МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 3 • 1984

УДК 539.3

ТОНКИЙ ДЕФЕКТ В ОДНОРОДНОЙ УПРУГОЙ СРЕДЕ

КАНАУН С. К.

Работа посвящена исследованию задачи теории упругости для трехмерной однородной среды, содержащей одиночное тонкое включение. Предполагается, что модули упругости материала включения существенно меньше модулей упругости среды. Используя малость поперечного размера включения, исходную задачу можно заменить краевой задачей теории упругости для основной среды со специальными граничными условиями на срединной поверхности включения. С помощью представления упругих полей в форме потенциалов эта краевая задача сводится к двумерному псевдодифференциальному уравнению относительно вектора скачка перемещений на включении. Исследуются свойства используемых потенциалов, найден вид асимптотики решения полученного уравнения вблизи края неоднородности. Показано, что для тонкого эллипсоидального дефекта, находящегося в полиномиальном внешнем поле, это уравнение допускает решение в квадратурах.

Для изотропной среды аналогичная постановка плоской и пространственной задачи о тонком включении рассматривалась в [1, 2].

1. Постановка задачи. Пусть в однородной упругой среде с тензором модулей $c_0^{\alpha\beta\lambda\mu}$ имеется тонкое включение с модулями $c^{\alpha\beta\lambda\mu}$. Включение, спаянное с основной средой по границе, занимает односвязную область V с гладкой срединной поверхностью Ω. В дальнейшем будем считать, что границей Ω является гладкая замкнутая кривая Γ, не имеющая точек самопересечения. Внешнее поле напряжений $\sigma_0(x)$ (деформаций $\varepsilon_0(x)$) в среде создается нагрузками, приложенными на бесконечности, $\sigma_0^{\alpha\beta}(x)=c_0^{\alpha\beta\lambda\mu}\varepsilon_{0\lambda\mu}(x)$, $x(x_1, x_2, x_3)$ — точка среды.

Зададимся ориентацией Ω и свяжем с каждой точкой x на этой поверхности локальную систему координат с осью z, направленной по нормали $n(x)$ к Ω. Пусть $h(x)$ — размер включения вдоль оси z, малый по сравнению с другими характерными размерами области V. Будем считать, что функция $h(x)$ достаточно гладкая и всюду на поверхности Ω, за исключением, быть может, малой окрестности Γ, удовлетворяет соотношению $|\partial h(x)|\ll 1$, где ∂ — операция градиента вдоль Ω.

Используя малость поперечного размера включения $h(x)$, исходную задачу сопряжения можно заменить краевой задачей теории упругости для основной среды со следующими граничными условиями на поверхности Ω, приближенно моделирующими наличие включения [1, 2] ($x\in\Omega$):

$$[n_\alpha(x)\sigma^{\alpha\beta}(x)]=0,\quad [u_\alpha(x)]=b_\alpha(x) \tag{1.1}$$

$$n_\alpha(x)\sigma^{\alpha\beta}(x)=\lambda^{\alpha\beta}(x)b_\alpha(x),\quad \lambda^{\alpha\beta}(x)=h^{-1}(x)n_\lambda(x)c^{\lambda\alpha\beta\mu}n_\mu(x) \tag{1.2}$$

Здесь $u(x)$ — вектор упругих перемещений, $\sigma(x)$ — тензор напряжений; квадратные скобки означают разность предельных значений величины на различных сторонах поверхности Ω в точке $x\in\Omega$.

Условия на бесконечности для полей напряжений $\sigma(x)$ и деформаций $\varepsilon(x)$ имеют вид

$$\sigma(x)\to\sigma_0(x),\quad \varepsilon(x)\to\varepsilon_0(x)\quad \text{при } |x|\to\infty \tag{1.3}$$

Заметим, что условия (1.1), (1.2) моделируют наличие в среде тонкого включения, модули упругости которого значительно меньше модулей упругости среды (трещиноподобные дефекты). Можно показать [3], что решение сформулированной краевой задачи дает главные члены разложения упругих полей вне включения в асимптотические ряды по двум малым параметрам: отношению характерных линейных размеров включения и отношению характерных значений модулей упругости включения и среды. Таким образом, это решение тем ближе к точному, чем меньше указанные параметры. Двойственная задача о тонком включении, модули упругости которого существенно больше модулей упругости среды, рассматривалась в [3, 4].

Решение краевой задачи с условиями (1.1)—(1.3) удобно искать в форме следующих потенциалов:

$$\sigma(x)=\sigma_0(x)+\sigma_1(x), \quad \sigma_1^{\alpha\beta}(x)=\int\limits_\Omega S^{\alpha\beta\lambda\mu}(x-x')\,n_\lambda(x')\,b_\mu(x')\,d\Omega' \tag{1.4}$$

$$\varepsilon(x)=\varepsilon_0(x)+\varepsilon_1(x), \quad \varepsilon_{1\alpha\beta}(x)=\int\limits_\Omega K_{\alpha\beta\lambda\mu}(x-x')\,c_0^{\lambda\mu\nu\rho}\,n_\nu(x')\,b_\rho(x')\,d\Omega' \tag{1.5}$$

Здесь $b(x)$ — вектор, фигурирующий в граничном условии (1.2), $S(x)$ и $K(x)$ — обобщенные функции, связанные с тензором Грина $G(x)$ однородной среды c_0 соотношениями

$$K_{\alpha\beta\lambda\mu}(x)=-[\nabla_\alpha\nabla_\lambda G_{\beta\mu}(x)]_{(\alpha\beta)(\lambda\mu)} \tag{1.6}$$

$$S^{\alpha\beta\lambda\mu}(x)=c_0^{\alpha\beta\nu\rho}K_{\nu\rho\tau\delta}(x)\,c_0^{\tau\delta\lambda\mu}-c_0^{\alpha\beta\lambda\mu}\delta(x) \tag{1.7}$$

