МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 4 · 1984

УДК 539.31

О ВОЛНАХ ДЕФОРМАЦИИ В НЕЛИНЕЙНОЙ НАСЛЕДСТВЕННО-УПРУГОЙ СРЕДЕ

БЫРДИН А. П., РОЗОВСКИЙ М. И.

Для нелинейной наследственно-упругой полубесконечной среды рассматривается распространение волн деформации. Краевая задача для интегродифференциального уравнения движения сведена к задаче для бесконечной системы зацепляющихся линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. В качестве примеров рассмотрены заданные на границе деформация и напряжение.

1. Граничная задача, описывающая движение одномерной сплошной среды, в безразмерных переменных $t=\beta t'$, $x=\beta x'/c$ имеет вид

$$\partial^2\varepsilon/\partial t^2=\partial^2\sigma/\partial x^2,\quad \varepsilon|_{x=0}=f(P,\ t),\quad \varepsilon|_{x=\infty}=0 \tag{1.1}$$

Здесь $\varepsilon(x,t)$ — деформация, $\sigma(x,t)$ — безразмерный функционал напряжения, β^{-1} — время релаксации системы, $c=(E/\rho)^{1/2}$ — скорость звука в упругой среде с плотностью ρ и упругим модулем E, x' и t' — координата и время; параметр P играет роль амплитуды возмущения.

Нелинейный функционал напряжения предполагаем представленным рядом Вольтерра [1]:

$$\sigma(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{\infty}\overset{2n+1}{\cdots}\int_0^{\infty} G_{(n)}(t_1,\ldots,t_{(n)})\prod_{k=1}^{2n+1}\varepsilon(x,t-t_k)\,dt_k \tag{1.2}$$

Индексы в скобках у букв понимаются здесь и ниже как равенства $(m)=2m+1$. Весовая функция $G_n(t_1,\ldots,t_n)$ равна нулю, если хотя бы одна переменная $t_k<0$. Предполагаем также, что граничное значение деформации $\varepsilon(0,t)$ является нечетной аналитической функцией параметра P в окрестности нуля с производными по P, представленными рядами Фурье по переменной t:

$$f(P,t)=\sum_{n=0}^{\infty}P^{2n+1}f_{(n)}(t),\quad f_{(n)}(t)=\frac{1}{(2n+1)!}\frac{\partial^{2n+1}f}{\partial P^{2n+1}}(0,t)$$

$$f_{(n)}(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}f_{(n)}^{(k)}\exp[i(2k+1)t],\quad f_{(n)}^{(k)}=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}f_{(n)}(t)\exp[-i(2k+1)t]\,dt \tag{1.3}$$

где $f_{(n)}^{-(k)}=\overline{f_{(n)}^{(k)}}$ (черта означает комплексное сопряжение).

Решение задачи (1.1) ищем в виде

$$\varepsilon(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}P^{2n+1}\varepsilon_{(n)}(x,t) \tag{1.4}$$

$$\varepsilon_{(n)}(x,t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} A_{(n)}^{(k)}(x)\exp[i(2k+1)t] \tag{1.5}$$

Таким образом, задача сводится к определению функций $A_{(n)}^{(k)}(x)$, граничные значения которых при $x=\infty$ и $x=0$ определяются из третьего соотношения в (1.1) и из сравнения выражений (1.4) и (1.3). Подставляя (1.4) в (1.1), (1.2) и приравнивая члены с одинаковыми степенями параметра P в правой и левой частях равенства, получим систему интегродифференциальных уравнений в частных производных, определяющую функции $\varepsilon_{(n)}(x,t)$ $(n=0, 1, \ldots)$.

Подставляя затем соотношения (1.5) в полученную систему, умножая уравнения на $\exp[-i(2k+1)t]$ $(k=0, \pm1, \ldots)$ и интегрируя по t на интервале $[0, 2\pi]$, придем к нерегулярной краевой задаче для бесконечной системы обыкновенных зацепляющихся дифференциальных уравнений

$$\left[G_1{}^*(2k+1)\frac{d^2}{dx^2}+(2k+1)^2\right]A_{(n)}^{(k)}(x)=$$

$$=-\sum_{r=1}^{n}(2\pi)^2\sum_{\substack{|p,r|=k-r\\|m,r|=n-r}} G_{(r)}^*(2p_1+1,\ldots,2p_{(r)}+1)\frac{d^2}{dx^2}\prod_{j=1}^{2r+1}A_{(mj)}^{(pj)}(x) \tag{1.6}$$

$$A_{(n)}^{(k)}(0)=f_{(n)}^{(k)},\quad A_{(n)}^{(k)}(\infty)=0,\quad (m\ j)=2m_j+1,\quad |m,r|=m_1+\ldots+m_{(r)}$$

