

УДК 539.3.

ЗАДАЧА О ПОДВИЖНОЙ НАГРУЗКЕ НА ГРАНИЦЕ
УПРУГОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА С ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ
ПОЛОСТЬЮ

НИКИТИН И. С.

Рассматривается простейшая стационарная пространственная задача, в которой деформированное или напряженное состояние не сводится к плоскому случаю, поэтому необходимо решать полную трехмерную систему уравнений теории упругости.

1. Физическая постановка задачи такова: в декартовой системе координат x, y, z упругое полупространство $y < 0$ имеет цилиндрическую полость радиуса R . Ось цилиндра параллельна границе полупространства и находится на расстоянии H от нее. Модули упругости среды λ, μ , плотность ρ связаны со скоростями упругих продольных и поперечных волн a и b следующими соотношениями: $\lambda + 2\mu = \rho a^2$, $\mu = \rho b^2$.

По границе полупространства параллельно оси полости движется с постоянной скоростью $c > a > b$ волна постоянного давления величины σ_0 . Граница полости свободна от напряжений. Требуется определить, как изменяется со временем поле напряжений вокруг полости.

Для решения задачи удобно перейти к подвижной биполярной системе координат [1]: $x_1 = \alpha$, $x_2 = \beta$, $x_3 = \tau = z + ct$. Имеет место связь

$$y = -\frac{a_0 \operatorname{sh} \alpha}{\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta} \quad x = \frac{a_0 \sin \beta}{\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta} \quad a_0 = \sqrt{H^2 - R^2}$$

Система координат α, β, τ — ортогональная, от нуля отличны только следующие компоненты метрического тензора: $g_{\alpha\alpha} = g_{\beta\beta} = g = a_0^2 / (\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta)^2$, $g_{\tau\tau} = 1$. В силу симметрии задачи относительно плоскости $x = 0$ (или, что то же самое, $\beta = 0$) достаточно рассмотреть только правую половину полупространства $x > 0$ ($\beta > 0$).

Бесконечная область $ABCD$ в декартовых координатах отобразится в прямоугольник $A'B'C'D'$ в плоскости α, β (фиг. 1): $0 \leq \alpha \leq \alpha_0$, $0 \leq \beta \leq \beta_0$, где $\alpha_0 = \operatorname{ch}(H/R)$, $\beta_0 = \pi$. Задача сводится к решению системы динамических уравнений теории упругости в координатах α, β, τ в области $0 \leq \alpha \leq \alpha_0$, $0 \leq \beta \leq \beta_0$ при $\tau \geq 0$ с соответствующими начальными и граничными условиями.

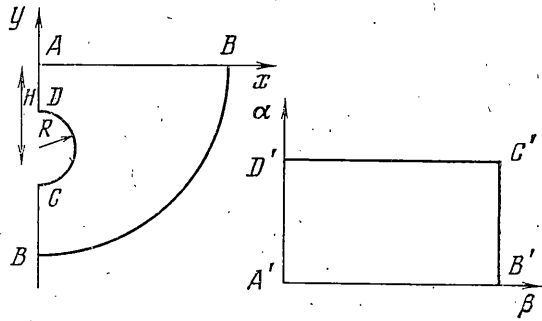
В произвольной криволинейной системе координат справедливы уравнения движения и соотношения Гука

$$\rho v_{,i}{}^i = \nabla_j p^{ij} \tag{1.1}$$

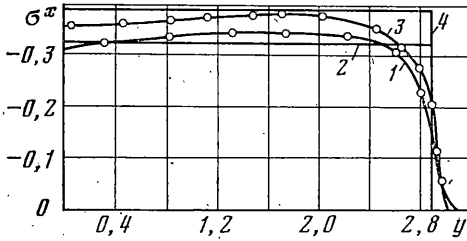
$$p_{,i}{}^{ij} = \lambda e_{,k}{}^k g^{ij} + 2\mu g^{i\alpha} g^{j\beta} e_{\alpha\beta}, \tag{1.2}$$

$$e_{\alpha\beta} = \nabla_\alpha v_\beta + \nabla_\beta v_\alpha$$

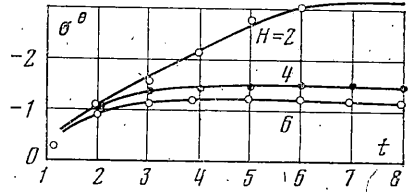
где p^{ij} и v^i — контравариантные компоненты тензора напряжений и вектора скорости.