где ∇ — операция градиента в $\mathbf{R}^3$, $\delta(x)$ — трехмерная дельта-функция Дирака; круглые скобки означают симметрирование по соответствующим индексам. Тензор G удовлетворяет известному уравнению (δ_β^α — символ Кронекера):

$$\nabla_\lambda c_0^{\lambda\alpha\beta\mu}\nabla_\beta G_{\mu\nu}(x)=-\delta_\nu^\alpha\delta(x) \tag{1.8}$$

Можно показать [5], что потенциалы σ_1 и ε_1 в (1.4), (1.5) имеют смысл, соответственно, поля внутренних напряжений и поля деформаций в однородной среде, содержащей дислокационные моменты, плотность которых $m(x)$ имеет вид $m_{\alpha\beta}(x)=n_\alpha(x)\,b_\beta(x)\,\delta(\Omega)$, где $\delta(\Omega)$ — дельта-функция, сосредоточенная на поверхности Ω. Другая интерпретация потенциалов σ_1 и ε_1 будет дана ниже.

Представления (1.4), (1.5) для тензоров напряжений и деформаций удобны тем, что при произвольной плотности $b(x)$ они автоматически удовлетворяют уравнениям равновесия ($\operatorname{div}\sigma=0$) и совместности ($\operatorname{Rot}\varepsilon=0$) во всем пространстве [5], а также условиям на бесконечности (1.3). Вне Ω эти тензоры связаны законом Гука для основной среды, а соответствующий тензору (1.4) вектор напряжений $n_\alpha(x)\sigma^{\alpha\beta}(x)$ удовлетворяет условию непрерывности (1.1) на поверхности Ω (см. п. 2).

Оставшееся граничное условие (1.2) после подстановки в него $\sigma(x)$ в форме (1.4) дает уравнение для неизвестного векторного поля $b(x)$ на Ω:

$$\lambda^{\alpha\beta}(x)\,b_\beta(x)+\int\limits_\Omega T^{\alpha\beta}(x,x')\,b_\beta(x')\,d\Omega'=n_\beta(x)\,\sigma_0^{\alpha\beta}(x) \quad (x\in\Omega) \tag{1.9}$$

$$T^{\alpha\beta}(x,x')=-n_\lambda(x)\,S^{\lambda\alpha\beta\mu}(x-x')\,n_\mu(x') \tag{1.10}$$

где $S(x)$ имеет вид (1.7) и является обобщенной однородной функцией степени -3. Поэтому при $x=x'$ ядро $T(x,x')$ формально неинтегрируемо. Если $c=0$, то граничное условие (1.2) на Ω становится однородным и (1.9) переходит в уравнение для трещины, которое исследовалось в [6].

Для построения регулярного представления интегрального оператора с ядром $T(x,x')$ в (1.9) рассмотрим свойства потенциалов (1.4), (1.5) более подробно.

2. Потенциалы ε_1 и σ_1. Пусть вначале Ω — замкнутая поверхность Ляпунова, ограничивающая односвязную конечную область V в $\mathbf{R}^3$. Рассмотрим потенциал

$$\varepsilon_{1\alpha\beta}(x)=\int\limits_{\Omega} K_{\alpha\beta\lambda\mu}(x-x')\,c_0^{\lambda\mu\nu\rho}\,n_\nu(x')\,b_\rho(x)\,d\Omega' \tag{2.1}$$

где $K(x)$ имеет вид (1.6). Из структуры подынтегрального выражения следует равенство $\varepsilon_{1\alpha\beta}(x)=\nabla_{(\alpha}u_{1\beta)}(x)$, в котором вектор $u_1(x)$ есть потенциал двойного слоя статической теории упругости [7]. Известно, что для любой непрерывной плотности $b(x)$ поля $u_1(x)$ и $\varepsilon_1(x)$ непрерывны всюду в $\mathbf{R}^3$, за исключением поверхности Ω, причем разрыв $u_1(x)$ на Ω удовлетворяет второму из условий (1.1).

Рассмотрим интеграл (2.1) при $b=\mathrm{const}$. Применяя формулу Остроградского и используя определение (1.6), (1.8) функции $K(x)$, получим

$$\varepsilon_{1\alpha\beta}(x)=\int\limits_{V} \nabla_\nu' K_{\alpha\beta\lambda\mu}(x-x')\,c_0^{\lambda\mu\nu\rho}\,dx'\,b_\rho=n_{(\alpha}(x)\,b_{\beta)}\,\delta(\Omega) \tag{2.2}$$

Пусть теперь $b(x')$ в (2.1) есть линейная функция вида

$$b_\alpha(x')=D_{\alpha\beta}(x-x')^\beta \tag{2.3}$$

где D — постоянный тензор. Рассмотрим предельные значения потенциала (2.1) при $x\to x_0\in\Omega$.

Обозначим через Ω_ρ часть поверхности Ω, расположенную внутри сферы малого радиуса ρ с центром в точке x_0, а через $\bar{\Omega}_\rho$ — дополнение Ω_ρ до Ω. Введем локальную декартову систему координат y_1, y_2, y_3 с началом в точке x_0 и осью y_3, направленной вдоль нормали $n(x_0)=n_0$, и представим интеграл (2.1) в виде следующей суммы:

$$\int\limits_{\Omega} K(y-y')\,c_0 n(y')\,b(y')\,d\Omega'=\int\limits_{\Omega_\rho} K(y-y')\,c_0 n(y')\,D(y-y')\,d\Omega'+$$
$$+\int\limits_{\bar{\Omega}_\rho} K(y-y')\,c_0 n(y')\,D(y-y')\,d\Omega' \tag{2.4}$$

Интеграл по $\bar{\Omega}_\rho$ есть, очевидно, непрерывная функция в точке $y=0$ $(x=x_0)$.