где $G_{(r)}^*(\omega_1,\ldots,\omega_{(r)})$ — преобразование Фурье весовой функции порядка $2r+1$, определенное, как и в [5]; длина $|p, r|$ мультииндекса p может быть и отрицательной. Вторая сумма в (1.6) берется по целым и натуральным решениям уравнений $|p, r|=k-r$ и $|m, r|=n-r$ соответственно и равна нулю при $n=0$. Отметим, что в правой части уравнений присутствуют функции $A_{(mj)}^{(pj)}$ с меньшими индексами, чем в левой части $(m_j<n)$.

Система (1.6) имеет рекуррентный характер. Фиксируя индекс $n=0$, получим бесконечную систему однородных дифференциальных уравнений, решения которых определяют правые части системы при $n=1$ и т. д. Для каждого n система разбивается на пары комплексно-сопряженных уравнений для функций $A_{(n)}^{(k)}$ и $A_{(n)}^{-(k)}$. Очевидно, что единственность решения краевой задачи для любой такой пары с фиксированным k определяется только этим индексом, структурой граничных условий и ядром $G_1(t)$ реологического соотношения (1.2).

Краевая задача (1.6) имеет решение, поскольку существует ветвь корня $(-G_1^{*-1}(2k+1))^{1/2}$ с отрицательной реальной частью, и это решение единственно, так как соответствующая однородная краевая задача имеет только тривиальное решение [2].

2. Пусть $f(P, t)=P\sin\omega t$ $(\omega=\Omega/\beta$, Ω — частота возбуждения). Тогда соотношение (1.5) принимает вид

$$\varepsilon_{(n)}(x,t)=\sum_{k=-n-1}^{n} A_{(n)}^{(k)}(x)\exp[i(2k+1)\omega t] \tag{2.1}$$

Таким образом, система уравнений для данного случая получается из системы (1.6) заменой в операторе слева $2k+1$ на $(2k+1)\omega$ и $A_{(n)}^{(k)}$ на $A_{(n)}^{(k)}H(n-k)$, где $H(n-k)$ — единичная функция Хевисайда.

Выпишем уравнения задачи для $n=0,\ 1$:

$$L^{\vee}_{(0)}A_1^{\pm1}(x)=0, \quad A_1^{\pm1}(0)=\mp i/2, \quad A_1^{\pm1}(\infty)=0, \quad L^{\vee}_{(0)}A_3^{\pm1}(x)=$$
$$=-2\pi(C_3^{\vee(1;2)}G_3)G_1^{*-1}(\pm\omega)\frac{d^2}{dx^2}(A_1^{\pm1}(x)|A_1^1(x)|^2) \tag{2.2}$$
$$L^{\vee}_{(1)}A_3^{\pm3}(x)=-2\pi(C_3^{\vee(0;3)}G_3)G_1^{*-1}(\pm3\omega)\frac{d^2}{dx^2}(A_1^{\pm1}(x))^3, \quad A_3^{\pm1}(0)=$$
$$=A_3^{\pm1}(\infty)=0, \quad A_3^{\pm3}(0)=A_3^{\pm3}(\infty)=0$$

Операторы $L^{\vee}_{(n)}$ и $C_n^{\vee(k)}$ в уравнениях (2.2) определены правилами

$$L^{\vee}_{(n)}=\frac{d^2}{dx^2}+\omega^2(2n+1)^2G_1^{*-1}(\pm(2n+1)\omega), \quad (C_n^{\vee(k)}G_n)=$$
$$=\Sigma C_n^*(\underbrace{-\omega,\ldots,-\omega}_{k},\ \underbrace{\omega,\ldots,\omega}_{n-k})$$

