

УДК 539.3

ВЛИЯНИЕ ТОНКИХ МЕЖФАЗНЫХ СЛОЕВ НА МАКРОСКОПИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ

ПЕЛЕХ Б. Л., ФЛЕЙШМАН Ф. Н.

Известно, что на границе раздела наполнитель — полимерная матрица происходят сложные физико-химические процессы, приводящие к образованию тонких приграничных слоев [1, 2]. Эти слои отличаются по структуре и механическим свойствам от свойств полимера и существенно влияют на прочность композита.

Указанные системы условно могут быть представлены как трехкомпонентные, состоящие из матрицы, включения (волокна, наполнителя) и тонкого промежуточного слоя. Принятие такой модели вносит определенные осложнения в формулировку и решение соответствующих краевых задач. В идейном отношении эти задачи родственны исследованиям механики тел с подкреплениями или покрытиями [3]. В [4] впервые выведены условия сопряжения для тел с тонким промежуточным слоем при воздействии температурных полей, названные условиями неидеального температурного контакта. Обобщение полученных условий для задач диффузионного типа было сделано в [5]. Далее эта идея была развита применительно к задачам механики упругих сред с тонкими включениями [6].

В публикуемой работе при помощи метода конечных разностей на основе уравнений пространственной теории упругости выведены условия сопряжения матрицы и включения посредством тонкого межфазного слоя. Использование этих условий позволяет исключить из рассмотрения тонкий слой и лишь косвенно учесть влияние его физико-механических параметров на работу гетерогенной системы. В качестве примера выведенные условия сопряжения используются при определении эффективного объемного модуля полидисперсной среды со сферическими включениями и тонкими межфазными слоями.

1. Условия сопряжения. Рассматривается сочленение двух фаз (матрицы и включения) посредством упругого слоя малой толщины $2h = \text{const}$. Слой относится к системе триортогональных криволинейных координат смешанного типа α_1, α_2, z . Координатные линии $\alpha_1 = \text{const}$ и $\alpha_2 = \text{const}$ на срединной поверхности $\Pi (z=0)$ слоя совпадают с ее линиями кривизны, а линейная координата z определяет расстояние по нормали к Π до любой точки слоя.

Если обозначить коэффициенты Ламе первой квадратичной формы поверхности Π через $A_1(\alpha_1, \alpha_2), A_2(\alpha_1, \alpha_2)$, то для выбранной пространственной системы координат (α_1, α_2, z) имеем: $A_1^z = A_1(1+z/R_1), A_2^z = A_2(1+z/R_2)$, где $R_1(\alpha_1, \alpha_2), R_2(\alpha_1, \alpha_2)$ — главные радиусы кривизны срединной поверхности слоя.

Деформация слоя описывается линейными уравнениями движения пространственной теории упругости в перемещениях (при отсутствии массовых сил), векторная форма которых имеет вид [7]:

$$\Delta \mathbf{u} + \frac{1}{1-2\nu} \text{grad } \theta = \frac{\rho}{\mu} \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \quad (1.1)$$

Здесь \mathbf{u} — вектор упругого перемещения, проекции которого на нормали к координатным поверхностям $\alpha_1 = \text{const}, \alpha_2 = \text{const}, z = \text{const}$ обозначаются соответственно через u_1, u_2, w ; μ — модуль сдвига, ν — коэффициент Пуассона, ρ — удельная плотность материала слоя, θ — объемное расширение, t — время, Δ — оператор Лапласа.

На поверхностях $z=\pm h$, по которым слой примыкает к матрице и включению, должны выполняться условия идеального механического контакта, а именно:

$$\mathbf{u}(\alpha_1, \alpha_2, -h) = \mathbf{u}^a, \quad \mathbf{u}(\alpha_1, \alpha_2, h) = \mathbf{u}^m \quad (1.2)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_3(\alpha_1, \alpha_2, -h) = \boldsymbol{\sigma}_3^a, \quad \boldsymbol{\sigma}_3(\alpha_1, \alpha_2, h) = \boldsymbol{\sigma}_3^m \quad (1.3)$$

Для компонентов тензора напряжений здесь приняты те же обозначения, что и в [8]. Величины с индексами (m) или (a) вверху относятся соответственно к матрице (при $z=h$) и включению (при $z=-h$).