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

Введем безразмерные величины $\tau = \tau/R$, $\sigma^{ij} = p^{ij}/(\lambda + 2\mu)$, $u^i = -v^i/c$ и положим $R=1$, $\lambda + 2\mu = 1$, $\rho = 1$, $\nu = \rho c^2$.

Тогда в координатах α , β , τ уравнения (1.1) и (1.2) можно привести к виду

$$g\sigma_{\alpha}^{11} + \lambda u_{\tau}^3 + (\lambda + 2\mu)u_{\alpha}^1 + \lambda u_{\beta}^2 + 2f(\lambda + \mu)(u^2 \sin \beta - u^1 \operatorname{sh} \alpha) = 0$$

$$g\sigma_{\tau}^{12} + \mu u_{\alpha}^2 + \mu u_{\beta}^1 = 0, \quad g\sigma_{\tau}^{13} + \mu g u_{\tau}^1 + \mu u_{\alpha}^3 = 0$$

$$g\sigma_{\tau}^{22} + \lambda u_{\tau}^3 + \lambda u_{\alpha}^1 + (\lambda + 2\mu)u_{\beta}^2 + 2f(\lambda + \mu)(u^2 \sin \beta - u^1 \operatorname{sh} \alpha) = 0$$

$$g\sigma_{\tau}^{23} + \mu g u_{\tau}^2 + \mu u_{\beta}^3 = 0$$

$$\sigma_{\tau}^{33} + (\lambda + 2\mu)u_{\tau}^3 + \lambda u_{\alpha}^1 + \lambda u_{\beta}^2 + 2f\lambda(u^2 \sin \beta - u^1 \operatorname{sh} \alpha) = 0$$

$$\sigma_{\tau}^{13} + \nu u_{\tau}^1 + \sigma_{\alpha}^{11} + \sigma_{\beta}^{12} + f(\sigma^{22} \operatorname{sh} \alpha + 4\sigma^{12} \sin \beta - 3\sigma^{11} \operatorname{sh} \alpha) = 0$$

$$\sigma_{\tau}^{23} + \nu u_{\tau}^2 + \sigma_{\alpha}^{12} + \sigma_{\beta}^{22} + f(3\sigma^{22} \sin \beta - 4\sigma^{12} \operatorname{sh} \alpha - \sigma^{11} \sin \beta) = 0$$

$$\sigma_{\tau}^{33} + \nu u_{\tau}^3 + \sigma_{\alpha}^{13} + \sigma_{\beta}^{23} + 2f(\sigma^{23} \sin \beta - \sigma^{13} \operatorname{sh} \alpha) = 0$$

$$f = (\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta)^{-1}$$

или в матричной форме

$$A(\alpha, \beta)x_{\tau} + Bx_{\alpha} + Cx_{\beta} + D(\alpha, \beta)x = 0 \quad (1.3)$$

где x — вектор-столбец неизвестных (σ^{11} , σ^{12} , σ^{13} , σ^{22} , σ^{23} , σ^{33} , u^1 , u^2 , u^3).