Найдем предел интеграла по Ω_ρ по $y\to 0$. Поскольку в дальнейшем $\rho\to 0$, можно считать, что Ω_ρ — плоская круговая область и $n(y')=n_0$. Введя замену переменных $y_i=|y|\xi_i$, $y_i'=|y|\xi_i'$, будем иметь

$$\lim_{y\to 0}\int\limits_{\Omega_\rho} K_{\alpha\beta\lambda\mu}(y-y')\,c_0^{\lambda\mu\nu\rho}\,n_{0\nu}D_{\rho\delta}(y-y')^\delta\,d\Omega'=$$
$$=\int K_{\alpha\beta\lambda\mu}(\xi-\xi')\,c_0^{\lambda\mu\nu\rho}\,n_{0\nu}D_{\rho\delta}(\xi-\xi')^\delta\,\delta(n_{0\tau}\xi'^\tau)\,d\xi' \tag{2.5}$$

где интеграл справа вычисляется по всему пространству $\mathbf{R}^3$. Здесь учтено, что $K(x)$ — однородная степени -3, четная функция.

Представим $n_{0\alpha}\delta(n_{0\beta}\xi^\beta)$ в форме $n_{0\alpha}\delta(n_{0\beta}\xi^\beta)=\nabla_\alpha\theta(n_{0\beta}\xi^\beta)$, $\theta(t)=1$ при $t>0$; $\theta(t)=0$ при $t<0$ и, применив формулу интегрирования по частям к интегралу справа в (2.5), получим

$$\int K(\xi-\xi')\,c_0 n_0 D(\xi-\xi')\,\delta(n_0\xi')\,d\xi'=-\theta(n_0\xi)\,D+\int K(\xi-\xi')\,\theta(n_0\xi')\,d\xi' c_0 D \tag{2.6}$$

Обозначим через $K^*(k)$ и $\theta^*(k)$ фурье-образы функций $K(x)$ и $\theta(n_0x)$ соответственно. Из (1.6), (1.8) и [8] следуют равенства

$$\overset{*}{K}_{\alpha\beta\lambda\mu}(k)=[k_\alpha \overset{*}{G}_{\beta\mu}(k)k_\lambda]_{(\alpha\beta)(\lambda\mu)},\quad G^*(k)=L^{-1}(k),\quad L^{\alpha\beta}(k)=k_\lambda c_0^{\lambda\alpha\beta\mu}k_\mu$$
$$\theta^*(k_1,k_2,k_3)=(2\pi)^2\delta(k_1)\delta(k_2)[\pi\delta(k_3)+ik_3^{-1}] \tag{2.7}$$

Интеграл справа в (2.6), используя эти соотношения и свойства свертки, можно вычислить в явном виде

$$\int K(\xi-\xi')\theta(n_0\xi')d\xi'=(2\pi)^{-3}\int K^*(k)\theta^*(k)\exp[-i(k\xi)]dk=$$
$$={}^1/_2[K^*(0)+\operatorname{sign}(n_0\xi)K^*(n_0)] \tag{2.8}$$

Обозначим через $J_+(n_0)$ значение предела (2.5) при стремлении y к нулю со стороны нормали n_0, а через $J_-(n_0)$ — с противоположной стороны. Очевидно, что эти пределы не зависят от размера области Ω_ρ и в силу (2.6), (2.8) имеют вид

$$J_+(n_0)={}^1/_2[K^*(0)+K^*(n_0)]c_0D-D,\quad J_-(n_0)={}^1/_2[K^*(0)-K^*(n_0)]c_0D \tag{2.9}$$

При замене n_0 на $-n_0$ интеграл (2.5) меняет знак, тогда как предельные значения его по-прежнему определяются соотношениями (2.9). Отсюда следует равенство $J_+(n_0)=-J_-(n_0)$, которое приводит к соотношению $K^*(0)=c_0^{-1}$.

Заметим, что значение функции $K^*(k)$ в нуле не определено однозначно. Поскольку $K^*(0)=\int K(x)dx$, то определение $K^*(0)$ эквивалентно регуляризации формально расходящегося интеграла от функции $K(x)$ вида (1.6) (ср. [9]).

Запишем теперь выражения для предельных значений потенциала $\varepsilon_1(x)$ с плотностью (2.3) в точках поверхности Ω. Устремляя ρ к нулю в соотношении (2.4), учитывая (2.9) и равенство $K^*(0)=c_0^{-1}$, получим $(x\in\Omega)$:

$$(\varepsilon_{1\alpha\beta}(x))_\pm=\fint_\Omega K_{\alpha\beta\lambda\mu}(x-x')c_0^{\lambda\mu\nu\rho}n_\nu(x')D_{\rho\delta}(x-x')^\delta d\Omega'\pm\frac{1}{2}\Lambda_{\alpha\beta}{}^{\mu\lambda}(n)D_{\lambda\mu} \tag{2.10}$$

где символ $\fint$ означает интеграл в смысле главного значения по Коши, который существует в силу четности $K(x)$:

$$\Lambda_{\alpha\beta}{}^{\lambda\mu}(n)=\overset{*}{K}_{\alpha\beta\nu\rho}(n)c_0^{\nu\rho\lambda\mu}-I_{\alpha\beta}{}^{\lambda\mu} \tag{2.11}$$

(I — единичный четырехвалентный тензор, $n=n(x)$).

