**МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 3 · 1984**

УДК 539.3.01

ОСОБЕННОСТИ ПОЛЯ НАПРЯЖЕНИЙ ВОЗЛЕ ВКЛЮЧЕНИЙ В СОСТАВНОЙ АНИЗОТРОПНОЙ ПЛОСКОСТИ

КРИВОЙ А. Ф., РАДИОЛЛО М. В.

Задачи с дефектами на линии раздела материалов в составной анизотропной плоскости рассматривались в [1] на основе введенных матриц-ядер для упругой анизотропной полуплоскости. В публикуемой работе к исследованию указанного типа задач применен подход, основанный на применении обобщенного интегрального преобразования [2], сводящего проблему к задаче Римана.

Указывается способ построения точных решений систем сингулярных интегральных уравнений второго рода на конечном интервале, которые формализуют задачи о концентрации напряжений возле трещин и включений. Выявлено, что при наличии кратного характеристического числа в асимптотике полученных решений помимо степенных особенностей, усиленных (в некоторых случаях) осцилляцией, содержится в качестве сомножителя логарифмический многочлен, степень которого на единицу меньше кратности. Показано, что при определенных условиях степень упомянутого многочлена может возрасти на единицу. Приведены явные решения некоторых не рассматривавшихся задач для абсолютно жесткого включения переменной толщины в составной анизотропной плоскости.

Задачи о концентрации напряжений возле включений постоянной толщины в составной изотропной плоскости исследованы в [3].

1. Рассмотрим неоднородную плоскость, состоящую из двух различных анизотропных полуплоскостей, не полностью контактирующих на линии раздела $x=0$. На участках, где отсутствует непосредственное взаимодействие полуплоскостей, считаются известными четыре из следующих величин:

$$\{\sigma_x,\ \tau_{xy},\ \partial_2{}^1 v,\ \partial_2{}^1 u\}_{x=\pm 0}=\{\varphi_j{}^\pm(y)\}\quad (j=\overline{1,4}) \tag{1.1}$$

где $\partial_k{}^l$ — оператор частного дифференцирования, l — порядок производной, k — номер переменной $(x\to 1,\ y\to 2)$.

Для отыскания остальных функций из (1.1) установим соотношения, связывающие разности (скачки) и суммы

$$H_j{}^\pm(y)=\varphi_j{}^+(y)\pm\varphi_j{}^-(y)\qquad (j=\overline{1,4}) \tag{1.2}$$

компонент вектора перемещений и тензора напряжений. Для этого введем функцию перемещений $\Phi(x,y)$, через которую выражаются характеристики напряженного и деформированного состояния среды

$$\begin{gathered}\sigma_x=-(\beta_{22}\partial_1{}^2\partial_2{}^1-\beta_{26}\partial_1{}^1\partial_2{}^2+\beta_{12}\partial_2{}^3)\Phi(x,y)\\ \tau_{xy}=(\beta_{22}\partial_1{}^3-\beta_{26}\partial_1{}^2\partial_2{}^1+\beta_{12}\partial_1{}^1\partial_2{}^2)\Phi(x,y)\\ u=-(A_{16}\partial_1{}^2+(A_{12}+A_{66})\partial_1{}^1\partial_2{}^1+A_{26}\partial_2{}^2)\Phi(x,y)\\ v=(A_{11}\partial_1{}^2+2A_{16}\partial_1{}^1\partial_2{}^1+A_{66}\partial_2{}^2)\Phi(x,y)\end{gathered} \tag{1.3}$$

При этом $\Phi(x,y)$ удовлетворяет следующему дифференциальному уравнению с разрывными коэффициентами:

$$(\beta_{22}\partial_1{}^4-2\beta_{26}\partial_1{}^3\partial_2{}^1+(2\beta_{12}+\beta_{66})\partial_1{}^2\partial_2{}^2-$$

$$-2\beta_{16}\partial_1^1\partial_2^3+\beta_{11}\partial_2^4)\Phi(x,y)=0 \tag{1.4}$$

$$\beta_{kn}, A_{kn}=\begin{cases}\beta_{kn}^+, A_{kn}^+ & (x>0)\\ \beta_{kn}^-, A_{kn}^- & (x<0)\end{cases} \quad \beta_{kn}^\pm=c^\pm a_{kn}^\pm$$

$$c^\pm=A_{11}^\pm[A_{22}^\pm A_{66}^\pm-(A_{26}^\pm)^2]+A_{22}^\pm[A_{11}^\pm A_{66}^\pm-(A_{16}^\pm)^2]+$$
$$+A_{66}[A_{11}^\pm A_{22}^\pm-(A_{12}^\pm)^2]$$

где $a_{kn}^\pm$, $A_{kn}^\pm$ — коэффициенты прямого и обратного закона Гука [4], соответственно, в правой ($x>0$) и левой ($x<0$) полуплоскостях.