Система (1.3) гиперболична по τ при $\nu > \lambda + 2\mu$, $c > a > b$. Граничные условия для системы (1.3) запишутся в виде:

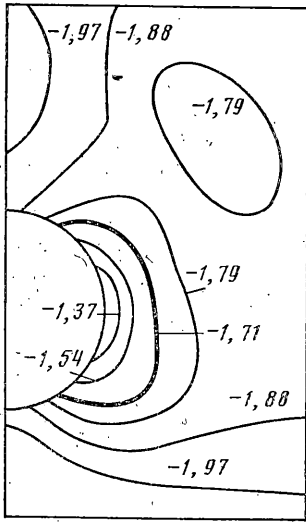
при $\alpha = 0$ (граница полупространства):

$$\sigma^{11} = \sigma^{\alpha\alpha} = -\frac{\sigma_0}{g(\lambda + 2\mu)}, \quad \sigma^{12} = \sigma^{\alpha\beta} = 0, \quad \sigma^{13} = \sigma^{\alpha\gamma} = 0 \quad (1.4)$$

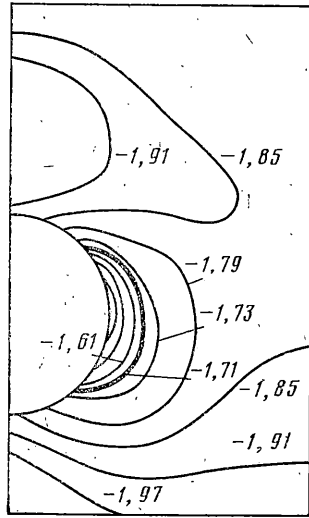
при $\alpha = \alpha_0$ (граница полости):

$$\sigma^{11} = \sigma^{12} = \sigma^{13} = 0 \quad (1.5)$$

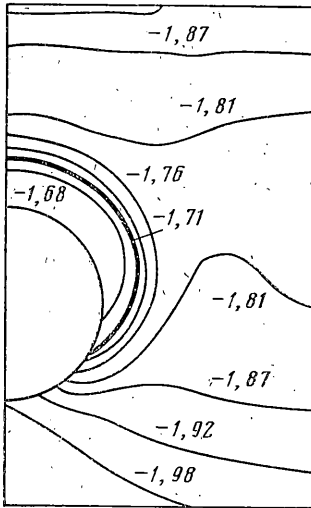
Из симметрии задачи относительно плоскости $x = 0$ вытекает, что при $\beta = 0$ и $\beta = \beta_0$ будем иметь $\sigma^{12} = \sigma^{23} = u^2 = 0$.



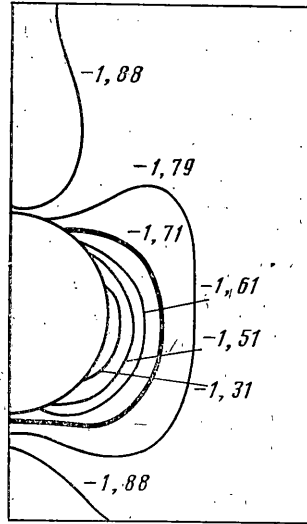
Фиг. 4



Фиг. 5



Фиг. 6



Фиг. 7

Начальные условия при $\tau=0$ примем нулевыми (невозмущенное состояние среды): $\sigma^{ij}|_{\tau=0}=0$, $u^i|_{\tau=0}=0$.

Но можно поступить иначе. При любом $\tau < \tau_0 = (H/R-1)(c^2/a^2-1)^{1/2}$ (фронт продольной волны не достиг границы полости) значения σ^{ij} и u^i можно получить из решения задачи о нагрузке, бегущей по границе полупространства (без полости) со сверхзвуковой скоростью [2]. В декартовых компонентах эти начальные условия будут иметь вид (при $\tau \leq \tau_0$):

$$\begin{aligned}
 V_x = \sigma_{xz} = \sigma_{xy} = 0, \quad V_y = -\frac{\sigma_0 c}{\Delta \mu} (\gamma \lambda_1 H_1 + 2\lambda_1 H_2) \\
 V_z = -\frac{\sigma_0 c}{\Delta \mu} (\gamma H_1 - 2\lambda_1 \lambda_2 H_2), \quad \sigma_y = -\frac{\sigma_0}{\Delta} (\gamma^2 H_1 + 4\lambda_1 \lambda_2 H_2) \\
 \sigma_z = -\frac{\sigma_0}{\Delta} (\gamma(\eta_2^2 - 2\eta_1^2 + 2)H_1 - 4\lambda_1 \lambda_2 H_2)
 \end{aligned}
 \tag{1.6}$$