Пусть теперь в (2.1) $b(x)\in C^\infty(\Omega)$. Представим потенциал $\varepsilon_1(x)$ в форме

$$\varepsilon_{1\alpha\beta}(x)=\int_\Omega K_{\alpha\beta\lambda\mu}(x-x')c_0^{\lambda\mu\nu\rho}n_\nu(x')[b_\rho(x')-b_\rho(x)-\partial_\tau b_\rho(x)(x'-x)^\tau]d\Omega'+$$
$$+\int_\Omega K_{\alpha\beta\lambda\mu}(x-x')c_0^{\lambda\mu\nu\rho}n_\nu(x')d\Omega'\,b_\rho(x)+$$
$$+\int_\Omega K_{\alpha\beta\lambda\mu}(x-x')c_0^{\lambda\mu\nu\rho}n_\nu(x')\partial_\tau b_\rho(x)(x'-x)^\tau d\Omega' \tag{2.12}$$

Здесь первый интеграл является непрерывной функцией во всем пространстве и сходится абсолютно при всех x. При $x\in\Omega$ его можно понимать в смысле главного значения и представить в виде суммы двух интегралов с плотностями $b(x')-b(x)$ и $\partial b(x)(x'-x)$ соответственно, каждый из которых в указанном смысле существует. Второй интеграл в (2.12) представляет собой обобщенную функцию (2.2), а последний интеграл можно рассматривать как потенциал (2.1) с плотностью вида (2.3), разрыв которого на Ω определяется соотношением (2.10). Отсюда следует, что предельные значения потенциала $\varepsilon_1(x)$ на Ω имеют вид ($x\in\Omega$):

$$(\varepsilon_{1\alpha\beta}(x))_\pm = \int_\Omega K_{\alpha\beta\lambda\mu}(x-x')c_0^{\lambda\mu\nu\rho}n_\nu(x')[b_\rho(x')-b_\rho(x')]d\Omega' \mp$$
$$\mp\frac{1}{2}\Lambda_{\alpha\beta}{}^{\lambda\mu}(n)\partial_\lambda b_\mu(x) \tag{2.13}$$

где тензор $\Lambda(n)$ определяется соотношением (2.11). Интеграл здесь существует и при менее жестких ограничениях на $b(x)$ [10].

Рассмотрим теперь потенциал $\sigma_1(x)$ вида (Ω — замкнутая поверхность Ляпунова в R^3):

$$\sigma_1^{\alpha\beta}(x) = \int_\Omega S^{\alpha\beta\lambda\mu}(x-x')n_\lambda(x')b_\mu(x')d\Omega' \tag{2.14}$$

Из (1.7) следует, что потенциалы $\sigma_1(x)$ и $\varepsilon_1(x)$ связаны соотношением $\sigma_1^{\alpha\beta}(x)=c_0^{\alpha\beta\lambda\mu}\varepsilon_{1\lambda\mu}(x)-c_0^{\alpha\beta\lambda\mu}n_\lambda(x)b_\mu(x)\delta(\Omega)$. Отсюда и из установленных свойств $\varepsilon_1(x)$ видно, что функция $\sigma_1(x)$ не содержит сингулярной составляющей, а ее разрыв на Ω определяется формулой ($x\in\Omega$):

$$[\sigma_1^{\alpha\beta}(x)] = -S^{*\alpha\beta\lambda\mu}(n)\partial_\lambda b_\mu(x),\quad S^{*\alpha\beta\lambda\mu}(k)=c_0^{\alpha\beta\nu\rho}\overset{*}{K}_{\lambda\rho\tau\delta}(k)c_0^{\tau\delta\lambda\mu}-c_0^{\alpha\beta\lambda\mu} \tag{2.15}$$

Из определения (1.7) ядра $S(x)$ следует, что вектор $n(x)\sigma_1(x)$ с точностью до сингулярного слагаемого $n(x)c_0n(x)b(x)\delta(\Omega)$ есть оператор напряжений от потенциала двойного слоя [7]. Подставляя во вторую формулу (2.15) выражение (2.7) для ядра $K^*(k)$, можно убедиться, что функция $n(x)\sigma_1(x)$ непрерывна при переходе через Ω и, следовательно, потенциал (2.14) удовлетворяет первому из условий (1.1). При $x\in\Omega$ значение вектора $n(x)\sigma_1(x)$ определяется соотношением, аналогичным (2.13):

$$-n_\beta(x)\sigma_1^{\alpha\beta}(x) = \int_\Omega T^{\alpha\beta}(x,x')[b_\beta(x')-b_\beta(x)]d\Omega' \tag{2.16}$$

где $T(x,x')$ имеет вид (1.10).

Если поверхность Ω не замкнута, то интегрирование в (2.16) проводится по любой гладкой замкнутой поверхности, включающей Ω ($b(x)=0$ вне Ω). Можно показать [6], что в этом случае вектор $n(x)\sigma_1(x)$ на Ω представляется также в форме

$$-n_\beta(x)\sigma_1^{\alpha\beta}(x) = \int_\Omega T^{\alpha\beta}(x,x')[b_\beta(x')-b_\beta(x)]d\Omega'+\Gamma^{\alpha\beta}(x)b_\beta(x) \tag{2.17}$$

где выражение для функции $\Gamma(x)$ в виде контурного интеграла по Γ (границе Ω) выписано в [6].

Отметим, что в случае изотропной среды поведение производных от потенциала двойного слоя исследовалось в [7]. Полученные здесь формулы для скачков потенциалов ε_1 и σ_1 на Ω обобщают результаты [7] на случай однородной среды произвольной анизотропии.

3. Асимптотика упругих полей вблизи края Ω. Перепишем уравнение (1.9) в символической форме:

$$(\mathrm{T}_\lambda b)(x)=\lambda(x)b(x)+(\mathrm{T}b)(x)=n(x)\sigma_0(x)\quad (x\in\Omega) \tag{3.1}$$

Действие оператора T в этом уравнении на бесконечно дифференцируемую вдоль Ω функцию $b(x)$ определено правой частью (2.16) или (2.17).