Применим к уравнению (1.4) последовательно преобразование Фурье по переменной y (с параметром β) и (обобщенное [2]) по переменной x (с параметром α). Учитывая разрывность коэффициентов уравнения при $x=0$, получим соотношение

$$p_{\alpha\beta}^+\Psi_\beta^+(\alpha)+p_{\alpha\beta}^-\Psi_\beta^-(\alpha)=G_\beta(\alpha) \quad \left(G_\beta(\alpha)=\sum_{j=1}^{4}(-i\beta)^{j-1}\chi_j(\beta)\right)$$

$$\Psi_\beta^+(\alpha)=\int_0^\infty \Phi_\beta(x)e^{i\alpha x}\,dx, \quad \Psi_\beta^-(\alpha)=\int_{-\infty}^0 \Phi_\beta(x)e^{i\alpha x}\,dx,$$

$$\Phi_\beta(x)=\int_{-\infty}^\infty \Phi(x,y)e^{i\beta y}\,dy \tag{1.5}$$

$$p_{\alpha\beta}^\pm=\beta_{22}^\pm\alpha^4-2\beta_{26}^\pm\alpha^3\beta+(2\beta_{12}^\pm+\beta_{66}^\pm)\alpha^2\beta^2-2\beta_{16}^\pm\alpha\beta^3+\beta_{11}^\pm\beta^4$$

где $\chi_j(\beta)$ — линейные комбинации скачков производных $\Phi_\beta(x)$ при $x=0$.

Функции $\Psi_\beta^\pm(\alpha)$ в (1.5) аналитически продолжимы по α соответственно в верхнюю ($\xi>0$) и нижнюю ($\xi<0$) полуплоскости (комплексной плоскости $z=\alpha+i\xi$) как односторонние интегралы Фурье [5]. Следовательно, (1.5) представляет собой краевое условие задачи Римана для кусочно-аналитической функции $\Psi_\beta^\pm(z)$, причем $\lim \Psi_\beta^\pm(z)=\Psi_\beta^\pm(\alpha)$ при $z\to\alpha$.

Нетрудно заметить, что коэффициенты $p_{\alpha\beta}^\pm$ в условии (1.5) выражаются через характеристические многочлены уравнения (1.4), соответственно при $x>0$ и $x<0$ и, следовательно, могут быть представлены в виде

$$p_{\alpha\beta}^\pm=\beta_{22}^\pm q_1^\pm(\alpha,\beta)q_2^\pm(\alpha,\beta), \quad q_j^\pm(\alpha,\beta)=\prod_{m=1}^{2}[\alpha-\beta(\delta_m^\pm-i(-1)^j\gamma_m^\pm)]$$

($z_m^\pm=\delta_m^\pm+i\gamma_m^\pm$ — корни характеристических многочленов). Это позволяет записать краевое условие (1.5) следующим образом:

$$\Psi_\beta^+(\alpha)=-\frac{\beta_{22}^-}{\beta_{22}^+}Q_1(\alpha,\beta)Q_2(\alpha,\beta)\Psi_\beta^-(\alpha)+\frac{G_\beta(\alpha)}{p_{\alpha\beta}^+} \quad \left(Q_k(\alpha,\beta)=\frac{q_k^-(\alpha,\beta)}{q_k^+(\alpha,\beta)}\right) \tag{1.6}$$

Известное свойство корней характеристических многочленов[1] $\gamma_m^\pm>0$ [4] влечет за собой следующий факт: функция $Q_1(z,\beta)$ ($Q_2(z,\beta)$) имеет нули и полюсы при $\beta>0$ только в верхней (нижней) полуплоскости, а при $\beta<0$ — только в нижней (верхней). Причем количество нулей и плюсов при любом $\beta\in(-\infty,\infty)$ совпадает и равняется двум, следовательно, индекс задачи (1.6) равен нулю.

---

[1] Названные многочлены для введенной функции перемещений в каждой из полуплоскостей лишь множителем отличаются от таковых для функции напряжений [4].

Изложенные соображения позволяют, используя свойства рациональных функций $Q_k(\alpha, \beta)$, записать решение краевой задачи в виде

$$\beta_{22}^{\pm}\Psi_{\beta}^{\pm}(z)=\pm Q_{k+1/2\pm1/2}^{\pm1}(z, \beta)\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{[q_k^-(\tau, \beta)]^{-1}G_\beta(\tau)\,d\tau}{q_{k+1}^+(\tau, \beta)(\tau-z)} \quad \left(k=\frac{1}{2}(3+\operatorname{sign}\beta)\right) \tag{1.7}$$

Переходя в (1.7) к пределу при $z\to\alpha$, использовав формулы Сохотского [6], складывая и обращая полученные соотношения по α, после преобразований получим трансформанту искомой функции. Подстановка последней в выражения для трансформант функции (1.3) и переход к пределу при $x\to\pm0$ с учетом (1.1) позволяют записать

$$\psi_n^{\pm}(\beta)=\pm\frac{1}{2\pi}\sum_{j=1}^{4}N_{nj}^{\pm}\chi_j(\beta) \quad \left(\psi_j^{\pm}(\beta)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi_j^{\pm}(y)\,e^{i\beta y}\,dy\right)$$

$$N_{nj}^{\pm}=-\sum_{m=1}^{2}K_{jm}^{\pm}E_n^{\pm}(\delta_m^{\pm}\mp\operatorname{sign}\beta\, i\gamma_m^{\pm})$$