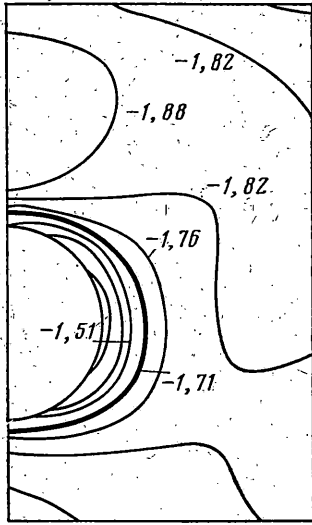
$$\sigma_x = -\frac{\sigma_0 \lambda}{\Delta \mu} \gamma (1 + \lambda_1^2) H_1$$

$$\eta_1 = c/a, \quad \eta_2 = c/b, \quad \lambda_1 = \sqrt{\eta_1^2 - 1}, \quad \lambda_2 = \sqrt{\eta_2^2 - 1}, \quad \gamma = \eta_2^2 - 2$$

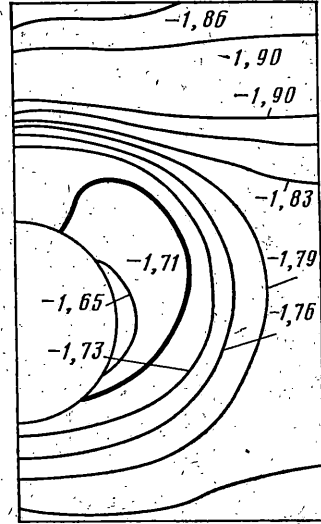
$$\Delta = \gamma^2 + 4\lambda_1\lambda_2, \quad H_1 = H(\tau + \lambda_1 y), \quad H_2 = H(\tau + \lambda_2 y)$$

где $H(\xi)$ — функция Хэвисайда.

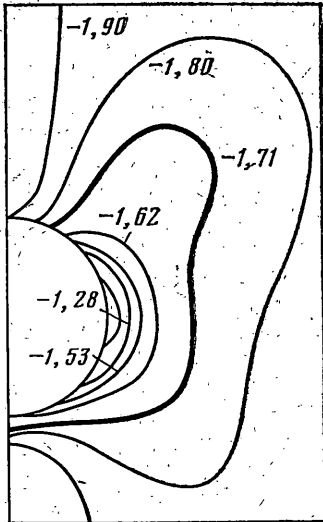
2. Система (1.3) с граничными условиями (1.4) и начальными условиями (1.6) решается численно методом С. К. Годунова [3]. Для этого



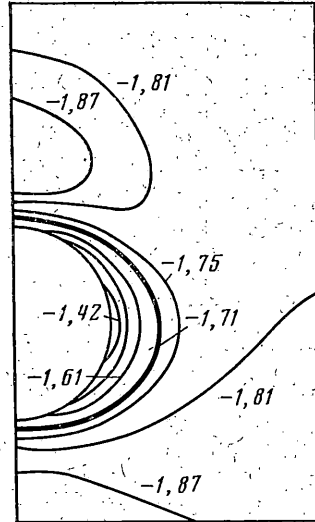
Фиг. 8



Фиг. 9



Фиг. 10



Фиг. 11

нужно найти характеристики и римановы инварианты одномерных систем

$$Ax_\tau + Bx_\alpha = 0 \quad (2.1)$$

$$Ax_\tau + Cx_\beta = 0 \quad (2.2)$$

Для системы (2.1) характеристиками являются линии $d\alpha/d\tau = a_i$ ($i = 1, \dots, 9$), где a_i находятся из условия $|B + a_i A| = 0$:

$$a_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{g(\nu - \lambda - 2\mu)}}, \quad a_{3,4,5,6} = \pm \sqrt{\frac{\mu}{g(\nu - \mu)}}, \quad a_{7,8,9} = 0$$

Ненулевым значениям a_i соответствуют римановы инварианты: $R_i = u^4 + k_{1i}\sigma^{13} + k_{2i}u^3 + k_{3i}\sigma^{11}$ ($i=1, \dots, 4$) $R_i = u^2 + k_{4i}\sigma^{12}$ ($i=5, 6$).