Для вывода условий сопряжения используется метод конечных разностей. С этой целью область слоя дискретизируется лишь в направлении оси z , вдоль которой рассматриваются три узловые точки $z=0$ и $z=\pm h$. В трех скалярных уравнениях движения, соответствующих векторному уравнению (1.1), производные по z заменяются их симметричными конечно-разностными аналогами с точностью $O(h^2)$. Затем эти уравнения записываются для точек срединной поверхности $z=0$ в виде

$$\frac{1}{h^2} (u_i^m - 2u_i^0 + u_i^a) + \Delta_0 u_i^0 + \frac{K_0}{h} (u_i^m - u_i^a) + \frac{1}{1-2\nu} \frac{1}{A_i} \frac{\partial}{\partial \alpha_i} \left\{ \frac{1}{2hA_1A_2} [(A_1A_2w)^m - (A_1A_2w)^a] + \theta^0 \right\} = \Phi_i^0 \quad (i=1,2) \quad (1.4)$$

$$\frac{1}{h^2} (w^m - 2w^0 + w^a) + \Delta_0 w^0 + \frac{K_0}{h} (w^m - w^a) + \frac{1}{1-2\nu} \left\{ \frac{1}{A_1A_2h^2} [(A_1A_2w)^m - 2A_1A_2w^0 + (A_1A_2w)^a] + \frac{1}{4h^2} \left(\frac{1}{A_1^m A_2^m} - \frac{1}{A_1^a A_2^a} \right) [(A_1A_2w)^m - (A_1A_2w)^a] + \frac{1}{2h} (\theta^m - \theta^a) \right\} = \Phi_3^0 \quad (1.5)$$

$$f^0 = f(\alpha_1, \alpha_2, 0), \quad f^m = f(\alpha_1, \alpha_2, h), \quad f^a = f(\alpha_1, \alpha_2, -h)$$

$$\theta^z = \frac{1}{A_1^z A_2^z} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha_1} (A_2^z u_1) + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} (A_1^z u_2) \right],$$

$$\Delta_1 = \frac{1}{A_1 A_2} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left(\frac{A_2}{A_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \right) + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left(\frac{A_1}{A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \right) \right]$$

$$\Delta_0 = \Delta_1 - (\rho/\mu) (\partial^2/\partial t^2)$$

Функции Φ_i^0 ($i=1, 2, 3$), зависящие от выбранной криволинейной системы координат и перемещений, здесь не приведены из-за их громоздкости. В декартовой системе они равны нулю.

В граничных условиях (1.3) сначала напряжения выражаются через перемещения по известным формулам [7], а затем производные по z заменяются их несимметричными конечно-разностными аналогами с точностью $O(h^2)$. Учет условий (1.2) позволяет записать их в виде

$$\lambda \theta^m + \frac{\mu}{h} (w^a - 4w^0 + 3w^m) +$$

$$+ \frac{\lambda}{2hA_1^m A_2^m} [(A_1A_2w)^a - 4A_1A_2w^0 + 3(A_1A_2w)^m] = \sigma_{33}^m \quad (1.6)$$

$$\lambda \theta^a - \frac{\mu}{h} (w^m - 4w^0 + 3w^a) - \frac{\lambda}{2hA_1^a A_2^a} [(A_1A_2w)^m - 4A_1A_2w^0 + 3(A_1A_2w)^a] = \sigma_{33}^a$$

$$\mu \left\{ \frac{A_i^m}{2h} \left[\left(\frac{u_i}{A_i} \right)^a - 4 \frac{u_i^0}{A_i} + 3 \left(\frac{u_i}{A_i} \right)^m \right] + \frac{1}{A_i^m} \frac{\partial w^m}{\partial \alpha_i} \right\} = \sigma_{i3}^m \quad (i=1,2)$$

$$\mu \left\{ \frac{A_i^a}{2h} \left[- \left(\frac{u_i}{A_i} \right)^m + 4 \frac{u_i^0}{A_i} - 3 \left(\frac{u_i}{A_i} \right)^a \right] + \frac{1}{A_i^a} \frac{\partial w^a}{\partial \alpha_i} \right\} = \sigma_{i3}^a$$

где λ — коэффициент Ламе.