$$E_j^{\pm}(z)=(-1)^j z^{j-1}(\beta_{22}^{\pm}z^2-\beta_{26}^{\pm}z+\beta_{12}^{\pm}) \quad (j=1,\ 2)$$

$$E_3^{\pm}(z)=A_{11}^{\pm}z^2+2A_{16}^{\pm}z+A_{66}^{\pm}$$

$$E_4^{\pm}(z)=-(A_{16}^{\pm}z^2+(A_{11}^{\pm}+A_{66}^{\pm})z+A_{66}^{\pm})$$

$$K_{jm}^{+}=\frac{(\beta_{22}^{+})^{-1}q_k^-(\bar{\zeta}_m^{+},1)(-1)^m}{(\bar{\zeta}_1^{+}-\bar{\zeta}_2^{+})(\bar{\zeta}_1^{-}-\bar{\zeta}_2^{-})}\sum_{n=1}^{2}\frac{(\bar{\zeta}_n^{-})^{j-1}(-1)^n}{q_k^+(\zeta_n^-,1)(\bar{\zeta}_n^{-}-\bar{\zeta}_n^{+})}$$

$$K_{jm}^{-}=\frac{(\beta_{22}^{-})^{-1}q_{k+1}^+(\bar{\zeta}_m^{+},1)(-1)^m}{(\zeta_1^{+}-\zeta_2^{+})(\zeta_1^{-}-\zeta_2^{-})}\sum_{n=1}^{2}\frac{(\zeta_n^{+})^{j-1}(-1)^n}{q_{k+1}^-(\bar{\zeta}_n^+,1)(\zeta_n^{+}-\zeta_n^{-})}$$

$$\zeta_m^{\pm}=\delta_m^{\pm}+i\gamma_m^{\pm}\operatorname{sign}\beta \quad (m=1,\ 2;\ j=\overline{1,4})$$

Это, в свою очередь, дает возможность записать выражения трансформант физических величин (1.2)

$$h_n^{\pm}(\beta)=\sum_{j=1}^{4}R_{nj}^{\pm}\chi_j(\beta),\quad R_{nj}^{\pm}=N_{nj}^{+}\pm N_{nj}^{-},\quad h_j^{\pm}(\beta)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}H_j^{\pm}(y)\,e^{i\beta y}dy \quad (n,\ j=\overline{1,4}) \tag{1.8}$$

Восемь соотношений (1.8) содержат четыре неизвестных математических скачка $\chi_j(\beta)$. Для их исключения следует выбрать любые четыре соотношения из (1.8) и, рассматривая последние как систему алгебраических уравнений, обратить. Последующей подстановкой найденных выражений $\chi_j(\beta)$ в оставшиеся соотношения из (1.8) установим непосредственную связь физических величин (1.2) в трансформантах.

Например, выбрав в (1.8) соотношения, содержащие $h_j^-(\beta)$, и реализуя описанные операции, получим

$$lh_j^{+}(\beta)=\sum_{k=1}^{4}(b_{jk}+ic_{jk}\operatorname{sign}\beta)\,h_k^{-}(\beta) \quad (j=\overline{1,4}) \tag{1.9}$$

$$2l=r_2^+r_3^+-(r_1^+)^2-(r_4^-)^2,\quad b_{12}=r_{12}^-,\quad b_{13}=r_4^-,\quad b_{21}=r_{13}^-$$

$$b_{31}=r_{54}^-,\quad b_{k,\,5-k}=0,\quad c_{kk}=(-1)^{k+1}\operatorname{sign}(5/2-k)\,r_{14}^+ \quad (k=1,\ 4),\quad c_{12}=r_{24}^+$$

$$c_{13}=-r_1^+,\quad c_{14}=r_2^+,\quad c_{23}=r_{30}^+,\quad c_{21}=-r_{34}^+,\quad c_{31}=-r_{15}^+,\quad c_{32}=-r_{25}^+$$

$$c_{41}=-r_{35}^+,\quad b_{kj}=-b_{5-j,\,5-k},\quad c_{kj}=c_{5-j,\,5-k}\quad (k+j<5),$$

$$r_{nm}^\pm=A_n^-A_m^+\pm A_n^+A_m^-$$

$$r_n^\pm=A_n^-\pm A_n^+,\quad A_1^\pm=a_{22}^\pm(\delta_1^\pm\gamma_2^\pm+\delta_2^\pm\gamma_1^\pm)$$

$$A_2^\pm=a_{22}^\pm(\gamma_1^\pm+\gamma_2^\pm),\quad A_3^\pm=a_{22}^\pm(\gamma_1^\pm|z_2^\pm|^2+\gamma_2^\pm|z_1^\pm|^2)$$

$$A_4^\pm=a_{22}^\pm(\gamma_1^\pm\gamma_2^\pm-\delta_1^\pm\delta_2^\pm)+a_{12}^\pm,$$

$$A_5^\pm=A_2^\pm A_3^\pm-(A_1^\pm)^2-(A_4^\pm)^2$$

Применяя к (1.9) обратное преобразование Фурье, получим искомые соотношения, связывающие скачки и суммы компонент вектора перемещений и тензора напряжений на линии раздела полуплоскостей

$$\mathbf{B}\mathbf{H}^-(y)+\mathbf{C}\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\mathbf{H}^-(t)\frac{dt}{t-y}=l\mathbf{H}^+(y)$$

$$\mathbf{H}^\pm(y)=\{H_j^\pm(y)\},\quad \mathbf{B}=\{b_{jk}\}_1^4,\quad \mathbf{C}=\{c_{jk}\}_1^4 \tag{1.10}$$