В [6] показано, что **T** является эллиптическим псевдодифференциальным оператором, главный однородный символ которого есть однородная функция степени единица. По непрерывности оператор **T** расширяется на некоторый класс обобщенных функций Соболева — Слободецкого на Ω [11]. Символ оператора $\mathbf{T}_\lambda$ отличается от символа **T** определенно-положительным слагаемым $\lambda(x)$, и поэтому тоже является эллиптическим.

Пусть функция $h(x)$, определяющая форму включения, в окрестности края поверхности Ω представима в виде

$$h(x)=h_0(x_0)r^q+O(r^{q+1}) \quad (q\geqslant 0) \tag{3.2}$$

где r — расстояние от точки $x\in\Omega$ до точки $x_0\in\Gamma$ по нормали к Γ, $h_0(x_0)$ — гладкая на Γ функция. Для приложений интерес представляет класс непрерывных ограниченных решений уравнения (3.1). Рассмотрим асимптотику таких решений вблизи Γ, когда $h(x)$ имеет вид (3.2), а правая часть (3.1) является бесконечно дифференцируемой в окрестности Ω. Возьмем в точке $x_0\in\Gamma$ локальную систему координат y_1, y_2, y_3, направив ось y_3 по предельной нормали n_0 к Ω в x_0, ось y_2 — по касательной к Γ, тогда ось y_1 будет лежать в касательной к Ω плоскости в точке x_0. Запишем уравнение (3.1) для случая, когда Ω есть полуплоскость $y_3=0$, $y_1\geqslant 0$ и $h(y)=h_0y_1{}^q$ ($h_0=\mathrm{const}$):

$$(\mathbf{T}_\lambda{}^\circ b)(y)=y_1{}^{-q}\lambda_0 b(y)+\int\limits_\Omega T(y-y')\,b(y')\,d\Omega'=n_0\sigma(y) \quad (y\in\Omega) \tag{3.3}$$

$$\lambda_0=h_0{}^{-1}n_0cn_0$$

Можно показать [11], что операторы $\mathbf{T}_\lambda$ и $\mathbf{T}_\lambda{}^\circ$ в малой окрестности точки x_0 ($y=0$) совпадают с точностью до операторов пренебрежимо малых по норме. При этом из результатов [11] следует, что вид асимптотики решения уравнения (3.1) в окрестности точки x_0 совпадает с асимптотикой решения (3.3) при $y\to 0$.

Для выяснения вида асимптотики решения (3.3) в нуле достаточно считать, что правая часть, а следовательно, и решение не зависят от переменной y_2. При этом уравнение (3.3) примет вид ($y_1=t$):

$$t^{-q}b_\alpha(t)-\Pi_{0\alpha}{}^\beta\int\limits_0^\infty b_\beta(t')\frac{dt'}{(t-t')^2}=f_\alpha(t) \quad (t>0) \quad \Pi_0=\Pi(t)\,|_{t=1} \tag{3.4}$$

$$\Pi_\alpha{}^\beta(t)=(\lambda_0{}^{-1})_{\alpha\lambda}\int\limits_{-\infty}^\infty n_{0\mu}S^{\mu\lambda\beta\nu}(t,y_2,0)\,n_{0\nu}\,dy_2, \quad f_\alpha(t)=(\lambda_0{}^{-1})_{\alpha\beta}n_{0\lambda}\sigma_0{}^{\lambda\beta}(t)$$

Здесь учтено, что $\Pi(t)$ — однородная функция степени -2. Интегральный оператор в (3.4) на гладких $b(t)$ действует по формуле

$$\int\limits_0^\infty b(t')\frac{dt'}{(t-t')^2}=\int\limits_0^\infty [b(t')-b(t)]\frac{dt'}{(t-t')^2}-b(t) \tag{3.5}$$

которая является следствием регуляризации (2.16).

Применим преобразование Меллина [12] к обеим частям (3.4). Учитывая равенство

$$\int\limits_0^\infty \frac{t^{s-1}}{(t-t')^2}\,dt=-\frac{(s-1)\pi}{\mathrm{tg}\,(s-1)\pi}(t')^{s-2} \quad (t'>0)$$

в котором интеграл понимается в смысле (3.5) и существует при $0<\operatorname{Re} s<2$, имеем

$$b^*(s-q)+\frac{(s-1)\pi}{\operatorname{tg}(s-1)\pi}\Pi_0 b^*(s-1)=f^*(s) \tag{3.6}$$

где $b^*(s)$ и $f^*(s)$ — преобразование Меллина решения и правой части (3.4).

Будем рассматривать непрерывные и ограниченные решения (3.4), убывающие на бесконечности быстрее любой положительной степени t^{-1}. При этом $b^*(s)$ — аналитическая функция в полуплоскости $\operatorname{Re} s>0$. Предположим, что преобразование Меллина правой части (3.4) существует и аналитично при $0<\operatorname{Re} s<2$. Тогда в полосе $q<\operatorname{Re} s<2\,(q<2)$ интегралы Меллина от обеих частей (3.4) имеют смысл. Далее ограничимся исследованием асимптотики решения (3.4) при $q<2$.

Отметим, что множество краев включений, которые описываются функцией $h(x)$ вида (3.2) при $0<q<2$, можно разделить на три качественно разных класса: затупленные края, для которых $0\leqslant q<1$; остроконечный край при $q=1$ и края, имеющие точку возврата $(q>1)$. Рассмотрим отдельно каждый из этих трех случаев.