В последнем выражении сумма берется по перестановкам аргументов из группы k с аргументами из группы $n-k$; число членов в сумме равно биномиальному коэффициенту C_n^k. Решая последовательно уравнения (2.2) и подставляя решения в (2.1), получим для случая сепарабельного ядра $G_3(t_1, t_2, t_3)=a_3\Pi G_1(t_k)$ $(k=1, 2, 3)$:

$$\varepsilon_1(x,t)=\exp(-\gamma_1 x)\sin\theta_1, \qquad \theta_k=k\omega(t-c_k^{-1}x)$$
$$\varepsilon_3(x,t)={}^1/_8a_3|G_1^*(\omega)|^2\Big\{[\exp(-3\gamma_1x)\sin(3\theta_1+\psi_3)-$$
$$-\exp(-\gamma_3x)\sin(\theta_3+\psi_3)]b(1-2b\cos(\varphi_1-\varphi_3)+b^2)^{-1/2}-$$
$$-\frac{3+24\sin^2\varphi_1/2}{(2\sin\varphi_1/2)\sqrt{1+3\sin^2\varphi_1/2}}[\exp(-\gamma_1x)-\exp(-3\gamma_1x)]\sin(\theta_1+\psi_1)\Big\} \tag{2.3}$$

$$\gamma_k=k\omega\,\mathrm{Re}\sqrt{-G_1^{*-1}(k\omega)}, \qquad c_k^{-1}=\mathrm{Im}\sqrt{-G_1^{*-1}(k\omega)}$$

где γ_k, c_k — безразмерные коэффициенты затухания и фазовые скорости волн, причем берется ветвь корня с положительной реальной частью

$$b=|G_1^*(\omega)|/|G_1^*(3\omega)|, \qquad G_1^*(k\omega)=|G_1^*(k\omega)|(\cos\varphi_k-i\sin\varphi_k)$$
$$\mathrm{tg}\,\psi_1=\mathrm{ctg}\frac{\varphi_1}{2}\frac{1+3\,\mathrm{tg}^2\varphi_1/2}{4+18\,\mathrm{tg}^2\varphi_1/2}, \qquad \mathrm{tg}\,\psi_3=-\frac{\sin(3\varphi_1-\varphi_3)-b\sin2\varphi_1}{\cos(3\varphi_1-\varphi_3)-b\cos2\varphi_1}$$

3. Пусть на границе $x=0$ задан функционал напряжений

$$\sigma|_{x=0}(x,t)=P\sin\omega t \tag{3.1}$$

Предполагая, что весовая функция $G_1(t)$ содержит аддитивную сингулярную составляющую в виде дельта-функции, разрешим соотношение (3.1) относительно деформации $\varepsilon(0,t)$. Возможность обращения (3.1) доказана в [3]:

$$\varepsilon(0,t)=-\frac{iP}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\pi P^2}{2}\right)^n\sum_{k=0}^{2n+1}(-1)^{n+k}\Psi_k(\omega,t) \tag{3.2}$$
$$\Psi_k(\omega,t)=(C_{2n+1}^{\vee(k)}K_{(n)})\exp[i(2n-2k+1)\omega t]$$

Здесь весовые функции ползучести $K_n(t_1,\ldots,t_n)$ связаны с заданными весовыми функциями релаксации $G_m(t_1,\ldots,t_m)$ в пространстве Фурье рекуррентным соотношением [4]:

$$
\begin{gathered}
K_n{}^*(\omega_1,\ldots,\omega_n)\,G_1{}^*\left(\sum_{k=1}^{n}\omega_k\right)-\delta_{1,n}=-\sum_{m=2}^{n}\sum_{|j,m|=n}\prod_{r=1}^{m}K_{j_r}^*(\omega_{|j,r-1|+1},\ldots \\
\ldots,\omega_{|j,r|})\,G_m{}^*(\{\omega\}_1{}^n),\qquad G_m{}^*(\{\omega\}_1{}^n)=G_m{}^*\left(\sum_{k=1}^{j_1}\omega_k,\ldots,\sum_{k=|j,m-1|+1}^{n}\omega_k\right)
\end{gathered}
\tag{3.3}
$$

где $\delta_{1,n}$ — символ Кронекера; $G_m=0$ при $m=2r$. Частный случай соотношений (3.3) при $n=1,2,3$ был выведен в [5] и неоднократно использовался в литературе.

При условии сепарабельности функций $G_n(\ldots)$ образы Фурье весовых функций ползучести являются симметричными функциями ω_m:

$$
K_{(n)}^*(\omega_1,\ldots,\omega_{(n)})=(2\pi)^{-n}f_n(\{a_k\}_1^{2n+1})\,K_1{}^*\left(\sum_{j=1}^{2n+1}\omega_j\right),
$$

$$
\lim_{a_1,\ldots,a_{(n)}\to 1} f_n=(-1)^n 2^{2n+1}\frac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!}
$$