При помощи элементарных преобразований из полученных девяти уравнений (1.4), (1.5), (1.6) исключаются величины u_1^0 , u_2^0 , w^0 и выводится шесть условий сопряжения, которые связывают между собой перемещения и внешние напряжения сопрягаемых фаз (матрицы и включения) в точках их граничных поверхностей $z = \pm h$. Эти условия имеют довольно громоздкий вид и здесь не приводятся. Для случая весьма тонких слоев вполне можно пренебречь малыми величинами порядка h^2 и выше и тогда выведенные дифференциальные условия сопряжения существенно упрощаются:

$$h \left[\Delta_0 - \left(\frac{1}{R_1^2} + \frac{1}{R_2^2} \right) \right] (w^m + w^a) + \theta^m - \theta^a + 4K_0 (w^m - w^a) - \\ = - \frac{1}{\mu} (\sigma_{33}^m - \sigma_{33}^a) + 2h\Phi_3^0 \quad (1.7)$$

$$\lambda [2K_0 (w^m + w^a) + \theta^m + \theta^a] + \frac{1}{h} (\lambda + 2\mu) (w^m - w^a) = \sigma_{33}^m + \sigma_{33}^a$$

$$h\Delta^* i (u_i^m + u_i^a) + \left(2K_0 + \frac{1}{R_i} \right) (u_i^m - u_i^a) + \\ + \frac{1}{A_i} \left[\frac{h}{R_i} \frac{\partial}{\partial \alpha_i} (w^m + w^a) + \frac{2\nu}{1-2\nu} \frac{\partial}{\partial \alpha_i} (w^m - w^a) \right] + \\ + \frac{h}{1-2\nu} \frac{1}{A_i} \frac{\partial}{\partial \alpha_i} \left\{ \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_j} [A_i (u_j^m + u_j^a)] + \right. \\ \left. + 2K_0 (w^m + w^a) \right\} = - \frac{1}{\mu} (\sigma_{i3}^m - \sigma_{i3}^a) + 2h\Phi_i^0 \quad (i \neq j = 1, 2) \\ \frac{1}{h} (u_i^m - u_i^a) - \frac{1}{R_i} (u_i^m + u_i^a) + \\ + \frac{1}{A_i} \frac{\partial}{\partial \alpha_i} (w^m + w^a) = \frac{1}{\mu} (\sigma_{i3}^m + \sigma_{i3}^a), \quad (i = 1, 2) \\ \Delta^* i f_i = \Delta_0 f_i - \frac{f_i}{R_i^2} + \frac{1}{1-2\nu} \frac{1}{A_i} \frac{\partial}{\partial \alpha_i} \left[\frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_i} (A_i f_i) \right] \quad (i \neq j = 1, 2)$$

Условия (1.7) обобщают аналогичные приближенные условия, использованные в работах [9—13 и др.] при рассмотрении тел с тонкими упругими включениями. В [14] с других позиций также получены выражения типа (1.7) для скачков перемещений с учетом условий на граничных поверхностях.

2. Частные случаи. Если тонкий слой отсутствует, т. е. $h=0$, то из (1.7) следуют условия идеального механического контакта матрицы и включения.

В случае идеально гибкого слоя ($\mu=0$) при произвольном h из (1.7) получаются, как и следовало ожидать, условия равенства нулю контактных напряжений на граничных поверхностях $z = \pm h$.