Отметим, что изложенным способом, выбирая в (1.8) иные разрешающие соотношения, можно получить другие соотношения, аналогичные (1.10) (общее их количество равно C_8^4), которые оказываются удобными для формулировки тех или иных задач о неполном контакте двух анизотропных полуплоскостей в зависимости от характера их взаимодействия. Соотношения (1.10), в частности, позволяют дать математическую формулировку в виде системы сингулярных интегральных уравнений различных задач для составной анизотропной плоскости, ослабленной конечными дефектами (трещинами, включениями) на линии раздела материалов.

2. Пусть, например, в трещину $x=0$, $|y|<a$ вставлено абсолютно жесткое включение переменной толщины. К включению приложена произвольная нагрузка, сводящаяся к равнодействующей P, имеющей проекции P_1 и P_2 и создающей относительно начала координат момент P_0. Положение граней включения после деформации описывается функциями

$$u_\pm(y)=u_0(y)+g_+(y)\pm g_-(y)\quad (|y|<a)$$

$$u_0(y)=\varepsilon+\delta y,\quad 2g_\pm(y)=u_*^+(y)\pm u_*^-(y)$$

$$(g_\pm(a)=g_\pm(-a)=0)$$

Здесь $u_*^+(y)$, $u_*^-(y)$ задают форму, соответственно, правой и левой граней включения, $u_0(y)$ — линейное смещение включения.

Учитывая свойства $H_j^-(y)\equiv 0$ ($|y|>a$, $j=\overline{1,4}$), отражающие факт сцепления полуплоскостей вне включения, рассматриваемую задачу можно сформулировать в виде матричного сингулярного интегрального уравнения на конечном интервале

$$\mathbf{B}_*\mathbf{t}(y)+\mathbf{C}_*\Gamma[\mathbf{t}]=\mathbf{q}(y)\quad (|y|<a)\quad \left(\Gamma[\mathbf{t}]\equiv\frac{1}{\pi}\int\limits_{-a}^{a}\frac{\mathbf{t}(\eta)}{\eta-y}d\eta\right) \tag{2.1}$$

Компонентами вектор-функции $\mathbf{t}(y)$ являются скачки $H_k^-(y)$ ($k=1,4$), удовлетворяющие условиям равновесия и замкнутости разреза, а также моментному условию равновесия, служащему для определения неизвестного угла поворота включения δ ($\mathbf{P}$ — постоянный вектор $\mathbf{P}=(P_1, P_2, 0, 0)$):

$$I[\mathbf{t}]\equiv\int\limits_{-a}^{a}\mathbf{t}(y)\,dy=\mathbf{P},\quad \int\limits_{-a}^{a}H_1^-(y)\,y\,dy=P_0 \tag{2.2}$$

Размерность матриц $\mathbf{B}_*$, $\mathbf{C}_*$ и вектор-функций $\mathbf{t}(y)$ и $\mathbf{q}(y)$ зависит от типа контактного взаимодействия включения со средой. Если, например, на обеих гранях включения реализованы условия полного сцепления то, принимая во внимание равенства $H_4^+(y)=2\delta+2g_+(y)$, $H_4^-(y)=2g_-(y)$, $H_3^+(y)=H_3^-(y)=0$ $(|y|<a)$ и воспользовавшись третьим и четвертым соотношениями из (1.10), приходим к системе двух $(n=2)$ уравнений (2.1), в которой

$$\mathbf{B}_*=\begin{Vmatrix} b_{31} & 0 \\ 0 & b_{42}\end{Vmatrix},\quad \mathbf{C}_*=\begin{Vmatrix} c_{31} & c_{32} \\ c_{41} & c_{42}\end{Vmatrix},\quad \mathbf{t}(y)=\begin{Vmatrix} H_1^-(y) \\ H_2^-(y)\end{Vmatrix}$$

$$q_k(y)=-c_{k+2,\,4}\Gamma[H_4^-]-b_{k+2,\,4}H_4^-(y)+\delta_{2,\,k}lH_4^+(y)$$

Указанную систему следует дополнить соответствующими условиями равновесия.

Аналогично при помощи соотношений (1.10) формулируются и другие задачи для включений при иных вариантах контактного взаимодействия с полуплоскостями.

3. Изложим способ решения систем уравнений вида (2.1) n-го порядка (n — произвольное целое число), который является обобщением метода, предложенного в [7]. Будем считать, что матрицы $\mathbf{C}_*$ и $\mathbf{B}_*$ не являются одновременно вырожденными — в противном случае система допускает понижение порядка.