С учетом полученного соотношение (3.2) принимает вид

$$
\begin{gathered}
\varepsilon(0,t)=-i\sum_{n=0}^{\infty}f_n\left(\frac{P}{2}\right)^{2n+1}\sum_{k=-n-1}^{n}(-1)^k\Psi_k^{(1)}(\omega,t) \\
\Psi_k^{(1)}(\omega,t)=C_{2n+1}^{n-k}K_1{}^*((2k+1)\,\omega)\exp[i(2k+1)\,\omega t]
\end{gathered}
\tag{3.4}
$$

Решение задачи ищем в виде (1.4), где $\varepsilon_{(n)}(x,t)$ определяется выражением (2.1). Рассуждения, предшествующие уравнениям (1.6), приводят в данном случае к системе дифференциальных уравнений вида (2.2), но с другими граничными условиями. Из сравнения выражений (2.1) и (3.4) при $x=0$ имеем

$$
A_{(n)}^{(k)}(0)=i(-1)^{k+1}(f_n/2^{2n+1})\,C_{2n+1}^{n-k}K_1{}^*((2K+1)\,\omega)
\tag{3.5}
$$

Решая уравнения (2.2) с условиями при $x=0$ в виде (3.5), получим для случая сепарабельного ядра $G_3(t_1,t_2,t_3)$ два члена ряда деформации:

$$
\varepsilon_1(x,t)=|G_1{}^*(\omega)|^{-1}\exp(-\gamma_1 x)\sin(\theta_1+\varphi_1)
$$

$$
\begin{gathered}
\varepsilon_3(x,t)=\frac{3a_3}{16}\frac{|G_1{}^*(\omega)|^{-1}\exp(-\gamma_1 x)}{(\sin\varphi_1/2)\sqrt{1+3\sin^2\varphi_1/2}}[\sin(\theta_1+\alpha_1)+\exp(-2\gamma_1 x)\times \\
\times(1+8\sin^2\varphi_1/2)\sin(\theta_1+\alpha_2)]+\frac{a_3}{4}\frac{|G_1{}^*(3\omega)|^{-2}}{\sqrt{1-2b\cos(\varphi_3-\varphi_1)+b^2}}[b\exp(-\gamma_3 x)\times \\
\times\sin(\theta_3+\varphi_3+\alpha_3)-\exp(-3\gamma_1 x)\sin(3\theta_1+\varphi_1+\alpha_3)]
\end{gathered}
$$

Здесь φ_k и b определяются выражением (2.4):

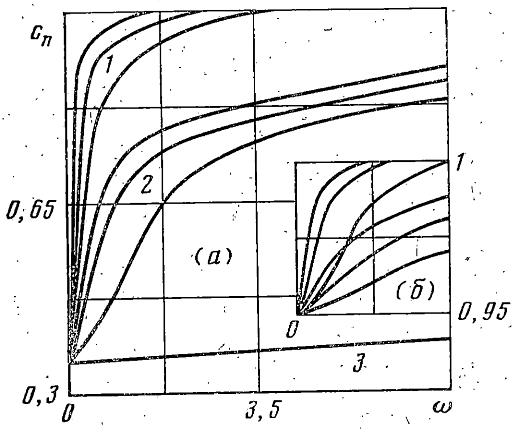
$$
\operatorname{tg}\alpha_1=-\operatorname{ctg}\frac{\varphi_1}{2}\frac{2\cos^2\varphi_1-4\cos\varphi_1+1}{2(\cos^2\varphi_1-\cos\varphi_1-1)},\qquad \operatorname{tg}\alpha_2=-\operatorname{ctg}\frac{\varphi_1}{2}\frac{8\cos^2\varphi_1-20\cos\varphi_1+11}{2(4\cos^2\varphi_1-6\cos\varphi_1-1)}
$$

$$
\operatorname{tg}\alpha_3=\frac{\sin(2\varphi_3-\varphi_1)-b\sin\varphi_3}{\cos(2\varphi_3-\varphi_1)-b\cos\varphi_3}
$$

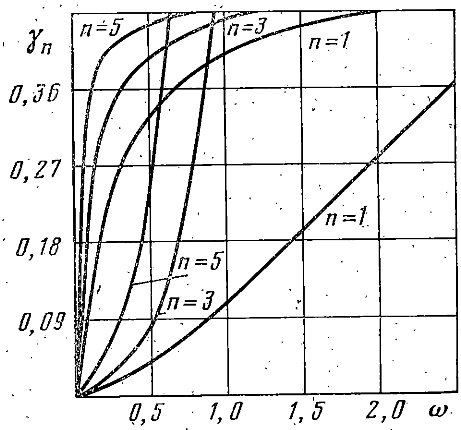
4. Сравнение выражений (2.3) и (3.6) показывает отличие амплитуд и фаз для случаев заданных на границе моногармонических деформации и напряжения. Однако имеются и общие существенные черты этих решений, обусловленные наличием нелинейности и дисперсии.