Для системы (2.2) характеристиками являются линии $d\beta/d\tau = b_i$, где b_i находятся из условия $|C + b_i A| = 0$ ($b_i = a_i$, $i=1, \dots, 9$); им соответствуют римановы инварианты

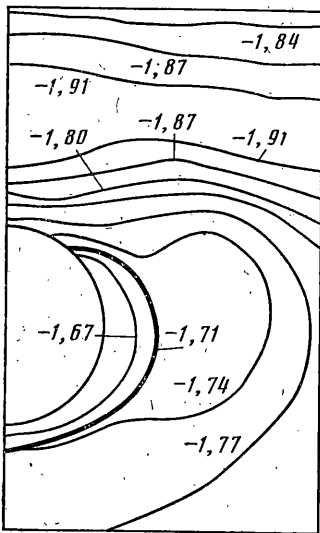
$$S_i = u^2 + k_{1i}\sigma^{23} + k_{2i}u^3 + k_{3i}\sigma^{22} \quad (i=1, \dots, 4)$$

$$S_i = u^4 + k_{4i}\sigma^{12} \quad (i=5, 6), \quad k_{1i} = (\lambda + \mu) / [\mu(\lambda + \nu) - ga^2(\nu - \mu)(\nu - \lambda - 2\mu)]$$

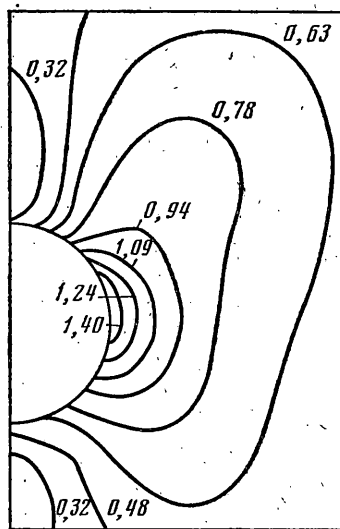
$$k_{2i} = \mu(k_{1i}\nu - 1) / (a_i g(\nu - \mu)) \quad k_{3i} = (1 - k_{1i}\mu) / (a_i(\nu - \mu)) \quad (i=1, \dots, 4),$$

$$k_{4i} = a_i g / \mu \quad (i=5, 6).$$

В прямоугольнике $0 \leq \alpha \leq \alpha_0$, $0 \leq \beta \leq \beta_0$ вводим сетку $\{\alpha_i, \beta_j\}$ размером $N \times M$ с постоянным шагом $h_\alpha = \alpha_i - \alpha_{i-1}$, $h_\beta = \beta_j - \beta_{j-1}$. Вектор-функция неиз-



Фиг. 12



Фиг. 13

вестных на нижнем слое по времени τ_k определяется совокупностью значений $x_{i-1/2, j-1/2}^k$, на верхнем слое $\tau_{k+1} = \tau_k + h_\tau$ — значениями $x_{i-1/2, j-1/2}^{k+1}$.

Разностные уравнения, представляющие собой разностную форму законов сохранения для системы (1.3), запишутся в виде

$$A \frac{x_{i-1/2, j-1/2}^{k+1} - x_{i-1/2, j-1/2}^k}{h_\tau} + B \frac{x_{i, j-1/2} - x_{i-1, j-1/2}}{h_\alpha} +$$

$$+ C \frac{x_{i-1/2, j} - x_{i-1/2, j-1}}{h_\beta} + D x_{i-1/2, j-1/2}^k = 0 \quad (2.3)$$

Величины $X_{i, j-1/2}$ на ребрах ячеек $\alpha = \alpha_i$ определяются из решения «одномерной» задачи о распаде разрыва с использованием римановых инвариантов R_i системы (2.1). Аналогично величины $X_{i-1/2, j}$ определяются при помощи римановых инвариантов S_i системы (2.2).