3.1. Затупленные края $(0\leqslant q<1)$. Исходя из (3.6) представим выражение для $b^*(s)$ в форме

$$b^*(s)=\frac{\operatorname{tg} s\pi}{s\pi}\Pi_0^{-1}[f^*(s+1)-b^*(s-q+1)] \tag{3.7}$$

Для определения асимптотики $b(t)$ при $t\to 0$ контур интегрирования в формуле обращения преобразования Меллина возьмем в виде прямой $\operatorname{Re} s=\delta$ $(0<\delta<{}^1/_2)$, параллельной мнимой оси комплексной плоскости s. Как известно [12], главные члены асимптотики $b(t)$ в нуле определяются особыми точками функции $b^*(s)$, лежащими слева от контура интегрирования и имеющими наименьшие вещественные части.

Ближайшей к контуру интегрирования особой точкой первого сомножителя в правой части (3.7) является простой полюс при $s=-{}^1/_2$. Нетрудно убедиться, что в полуплоскости $\operatorname{Re} s>-{}^1/_2$ функция $b^*(s)$ не имеет особых точек. Действительно, если предположить наличие, например, полюса $b^*(s)$ при $s=s_0$ $(-{}^1/_2<\operatorname{Re} s_0<0)$, то в силу (3.7) полюса $b^*(s)$ должны быть также в точках $s_k=s_0\pm k(1-q)$ $(k=1,\,2,\ldots)$ и, следовательно, свойство аналитичности $b^*(s)$ при $\operatorname{Re} s>0$ нарушается.

Поскольку $f(t)$ бесконечно дифференцируема в нуле, то в полуплоскости $\operatorname{Re} s\leqslant 0$ полюса функции $f^*(s)$ расположены в точках $s=0,\,-1,\,-2,\ldots$. Отсюда и из (3.7) следует, что ближайший к прямой $\operatorname{Re} s=-{}^1/_2$ полюс функции $b^*(s)$ находится в точке $s=-{}^3/_2+q$. Если $q\neq 0$, то это полюс первого порядка, а при $q=0$ — второго. (Как видно из (3.7), наличие полюса $b^*(s)$ при $s=-{}^1/_2$ порождает систему полюсов этой функции в точках $s_k=-{}^1/_2-k(1-q)$, $k=1,\,2,\ldots$; поскольку $1-q>0$, все эти полюса расположены в полуплоскости $\operatorname{Re} s<-{}^1/_2$). Итак, поскольку ближайшие к контуру интегрирования $\operatorname{Re} s=\delta$ полюса $b^*(s)$ находятся в точках $s=-{}^1/_2$, $s=-{}^3/_2+q$, то решение уравнения (3.4) при $t\to 0$ представляется в форме

$$b(t)=\beta_0 t^{1/2}+b_1(t),\quad \beta_0=\operatorname{Res} b^*(s)\,|_{s=-1/2} \tag{3.8}$$

$$b_1(t)=O(t^{1/2}\ln t)\text{ при } q=0,\quad b_1(t)=O(t^{3/2-q})\text{ при } q>0$$

причем вычет β_0 в этом выражении не равен тождественно нулю.

3.2. Остроконечные края $(q=1)$. В этом случае (3.6) можно разрешить относительно $b^*(s)$:

$$b^*(s)=H^{-1}(s)f^*(s+1),\quad H_\beta{}^\alpha=\delta_\beta{}^\alpha+(s\pi/\operatorname{tg} s\pi)\Pi_{0\beta}{}^\alpha$$

Полюса функции $b^*(s)$ определяются из условия $\det H(s)=0$. Можно показать, что первыми двумя корнями этого уравнения, расположенными в левой полуплоскости, будут $s_1=-p_1$, $s_2=-p_2$, где (ср. [1]) $^1/_2<p_1<1$, $^3/_2<p_2<2$. Значения вещественных чисел p_1 и p_2 зависят от величины упругих модулей среды и включения и ориентации края поверхности Ω в точке x_0.

Таким образом, в данном случае асимптотика $b(t)$ при $t\to 0$ имеет вид $b(t)=\beta_1 t^{p_1}+O(t^{p_2})$.

3.3. Края, имеющие точку возврата ($1<q<2$). Запишем (3.6) в форме

$$b^*(s)=f^*(s+q)-[(s-1+q)\pi/\operatorname{tg}(s-1+q)\pi]\Pi_0 b^*(s-1+q)$$

и рассмотрим особые точки правой части. Проводя рассуждения аналогично случаю 3.1, можно показать, что первый полюс функции $b^*(s)$ слева от контура интегрирования $\operatorname{Re} s=\delta$ расположен в точке $s=q$, а второй — в точке $s=1-2q$. Как и в случае 3.1, здесь можно предположить, что $b^*(s)$ имеет полюс в точке $s=-^1/_2$. При этом в силу (3.7) функция $b^*(s)$ должна иметь полюса также в точках $s_k=-^1/_2-k(1-q)$ ($k=1, 2, \ldots$). Однако в данном случае $1-q<0$, и поэтому такая функция не будет аналитической в правой полуплоскости. Таким образом, асимптотика $b(t)$ при $t\to 0$ определяется равенством $b(t)=\beta_2 t^q+O(t^{2q-1})$.

