматгиз, 1962. 708 с.

Днепропетровск

Поступила в редакцию
9.XI.1982