Для частных значений радиусов кривизны следуют условия сопряжения для плоского, цилиндрического, сферического и других слоев.

Статические условия сопряжения вытекают из (1.7) при замене оператора Δ_0 оператором Δ_1 . В статическом случае плоской деформации, когда $R_2^{-1}=0$, $A_2=1$, искомые функции не зависят от α_2 и $u_2^m = u_2^a = \sigma_{23}^m = \sigma_{23}^a = 0$, два из условий (1.7) удовлетворяются тождественно и остаются следующие:

$$\begin{aligned}
u_1^m - u_1^a - \frac{h}{R_1} (u_1^m + u_1^a) + \frac{h}{A_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} (w^m + w^a) &= \frac{h}{\mu} (\sigma_{13}^m + \sigma_{13}^a) \\
h\Delta^* (u_1^m + u_1^a) + \frac{h}{1-2\nu} \frac{1}{A_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left[\frac{1}{R_1} (w^m + w^a) \right] + \\
+ \frac{1}{A_1} \left[\frac{2\nu}{1-2\nu} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} (w^m - w^a) + \frac{h}{R_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} (w^m + w^a) \right] + & \\
+ \frac{2}{R_1} (u_1^m - u_1^a) &= -\frac{1}{\mu} (\sigma_{13}^m - \sigma_{13}^a) + 2h\Phi_1^0 \\
h\lambda \left[\frac{1}{R_1} (w^m + w^a) + \frac{1}{A_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} (u_1^m + u_1^a) \right] + \\
+ (\lambda + 2\mu) (w^m - w^a) &= h(\sigma_{33}^m + \sigma_{33}^a) \\
h \left(\Delta_0 - \frac{1}{R_1^2} \right) (w^m + w^a) + \frac{2}{R_1} (w^m - w^a) + \frac{1}{A_1} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha_1} (u_1^m - u_1^a) - \right. \\
\left. - \frac{h}{R_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} (u_1^m + u_1^a) \right] &= -\frac{1}{\mu} (\sigma_{33}^m - \sigma_{33}^a) + 2h\Phi_3^0
\end{aligned} \tag{2.1}$$

Если в последних условиях заменить ν на $\nu/(1+\nu)$, оставляя неизменным коэффициент Ламе μ , то из них получаются условия сопряжения для обобщенного плоского напряженного состояния тонкой пластинки с криволинейным упругим включением постоянного сечения.

Для случая упругого тела с тонким поверхностным покрытием граничные условия выводятся из (1.7) путем дополнительного исключения величин u_1^m , u_2^m , w^m и отбрасывания малых слагаемых порядка h^2 , которые появляются в процессе этого исключения.

Так, например, при плоской деформации тела, вдоль граничной поверхности $z = -h$ которого имеется тонкое покрытие ($R_1^{-1} = R_2^{-1} = 0$, $A_1 = A_2 = 1$), краевые условия, выводимые из (2.1), будут

$$\begin{aligned}
2h \frac{\partial^2 u_1^a}{\partial \alpha_1^2} + \frac{1-\nu}{2\mu} (\sigma_{13}^m - \sigma_{13}^a) + \frac{h\nu}{2\mu} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} (\sigma_{33}^m + \sigma_{33}^a) &= 0 \\
h \frac{\partial}{\partial \alpha_1} (\sigma_{13}^m + \sigma_{13}^a) + \sigma_{33}^m - \sigma_{33}^a &= 0
\end{aligned} \tag{2.2}$$

Здесь величины с индексом (m) сверху означают заданные внешние напряжения на свободной границе покрытия.