Рассмотрим теперь асимптотику решения уравнения (3.1) в окрестности точки $x_0\in\Gamma$ при гладкой и ограниченной правой части. В силу установленных свойств решения уравнения (3.4) функция $b(x)$ вблизи Γ при $h(x)$ вида (3.2) представляется в форме

$$b(x)=\beta(x_0)r^\varkappa+b_1(r)$$

$$\varkappa=^1/_2,\ b_1(r)=O(r^{3/2}\ln r) \text{ при } q=0;\ \varkappa=^1/_2,\ b_1(r)=O(r^{3/2-q}) \text{ при } 0<q<1$$

$$\varkappa=p_1;\ b_1(r)=O(r^{p_2}) \text{ при } q=1;\ \varkappa=q,\ b_1(r)=O(r^{2q-1}) \text{ при } 1<q<2 \tag{3.9}$$

Здесь $\beta(x_0)$ — гладкая на Γ функция, которая находится из решения уравнения (3.1), p_1, p_2 являются корнями записанного выше трансцендентного уравнения. Аналогичные результаты для частных значений параметра q получены в [1].

Перейдем к рассмотрению асимптотики поля напряжений вне Ω в окрестности контура Γ. В соответствии с приближенной постановкой задачи здесь имеется в виду промежуточная асимптотика на расстояниях, больших по сравнению с h, но малых по сравнению с другими характерными размерами включения. Запишем выражение для σ в точке y_* с координатами $(-r\cos\theta, 0, -r\sin\theta)$ в локальной системе y_1, y_2, y_3, где r — расстояние от точки y_* до точки $y=0$, θ — полярный угол в плоскости y_1, y_3. Из (1.4) и (3.9) имеем

$$\sigma(y_*)=r^{\varkappa-1}\int_{\Omega(r)} S(\cos\theta+\xi_1, \xi_2, \sin\theta+\xi_3)n(r\xi)\beta(x_0)\xi_1^\varkappa\,d\Omega_\xi+O(1) \tag{3.10}$$

где $\xi_i=r^{-1}y_i$ и учтено, что $S(x)$ — однородная функция степени -3. Показатель $\varkappa>0$ и вектор $\beta(x_0)$ определяются видом асимптотики $b(x)$ в окрестности точки x_0.

При $r\to 0$ интеграл в (3.10) стремится к конечному пределу и, следовательно, в случае $\varkappa<1$ напряжения на Γ имеют особенность типа $r^{\varkappa-1}$. Если $\varkappa\geqslant 1$, то напряжения в окрестности края включения ограничены.

Введем тензорный коэффициент интенсивности напряжений $J(\theta, x_0)=\lim r^{1-\varkappa}\sigma(y_*)$ при $r\to 0$. Из (3.10) следует, что при $\varkappa<1$ главный член асимптотики поля напряжений в окрестности Γ имеет вид

$$\sigma(x)=r^{\varkappa-1}J(\theta, x_0)+O(1),\quad J^{\alpha\beta}(\theta, x_0)=s^{\alpha\beta\lambda}(\theta, x_0)\beta_\lambda(x_0)$$

$$s^{\alpha\beta\lambda}(\theta, x_0)=\int_0^{\infty}\xi_1^{\varkappa}d\xi_1\int_{-\infty}^{\infty}S^{\alpha\beta\lambda\mu}(\cos\theta+\xi_1, \xi_2, \sin\theta)\,d\xi_2\, n_{0\mu}.$$

Отметим, что тензор $s(\theta, x_0)$ зависит только от ориентации края Ω и вида асимптотики функции $h(x)$ при $x\to x_0\in\Gamma$, в то время как коэффициент $\beta(x_0)$ является функционалом всей поверхности Ω и внешнего поля $\sigma_0(x)$.

4. **Тонкое эллипсоидальное включение.** Рассмотрим случай, когда (1.9) допускает решение в квадратурах. Пусть включение имеет эллипсоидальную форму. Тогда Ω — эллиптическая поверхность с полуосями a_1, a_2, а $h(x)$ имеет вид

$$h(x)=2hz(x),\quad z(x_1, x_2)=(1-x_1^2/a_1^2-x_2^2/a_2^2)^{1/2}\quad (x\in\Omega) \tag{4.1}$$

где x_1, x_2 — декартовы координаты, связанные с главными осями эллипса. Далее функция $z(x)$ считается продолженной нулем вне Ω.

Введем интегральный оператор $\mathbf{K}$ с ядром $\mathbf{K}(x)$ вида (1.6), действующий на функциях в $\mathbf{R}^3$. Пусть $V_h(x)$ — характеристическая функция эллипсоидальной области с полуосями a_1, a_2, h, а $P_m(x)$ — полином степени m по координатам. Как показано в [13], оператор $\mathbf{K}$ переводит функцию $P_{m,h}(x)$ вида $P_{m,h}(x)=P_m(x)V_h(x)\,/\,2h$ в полином той же степени m внутри области V_h (свойство полиномиальной консервативности).

Очевидно, что этим же свойством обладают операторы $\mathbf{S}$ и $\overline{\mathbf{T}}$ с ядрами $S(x)$ и $nS(x)n$ соответственно, действующие на функциях в R^3; $S(x)$ имеет вид (1.7). Оператор $\mathbf{T}$ в (1.9), (3.1), определенный на функциях в $\mathbf{R}^2$, связан с $\overline{\mathbf{T}}$ соотношением

$$(\mathbf{T}b)(x)=(\overline{\mathbf{T}}b\delta(\Omega))(x)\quad (x\in\Omega) \tag{4.2}$$

Символ оператора $\overline{\mathbf{T}}$ есть однородная функция нулевой степени. Поэтому $\mathbf{T}$ ограничен, а следовательно, и замкнут в пространстве обобщенных функций $H_s(\mathbf{R}^3)$ [11]. Отсюда имеем равенство

$$\lim_{h\to 0}\overline{\mathbf{T}}P_{m,h}=\overline{\mathbf{T}}(\lim_{h\to 0}P_{m,h}) \tag{4.3}$$

где предел в правой части определяется соотношением

$$\lim_{h\to 0}P_{m,h}(x)=P_m(x)z(x)\delta(\Omega) \tag{4.4}$$

Поскольку в области V_h левая часть (4.3) есть полином степени m для всех h, то правая часть для предельного образа функции $P_{m,h}$ является полиномом на Ω. Отсюда и из (4.2) получим следующее свойство оператора $\mathbf{T}$.