Поэтому считая, например, матрицу $\mathbf{C}_*$ невырожденной [2] и подействовав на (2.1) матрицей $\mathbf{C}_*^{-1}$ слева, получим уравнение

$$\mathbf{M}\mathbf{t}(y)+\Gamma[\mathbf{t}]=\mathbf{C}_*^{-1}\mathbf{q}(y)\qquad (|y|<a,\ \mathbf{M}=\mathbf{C}_*^{-1}\mathbf{B}_*)\tag{3.1}$$

Представив далее матрицу $\mathbf{M}$ в нормальной форме [8]: $\mathbf{M}=\mathbf{SJS}^{-1}$ ($\mathbf{S}$, $\mathbf{S}^{-1}$ — преобразующая и ей обратная матрицы, $\mathbf{J}$ — нормальная жорданова форма матрицы $\mathbf{M}$: $\mathbf{J}=\lambda\mathbf{E}+\mathbf{F}$) и домножая (3.1) слева на матрицу $\mathbf{S}^{-1}$, получим

$$\mathbf{J}\boldsymbol{\tau}(y)+\Gamma[\boldsymbol{\tau}]=\mathbf{g}(y)\qquad (|y|<a)$$
$$\boldsymbol{\tau}(y)=\mathbf{S}^{-1}\mathbf{t}(y)\qquad (\mathbf{t}(y)=\mathbf{S}\boldsymbol{\tau}(y),\ \mathbf{g}(y)=\mathbf{S}^{-1}\mathbf{C}_*^{-1}\mathbf{q}(y))\tag{3.2}$$

Пусть характеристические числа $\lambda^{(l)}$ $(l=1,2,\ldots,m)$ матрицы $\mathbf{M}$ имеют кратность n_l $(n_1+\ldots+n_m=n)$. Покажем, что при этом матричное уравнение (3.2) распадается на m независимых систем уравнений. Структуру этих систем легко выявить вводя для компонент $\tau_j(y)$, $g_j(y)$ $(j=\overline{1,n_l})$ векторов $\boldsymbol{\tau}(y)$, $\mathbf{g}(y)$ новые обозначения: разобьем указанные компоненты последовательно на m групп, содержащих по n_l компонент, и введем в пределах каждой группы свою нумерацию

$$\boldsymbol{\tau}^{(l)}(y)=\{\tau_j^{(l)}(y)\},\ \mathbf{g}^{(l)}(y)=\{g_j^{(l)}(y)\}\quad (l=\overline{1,m};\ j=\overline{1,n_l}).$$

При этих обозначениях вместо (3.2) можем записать

$$K^\circ[\tau_j^{(l)}]\equiv\lambda^{(l)}\tau_j^{(l)}(y)+\Gamma[\tau_j^{(l)}]=g_j^{(l)}(y)-\tau_{j-l}^{(l)}(y)\qquad (\tau_0^{(l)}(y)\equiv 0)\tag{3.3}$$

Тем самым установлено, что каждая из систем уравнений, на которые распалось матричное уравнение (3.2), образует двучленную рекуррентную последовательность сингулярных интегральных уравнений второго рода. Далее рассмотрим одну из таких систем, опуская в последующих формулах индекс l.

Для оператора K°, фигурирующего в левой части (3.3), известен резольвентный. В частности, решение в классе функций с интегрируемыми особенностями имеет вид [6]:

$$\tau_j(y)=\omega^{-1}(y)\{R[\omega(g_j-\tau_{j-1})]+c_j\}\quad (j=\overline{1,n_l})$$

[2] В случае $\det\mathbf{C}_*=0$ преобразование следует выполнить оперируя матрицей $\mathbf{B}_*^{-1}$.

$$\omega(y)=(a-y)^{\mu}(a+y)^{1-\mu},\quad \mu=(2\pi i)^{-1}\ln[(\lambda+i)(\lambda-i)^{-1}]$$
$$(0<\operatorname{Re}\mu<1,\quad R[f]\equiv\gamma(\lambda f-\Gamma[f]),\quad \gamma=(\lambda^2+1)^{-1} \tag{3.4}$$

где c_j — произвольные постоянные, определяемые из условий $I[\tau_j]=\rho_j$, вытекающих из (2.2) с учетом (3.2) и введенных переобозначений, ρ_j — соответствующие компоненты вектора $\mathbf{D}=\mathbf{S}^{-1}\mathbf{P}$.

Последовательно исключая в (3.4) функции $\tau_{j-1}(y)$, выпишем явное решение системы (2.1):

$$\tau_j(y)=\omega^{-1}(y)\sum_{m=1}^{j}(-1)^{j-m}\{R^{j-m+1}[\omega g_m]+c_m R^{j-m}[1]\}$$
$$(j=1,n)\quad R^p[\varphi]\equiv R[R^{p-1}[\varphi]]\quad (R^{\circ}[\varphi]\equiv\varphi(y)) \tag{3.5}$$

Отметим, что процедура отыскания c_j существенно упрощается благодаря свойству «самоуравновешенности» частного решения интегрального уравнения $K^{\circ}[\varphi]=f(y)$:

$$\int_{-a}^{a}\varphi(y)\,dy=\int_{-a}^{a}\omega^{-1}(y)R[\omega f]\,dy=0$$

Это позволяет выразить постоянные c_j непосредственно через компоненты вектора $\mathbf{D}$: $c_j=\pi^{-1}\gamma^{1/2}\rho_j$ $(j=\overline{1,n})$.