Разностная схема (2.3) является схемой первого порядка точности и устойчива при выполнении условия [3] (θ — число Куранта):

$$h_\tau = \theta \frac{1}{\max_i a_i} \frac{1}{1/h_\alpha + 1/h_\beta} \quad (0 < \theta < 1)$$

С использованием схемы (2.3) были проведены расчеты различных вариантов задачи о подвижной нагрузке. Обсуждение результатов проводится ниже.

Аналогично была решена плоская задача о нагрузке, внезапно приложенной к границе упругого полупространства с цилиндрической полостью. Подобная задача в несколько иной физической постановке и другим численным методом решалась в [4]. Заметим, что такую задачу можно рассматривать как предельный случай задачи о подвижной нагрузке при $c \rightarrow \infty$ ($a/c=0$).

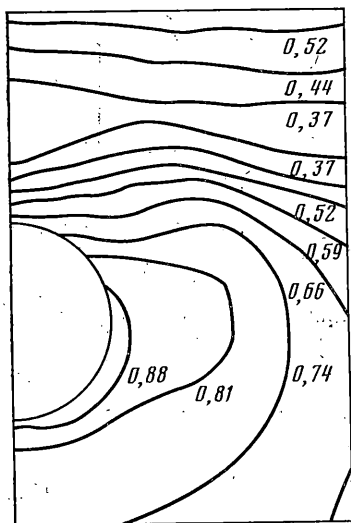
3. Расчеты задачи о подвижной нагрузке проводились на сетке размером 30×30 , задачи о внезапно приложенной нагрузке — на сетке 50×50 . Число Куранта для шага по времени было равно 0,97. Интенсивность приложенной нагрузки равна единице, для определенности приводятся результаты для случая $\lambda = \mu$. Точность численного решения можно оценить из результатов расчетов плоских волн, распространяющихся от границы полупространства и еще не достигших полости.

При скоростях $a/c=0$ (плоская задача) и $a/c=0,95$ сравнивалась величина напряжения σ^x (фиг. 2, кривые 1, 3 — численное решение при $a/c=0$ и $a/c=0,95$, кривые 2, 4 — точное [2]). Совпадение результатов удовлетворительное. Решение плоской задачи до времени прихода на полость отраженных волн также сравнивалось с решением задачи о дифракции продольной волны на цилиндрической полости, полученным ранее другим численным методом [5] (совпадение результатов удовлетворительное).

Влияние границы полупространства на величину концентрации напряжений у полости показано на фиг. 3 ($a/c=0,55$) для величины $\sigma^0(\pi/2)$ на границе полости. Видно, что начиная с глубины $H/R \sim 4$ влияние границы полупространства на концентрацию напряжений у полости невелико.

Численное решение задачи о бегущей нагрузке позволяет как-то оценить возможность разрушения среды и размеры разрушенных зон при различных значениях скорости движения нагрузки. В силу изотропности среды можно считать, что возможность разрушения среды будет определяться значениями инвариантов тензора напряжений.

Были обработаны результаты экспериментов по разрушению горных пород [6] и получены функции $\Phi(I_1, I_2)$ — критерии разрушения: $I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$, $I_2 = \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1$, где $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ — главные тензора напряжений.



Фиг. 14

Состояниям неразрушенного материала соответствуют точки $\Phi \leq 0$ в пространстве напряжений. В упругих задачах (без явного учета разрушения среды и обратного влияния разрушенных зон) считаем зоны с $\Phi > 0$ зонами возможного разрушения.