Характеристические многочлены уравнений (1.6) для обсуждаемых случаев имеют корни вида $(2k+1)\omega[G_1^{*-1}((2k+1)\omega)]^{1/2}$. И поскольку коэффициенты затухания γ_n и скорости волн c_n определяются фурье-образами ядра релаксации первого порядка, это означает, что уравнения с различными n, но одинаковыми k дают вклады в $\varepsilon_{(n)}(x, t)$ в виде волн, распространяющихся со скоростью c_k. Правые части указанных уравнений содержат функции $A_{(n)}^{(k)}(x)$ с меньшими индексами n, чем левые. Следовательно, в $\varepsilon_{(n)}(x, t)$ войдут и волновые члены с фазовыми скоростями c_m $(m<k)$.

На фиг. 1 и 2 приведены частотные зависимости фазовых скоростей волн c_n при различных α и ν и коэффициентов затухания γ_n при различных значениях α



Фиг. 1



Фиг. 2

для случая, когда ядро релаксации является слабосингулярным ядром Ржаницына $G_1(t)=\delta(t)-\nu t^{\alpha-1}e^{-t}/\Gamma(\alpha)$, где $\Gamma(\alpha)$ – гамма-функция, ν – дефект упругого модуля, $t=\beta t'$, $0<\alpha\leqslant 1$. Кривые *1 – 3* на фиг. 1 соответствуют сериям со значениями α, равными 1; 0,3; 0,01. Внутри каждой серии n принимает значения, равные 1; 3; 5 для верхней, средней и нижней кривых соответственно. Случай (*а*) на фиг. 1 соответствует $\nu=0{,}9$, случай (*б*) – значению $\nu=0{,}1$.

При значениях α вблизи нуля кривые растут медленно, и расстояние между соседними кривыми очень мало для всех ω. Следовательно, при малых α в среде распространяется волновой пакет со скоростями составляющих $(1-\nu)^{1/2}<c_n<1$. При малых ν (фиг. 1, *б*) его можно рассматривать как одну волну, движущуюся с упругой скоростью. То же справедливо для любых α и ν, но достаточно больших ω.

При ν и α для серий 1 и 2 (фиг. 1, *а*) можно указать такие ω, при которых c_3-c_1 и $c_5-c_3\gg c_{2n+1}-c_{2n-1}$ $(n\geqslant 3)$. Следовательно, возмущение распадается на две уединенные волны, движущиеся со скоростями c_1 и c_3 и расплывающийся волновой пакет со скоростями составляющих от c_5 до 1.

Отметим, что при $\alpha=1$ и $\omega\to\infty$ все γ_n стремятся к пределу, равному $\nu/2$, при $\alpha<1$ – неограниченно растут (фиг. 2, $\nu=0{,}9$), что находится в согласии с выводами работы [6] для ядра Работнова, в которой решение строилось методом медленно меняющихся амплитуд. На фиг. 2 цифры у кривых отмечают значения n, верхняя серия соответствует значению $\alpha=1$, для нижней серии $\alpha<1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Работнов Ю. Н., Паперник Л. Х., Степанычев Е. И.* Приложение нелинейной теории наследственности к описанию временных эффектов в полимерных материалах.– Механика полимеров, 1971, № 1, с. 74–87.
2. *Наймарк М. А.* Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969. 526 с.
3. *Ильюшин А. А., Победря Б. Е.* Основы математической теории термовязкоупругости. М.: Наука, 1970. 280 с.
4. *Бырдин А. П., Россихин Ю. А.* О рассеянии энергии при периодическом возбуждении нелинейных наследственно-упругих систем.– В кн.: Физика структуры и свойств твердых тел: Сб. статей. Куйбышев: Изд-е Куйбыш. ун-та, 1978, вып. 3, с. 200–204.
5. *Nakada O.* Theory of nonlinear responses.– J. Phys. Soc. Japan, 1960, v. 15, No. 12, p. 2280–2288.
6. *Карковский Ю. И., Мешков С. И.* О рассеянии энергии при колебаниях нелинейных наследственно-упругих систем.– В кн.: Механика деформируемого твердого тела: Сб. статей. Куйбышев: Изд-е Куйбыш. ун-та, 1976, вып. 2, с. 105–112.

Воронеж, Днепропетровск

Поступила в редакцию
12.VII.1982