4. Проанализируем поведение решения (3.5) в концевых точках интервала $(-a, a)$, выбрав для определенности точку $y=a$. На асимптотику решения оказывают влияние кратность характеристического числа λ и характер поведения функций $g_m(y)$, $\omega^{-1}(y)$ при $y\to a$.

Рассмотрим сначала случай простого $(n_l=1)$ характеристического числа: $\tau_1(y)=\omega^{-1}(y)\{R[\omega g_1]+c_1\}$. Представив функцию $g_1(y)$ при $y\to a$ в виде $g_1(y)=g_1^{\circ}(y)(a-y)^{\nu}+g_1^{*}(y)$, $(g_1^{\circ}(y)$, $g_1^{*}(y)$ ограничены при $y\to a$, $g_1^{\circ}(a)\neq0)$ и учитывая поведение интеграла типа Коши на конце контура интегрирования [6], асимптотику решения при $y\to a$ можно охарактеризовать следующим образом:

$$\tau_1(y)=k(a-y)^{\nu}+k^{\circ}\omega^{-1}(y)+\tau_1^{*}(y)\quad (y\to a,\ \operatorname{Re}\mu+\nu\neq0) \tag{4.1}$$

Если $\operatorname{Re}\mu+\nu=0$, то в асимптотике добавляется слагаемое вида $k^{*}(a-y)^{\nu}\ln(a-y)$. Первое слагаемое в (4.1) учитывает влияние асимптотики правой части (2.1), второе — отражает зависимость от свойств матрицы $\mathbf{M}$ (3.1), причем исследование формулы (3.4) с позиций конформного отображения позволяет увязать свойства $\omega^{-1}(y)$ непосредственно с положением характеристического числа λ на комплексной λ-плоскости.

1. Если λ комплексно $(\operatorname{Re}\lambda\neq0,\ \operatorname{Im}\lambda\neq0)$, то решение осциллирует $(\operatorname{Im}\mu\neq0)$ и имеет степенную особенность $(\operatorname{Re}\mu\neq0)$, показатель которой в правой полуплоскости убывает $(\operatorname{Re}\mu<1/2)$ к нулю с ростом $\operatorname{Re}\lambda\to\infty$, а в левой возрастает $(\operatorname{Re}\mu>1/2)$ к 1 при $\operatorname{Re}\lambda\to-\infty$, причем на единичной окружности $(|\lambda|=1)$ $\operatorname{Re}\mu$ сохраняет постоянные значения: в правой полуплоскости $\operatorname{Re}\mu=1/4$, в левой — $\operatorname{Re}\mu=3/4$.

2. Если λ мнимо $(\operatorname{Re}\lambda=0)$ и $|\operatorname{Im}\lambda|<1$ [3], то решение обладает корневой $(\operatorname{Re}\mu=1/2)$ особенностью, усиленной (при $\operatorname{Im}\lambda\neq0$) осцилляцией.

3. Если λ вещественно $(\operatorname{Im}\lambda=0)$, то решение имеет только степенную особенность $(\operatorname{Im}\mu=0)$ с показателем $0<\operatorname{Re}\mu<1$ (закон изменения $\operatorname{Re}\mu$ описан в п. 4, 1), причем корневая $(\operatorname{Re}\mu=1/2)$ особенность имеет место при $\operatorname{Re}\lambda=0$.

[3] При $|\operatorname{Im}\lambda|\geqslant1$ уравнение (3.3) не имеет решений в классе функций с интегрируемыми особенностями.

Далее, воспользовавшись результатами [9], формулами (3.4), (3.5) учитывая поведение интегралов типа Коши и полагая $g_m(y)=g_m^\circ(y)\times\times(a-y)^{\nu_m}+g_m^*(y)$, запишем асимптотическое представление решения (3.5) в случае кратного характеристического числа в форме ($j=\overline{1, n_l}$):

$$\tau_j(y)=\sum_{m=1}^{j}k_{jm}(a-y)^{\nu_m}+\omega^{-1}(y)P_{j-1}(\ln(a-y))+\tau_j^*(y)$$

$$(\operatorname{Re}\mu+\nu\neq 0) \tag{4.2}$$

где $P_k(z)$ — многочлен точной степени k.

Из (4.2) вытекает, что зависимость асимптотики решения от свойств матрицы $\mathbf{M}$ при кратном λ также описывается правилами 1—3, но с добавлением множителя $P_{j-1}(\ln(a-y))$. Что касается правых частей, то на асимптотику $\tau_j(y)$ непосредственно переносятся свойства всех $g_m(y)$ ($1\leqslant\leqslant m\leqslant j$), причем в случае $\operatorname{Re}\mu+\nu=0$ в (4.2) добавляется слагаемое вида $k_{jm}^*(a-y)^{\nu_m}\ln^m(a-y)$.

Отметим, что при наличии в системах (3.1) регулярных ядер полученные качественные результаты позволяют применить к их решению эффективные приближенные методы.