Функция Φ имеет вид: $\Phi = P - k_1 I_2^{1/2} - k_2$, $P = -I_1$, где k_1 и k_2 — константы материала.

Приведем результаты для трех значений скорости подвижной нагрузки $a/c=0$, $a/c=0,55$ и $a/c=0,95$ при $H/R=4$ в различные моменты t_1 (фиг. 4–6), t_2 (фиг. 7–9) и t_3 (фиг. 10–12). Построены линии уровня функции Φ при значениях $k_1=1,66$, $k_2=205$ МПа (константы доломита). Моменты t_1, t_2, t_3 выбраны из следующих соображений; в момент t_1 фронт продольной волны прошел полость, в момент t_2 фронт поперечной волны прошел полость, в момент t_3 фронт отраженной от границы полупространства продольной волны прошел полость. Верхняя граница фиг. 4–14 находится на расстоянии $2R$ от полости, нижняя находится на расстоянии R от полости. Именно в этой зоне имеются наибольшие концентрации напряжений и она должна быть изучена более подробно.

Для выбранной функции разрушения Φ при нагрузке $\sigma_0=100$ МПа, которая принимается за единицу измерения, зон с $\Phi > 0$ не возникло.

В силу линейности, задачи для увеличенной в n раз нагрузки имеем

$$\Phi = P - k_1 \sqrt{I_2} - k_2, \quad \Phi_n = nP - nk_1 \sqrt{I_2} + k_2 = n\Phi + (n-1)k_2$$

где Φ — значение функции при единичной нагрузке, Φ_n — значение функции при нагрузке величины n .

Из условия $\Phi_n=0$ следует, что изолиния $\Phi = -k_2(n-1)/n$ будет нулевой для функции Φ_n . Чтобы проследить на конкретном примере за развитием зон возмож-

ного разрушения, выберем $n=6$ и будем следить за линией $\Phi=-1,71$ (на фиг. 4-12 она проведена жирной линией). Это значит, что при увеличении нагрузки в шесть раз линия $\Phi=-1,71$ будет границей зон возможного разрушения. Видно, что размеры этих зон и тенденции их развития существенно зависят от скорости подвижной нагрузки и наибольшие их размеры достигаются при нормальном падении волн (плоская задача $a/c=0$, фиг. 10).

Были построены также линии уровня величины $J_2^S = \frac{1}{2} S_{ij} S_{ij}$ второго инварианта девиатора тензора напряжений. Эта величина характеризует интенсивность касательных напряжений и входит в различные условия пластичности (Мизеса, Мизеса-Шлейхера). Во всех случаях изолинии J_2^S оказались чрезвычайно похожими на линии уровня функции разрушения Φ . На фиг. 13, 14, например, изолинии J_2^S плоской задачи $a/c=0$ (ср. с фиг. 10) и задачи с подвижной нагрузкой $a/c=0,95$ (ср. с фиг. 12) при $t=t_3$.

Автор благодарит Н. В. Зволинского и А. Н. Ковшова за внимание к работе и полезные советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Уфлянд Я. С. Биполярные координаты в теории упругости. М.-Л.: Гостехиздат, 1950. 232 с.
2. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
3. Годунов С. К., Забродин А. В., Иванов М. Я., Крайко А. Н., Прокопов Г. П. Численное решение многомерных задач газовой динамики. М.: Наука, 1976. 400 с.
4. Дашевский М. А. Распространение волн при колебаниях тоннелей метро. - Строит. механика и расчет сооружений, 1974, № 6, с. 29-34.
5. Ковшов А. Н. О дифракции нестационарной упругой волны на цилиндрической полости. - Изв. АН СССР. МТТ, 1976, № 4, с. 115-121.
6. Николаевский В. Н., Лившиц Л. Д., Сизов И. А. Механические свойства горных пород. Деформации и разрушение. - В кн.: Итоги науки и техники. Механика твердого деформируемого тела. Т. 11. М.: ВИНТИ, 1978, с. 123-250.

Москва

Поступила в редакцию
14.I.1982