Если Ω — эллиптическая поверхность, то оператор $\mathbf{T}$ в (3.1) переводит полином степени m, домноженный на функцию $z(x)$ вида (4.1), в полином той же степени на Ω. По-видимому, впервые весьма сложным путем это свойство $\mathbf{T}$ было доказано в [14].

Отсюда следует, что решение уравнения (3.1) при полиномиальной правой части определяется соотношением $b(x)=B(x)z(x)$ $(x\in\Omega)$. Здесь вектор $B(x)$ — полином той же степени, что и внешнее поле; в частности, если σ_0 — постоянный тензор, то B — постоянный вектор, выражение для которого в силу (3.1) имеет вид $B=(\lambda_0+T_0)^{-1}n\sigma_0$, где $2\lambda_0=h^{-1}ncn$, а тензор T_0 есть интеграл

$$T_0=\int_{-\infty}^{\infty}T(x_1, x_2)\,[z(x_1, x_2)-1]\,dx_1\,dx_2$$

сходящийся в обычном смысле.

Если явное выражение для $T(x)$ неизвестно, то, используя формулу Парсеваля, можно перейти к фурье-образам подынтегральных функций. При этом

$$T_0 = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} T^*(k_1, k_2) z^*(k_1, k_2)\, dk_1\, dk_2,$$

$$T^{*\alpha\beta}(k_1, k_2) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S^{*3\alpha\beta3}(k_1, k_2, k_3)\, dk_3$$

$$z^*(k_1, k_2) = 2\pi a_1 a_2 |ak|^{-2} \left(\frac{\sin|ak|}{|ak|} - \cos|ak| \right), \quad ak = a_1 k_1 + a_2 k_2$$

где $S^*(k)$ имеет вид (2.15).

Пусть функция $h(x)$ по-прежнему имеет вид (4.1). Для построения решения (3.1) при произвольной полиномиальной правой части надо вначале найти результат действия оператора $\mathbf{T}_\lambda$ на однородный полином $x^{(m)}$, умноженный на $z(x)$, $x^{(m)} = x_1^{q_1} x_2^{q_2}$, где q_1, q_2 — целые положительные числа, $q_1 + q_2 = m$. Это будет полином, коэффициенты которого можно вычислить беря значения последовательных производных по x от $\mathbf{T}_\lambda x^{(m)} z$ в точке $x=0$. Затем, решая систему линейных уравнений, найдем коэффициенты полинома $Q_m(x)$, который после домножения на $z(x)$ переводится оператором $\mathbf{T}_\lambda$ в однородный полином вида $x^{(m)}$. Решение для полиномиального степени n внешнего поля будет линейной комбинацией функций $Q_m(x) z(x)$, $m=0, 1, 2, \ldots, n$. Таким образом, задача сводится к вычислению стандартных интегралов и обращению невырожденных матриц. Для эллиптической трещины такой путь решения реализован в [15].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Соткилава О. В., Черепанов Г. П.* Некоторые задачи неоднородной теории упругости. – ПММ, 1974, т. 38, № 3, с. 539–550.
2. *Панасюк В. В., Андрейкив А. Е., Стадник М. М.* Упругое равновесие неограниченного тела с тонким включением.– Докл. АН УССР. Сер. А, 1976, № 7, с. 636–639.
3. *Канаун С. К.* О сингулярных моделях тонкого включения в однородной упругой среде.– ПММ, 1984, т. 48, вып. 1, с. 81–91.
4. *Канаун С. К.* Тонкий дефект в однородной упругой среде.– Исследования по теоретическим основам расчета строительных конструкций: Межвуз. темат. сб. тр. Ленингр. инж-строит. ин-т, 1983, с. 75–84.
5. *Кунин И. А.* Теория дислокаций. Дополнение к кн. Схоутена А. Я. Тензорный анализ для физиков. М.: Наука, 1965, с. 373–443.
6. *Канаун С. К.* К задаче о пространственной трещине в анизотропной упругой среде.– ПММ, 1981, т. 45, вып. 2, с. 361–370.
7. *Kossecka E.* Surface distribution of double forces. – Arch. Mech. Stos., 1971, v. 23, No. 3, p. 313–328.
8. *Брычков Ю. А., Прудников А. П.* Интегральные преобразования обобщенных функций. М.: Наука, 1977. 287 с.
9. *Канаун С. К.* О модели точечных дефектов в механике упругой неоднородной среды.– Изв. АН СССР. МТТ, 1982, № 4, с. 109–118.
10. *Calderon C. P.* On a singular integral. – Stad. Math., 1979, v. 65, No 3, p. 313–335.
11. *Эскин Г. И.* Краевые задачи для эллиптических псевдодифференциальных уравнений. М.: Наука, 1973. 232 с.
12. *Уфлянд Я. С.* Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Л.: Наука, 1967. 402 с.
13. *Кунин И. А., Соснина Э. Г.* Эллипсоидальная неоднородность в упругой среде. – Докл. АН СССР, 1971, т. 199, № 3, с. 571–574.
14. *Willis J. R.* The stress field around an elliptical crack in an anisotropic elastic medium. – Internat. J. Engng Sci., 1968, v. 6, No. 5, p. 253–263.
15. *Айтматов И. Т., Канаун С. К.* Эллиптическая трещина в однородной упругой среде. – Физ.-техн. проблемы разработки полезн. ископаемых, 1981, № 2, с. 3–14.

Ленинград

Поступила в редакцию 1.XII.1981