5. Проиллюстрируем изложенное на примерах задач для абсолютно жесткого нетонкого включения в составной анизотропной плоскости. Предварительно отметим, что в задачах такого типа характеристические числа матрицы $\mathbf{M}$ в зависимости от упругих параметров в общем случае могут быть либо вещественными, либо мнимыми, что приводит к качественным отличиям решений. Ниже выписаны те из них, которые представляются более естественными, и указаны соответствующие ограничения на упругие постоянные. Можно показать, что упомянутым ограничениям удовлетворяют однородная анизотропная, а также неоднородная изотропная плоскости.

Например, для сформулированной в п. 2 задачи характеристические числа матрицы $\mathbf{M}$ (при $c=-\det\mathbf{C}_*>0$) равны $\lambda_k=\pm i|b_{31}|c^{-1/2}$ ($|\lambda_k|<1$, $k==1, 2$). Следовательно, функции $H_k^-(y)$ ($k=1, 2$) имеют корневую особенность, усиленную (при $\lambda_k\neq0$) осцилляцией. В частности, нормальные напряжения на берегах разреза равны

$$\begin{aligned}\varphi_1^\pm(y)={}&s_{11}\Gamma[H_4^-]+(a^2-y^2)^{-1/2}\Bigg\{\cos\left(\mu\ln\frac{a-y}{a+y}\right)\times\\&\times[\Gamma_c[s_{12}^\pm H_4^-\pm s_{13}H_4^+]+s_{14}\Gamma_s[H_4^+\mp H_4^-]+\\&+\sum_{j=1}^{2}s_{1,4+j}^{\pm}P_j]+\sin\left(\mu\ln\frac{a-y}{a+y}\right)[s_{14}^\pm\Gamma_c[H_4^+\mp H_4^-]+\\&+\Gamma_s[s_{12}^\pm H_4^-\pm s_{13}^\pm H_4^+]\pm\sum_{j=1}^{2}s_{1,6+j}^{\pm}P_j\Bigg]\Bigg\},\end{aligned} \tag{5.1}$$

$$\Gamma_{s,c}[f]\equiv\frac{1}{\pi}\int_{-a}^{a}\begin{pmatrix}\sin\\ \cos\end{pmatrix}\left(\mu\ln\frac{a-t}{a+t}\right)(a^2-t^2)^{1/2}f(t)\frac{dt}{t-y}$$

Здесь (и в последующих формулах) s_{jk}, $s_{jk}^\pm$ — постоянные, зависящие от упругих характеристик полуплоскостей (ввиду громоздкости их не приводим). Отметим, что в однородной (анизотропной) плоскости ($\lambda_k=0$) осцилляция напряжений возле сцепленного включения отсутствует

$$\varphi_1^\pm(y)=(2l)^{-1}\left\{\Gamma[H_4^-]+\omega^{-1}(y)\left[\Gamma[\omega(H_4^-\pm H_4^+)]\pm\frac{l}{\pi}P_1\right]\right\}$$

$$\omega(y)=(a^2-y^2)^{1/2}.$$

Анализ асимптотики функций (5.1) в концевых точках (см. п. 4) в зависимости от формы включения в окрестностях концов показывает, что если $g_-'(\pm a)=0$ (концы включения заострены, и имеет место плавное смыкание берегов разрезов), то поведение решения полностью определяется упругими постоянными материалов (корневая особенность с осцилляцией). При конечных значениях $g_-'(y)$ $(y\to\pm a)$ (концы включения заострены и образуют некоторый отличный от нуля угол) к отмеченным особенностям первое слагаемое в (5.1) добавляет особенность логарифмического типа. Если $g_-'(y)$ при $y\to\pm a$ неограничено, то указанная логарифмическая особенность переходит в степенную с показателем ν $(\nu>0)$, характеризующим степенной рост $g_-'(y)$. При этом, если $\nu=0{,}5$, то к указанным выше особенностям добавляется корневая, усиленная логарифмическим множителем.

Фигурирующий в $H_4^+(y)$ угол поворота включения δ определяется, как уже отмечалось, из условия (2.2). Анализ соответствующего выражения показывает, что в случае различных анизотропных полуплоскостей нетонкое включение получит вращение при любом способе загружения (в том числе только центральной силой P_1). Поворот имеет место и при отсутствии нагрузки (он обуславливается формой включения), за исключением абсолютного тонкого включения, форма которого симметрична $g_+(-y)=$ $=g_+(y)$. В случае однородной анизотропной плоскости при отсутствии моментной нагрузки $(P_0=0,\ P_1\neq0,\ P_2\neq0)$ включение с симметрично изогнутой осью $(g_+(-y)=g_+(y))$ может переместиться только поступательно, независимо от толщины $g_-(y)$.

Рассмотрим другие типы контактного взаимодействия включения с полуплоскостями. При гладком контакте характеристические числа матрицы $\mathbf{M}$ (при $c=\det \mathbf{C}_*>0$) вещественны $\lambda_{1,2}=\pm|b_{21}|c^{-1/2}$. Следовательно, решения имеют степенные особенности с показателями μ и $1-\mu$ $(\mu=$ $=\pi^{-1}\operatorname{arcctg}\lambda_1,\ 0<\mu<1)$. При этом нормальные напряжения определяются формулами [4]

$$\varphi_1^\pm(y)=s_{21}\Gamma[H_4^-]+\sum_{j=1}^{2}\omega_j^{-1}(y)\,\{\Gamma[\omega_j(s_{22}\pm H_4^-\pm s_{23}H_4^+)]+s_{24}P_1\}$$

$$\omega_1(y)=(a-y)^{\mu}(a+y)^{1-\mu},\quad \omega_2(y)=(a-y)^{1-\mu}(a+y)^{\mu}$$

Нетрудно видеть, что зависимость асимптотики выписанного решения от формы включения в концевых точках аналогична предыдущей задаче. Отличие состоит лишь в том, что дополнительное степенное слагаемое, усиленное логарифмическим множителем, появляется в двух случаях: $\nu=\mu$ и $\nu=1-\mu$. Что касается угла поворота, то анализ соответствующей формулы приводит к таким же выводам, что и в предыдущей задаче.

Если условия на гранях включения смешанные: одна из граней $(x=$ $=-0)$ находится в условиях гладкого контакта, а другая $(x=+0)$ сцеплена с полуплоскостью, то при выполнении условия $G>0$ $(G=2A_3^-A_5^+l-b_3,$ $b_3=A_3^+A_5^+(A_5^- -(A_4^-)^2)+A_3^-A_5^-(A_5^+-(A_4^+)^2)$ — характеристические числа матрицы $\mathbf{M}$ вещественны $\lambda_1=0,\ \lambda_{2,3}=\pm G^{1/2}b_3^{-1/2}$. Следовательно, решение наряду с корневой имеет степенные особенности с показателями μ и $1-\mu$ $(\mu=\pi^{-1}\operatorname{arcctg}\lambda_2)$:

$$H_1^-(y)=\sum_{j=1}^{3}\omega_j^{-1}(y)\left\{\Gamma[\omega_j(s_{3j}^+H_4^++s_{3j}^-H_4^-)]+\sum_{k=1}s_{3+k,j}P_k\right\}$$

$$\omega_1(y)=(a^2-y^2)^{1/2},\quad \omega_2(y)=(a-y)^{\mu}(a+y)^{1-\mu}$$

$$\omega_3(y)=(a-y)^{1-\mu}(a+y)^{\mu}$$

[4] Заметим, что в аналогичной задаче для абсолютно гибкого включения [1] нормальные напряжения ограничены.

Как и в предыдущих двух задачах, форма включения в его концах вносит соответствующие коррективы в асимптотику решения. При этом степенные слагаемые, усиленные логарифмическим множителем, появляются в трех случаях: $\nu=0{,}5$, $\nu=\mu$, $\nu=1-\mu$.

Отметим вариант рассматриваемой задачи, который может иметь место в случае $G=0$. При этом матрица $\mathbf{M}$ имеет трехкратное характеристическое число $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$, что приводит к качественным изменениям структуры решения.

Последнее имеет корневую особенность, усиленную логарифмическим многочленом второй степени

$$H_1^-(y)=\omega_1^{-1}(y)\ \Gamma[\omega_1(s_{6j}^+H_4^++s_{6j}^-H_4^-)]+\sum_{k=1}^{2}P_k\sum_{j=1}^{3}s_{6+k,j}\ln^{j-1}\frac{a-y}{a+y}+$$

$$+\sum_{j=1}^{3}\ln^{j-1}\frac{a-y}{a+y}\Gamma\left[\ln^{3-j}\frac{a-\eta}{a+\eta}\,(s_{9j}^+H_4^++s_{9j}^-H_4^-)\right]\Bigg\} \qquad (5.2)$$

Анализ формулы (5.2) в зависимости от формы включения показывает, что при $\nu=0{,}5$ (концы закруглены и имеют форму параболы второй степени) решение имеет корневую особенность, усиленную логарифмическим многочленом третьей степени.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Радиолло М. В.* Включение переменной толщины в составной анизотропной плоскости. – Изв. АН СССР. МТТ, 1981, № 5, с. 85–93.
2. *Попов Г. Я.* Об одном способе решения задач механики для областей с разрезами или тонкими включениями. – ПММ, 1978, т. 42, вып. 1, с. 122–135.
3. *Попов Г. Я.* Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений. М.: Наука, 1982. 342 с.
4. *Лехницкий С. Г.* Теория упругости анизотропного тела. М.: Наука, 1977. 415 с.
5. *Гахов Ф. Д., Черский Ю. И.* Уравнения типа свертки. М.: Наука, 1978. 295 с.
6. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. М.: Наука, 1977. 640 с.
7. *Радиолло М. В.* Изгиб многослойного балочного пакета. – Изв. АН СССР. МТТ, 1979, № 3, с. 135–143.
8. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1967. 575 с.
9. *Юров П. Г.* Интегралы типа Коши и уравнения в конечных разностях. – Изв. АН БССР. Сер. физ.-матем. н., 1967, № 3, с. 67–74.

Одесса

Поступила в редакцию
23.VI.1982