3. Эффективный объемный модуль полидисперсной среды. Представляет интерес определение эффективного объемного модуля композита с учетом механических и геометрических параметров тонких межфазных слоев. Для этого рассматривается непрерывная гетерогенная среда со сферическими включениями различных размеров. Область матрицы, окружающей каждое отдельное включение, ограничена концентрической сферой. Между включением и матрицей имеется тонкий межфазный слой постоянной толщины с другими упругими характеристиками. Все три фазы считаются упругими и изотропными. Предполагается, что соответствующие отношения толщины слоя ($2h$), радиуса включения ($R-h$) и внешнего радиуса матрицы (R_2) остаются постоянными всюду в области, занятой композитом. Такая модель гетерогенной среды представляет собой обобщение модели Хашина [15], в которой промежуточные слои отсутствуют. Пусть единичная составная частица среды, отнесенная к сферической системе координат (r, θ, φ) , нагружена на внешней поверхности $r = R_2$ равномерным нормальным давлением p .

Напряженно-деформированное состояние составной частицы, обладающее в данном случае сферической симметрией, определяется известным

общим решением [7]. Неизвестные коэффициенты этого решения находятся из одного граничного условия на поверхности $r=R_2$ и двух условий сопряжения (1.7), принимающих в этом случае следующий вид:

$$\begin{aligned} (\lambda+2\mu)(w^m-w^a)+2\lambda\frac{h}{R}(w^m+w^a) &= h(\sigma_{33}^m+\sigma_{33}^a) \\ \frac{2h}{R^2}(w^m+w^a)-\frac{2}{R}(w^m-w^a) &= \frac{1}{2\mu}(\sigma_{33}^m-\sigma_{33}^a) \end{aligned} \quad (3.1)$$

Для определения эффективного объемного модуля идеализированной гомогенной среды через свойства и геометрические параметры рассматриваемого композита принимается гипотеза об эквивалентной гомогенности. Аналогично [15] найдено следующее значение эффективного объемного модуля k_0 единичной составной частицы полидисперсной среды со сферическими включениями, учитывающее влияние физико-механических и геометрических характеристик тонкого упругого межфазного слоя:

$$k_0 = k_m + \frac{c(c_2 k_a - c_1 k_m + L_1 h / R)}{c_1 + L_2 h / R + (1 - c)(c_2 k_a - c_1 k_m + L_1 h / R) / (k_m + 4\mu_m / 3)} \quad (3.2)$$

$$L_1 = \frac{4\mu c_2}{\lambda + 2\mu} \left[\frac{2\mu}{3} c_1 \left(1 + \frac{3\lambda}{2\mu} \right) + k_a \left(\frac{\lambda}{2\mu} - 1 + \frac{h}{R} \right) \right] - L_2 k_m$$

$$L_2 = \frac{4\mu}{\lambda + 2\mu} \left[c_1 \left(1 - \frac{\lambda}{2\mu} \right) + \frac{3k_a}{2\mu} + \frac{h}{R} c_1 \right]$$

$$c_2 = (R+h)/R, \quad c_1 = (R-h)/R, \quad c = (R+h)^3/R_2^3$$

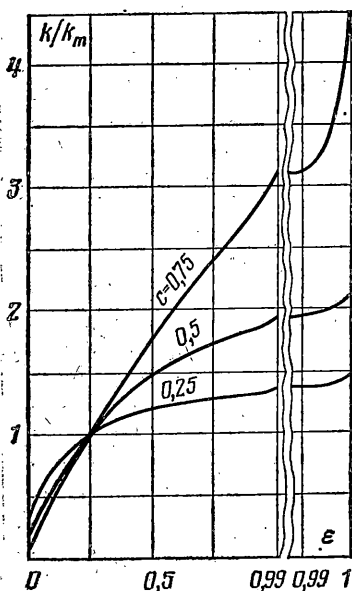
$$3k_m = 3\lambda_m + 2\mu_m, \quad 3k_a = 3\lambda_a + 2\mu_a$$

где $\mu_m, \lambda_m; \mu_a, \lambda_a$ — константы Ламе матрицы и включения соответственно.

В частном случае $h=0$ (межфазный слой отсутствует) из (3.2) следует известный результат [15]. При помощи теорем о минимуме дополнительной энергии и минимуме потенциальной энергии доказывается, что с той же точностью $O(h^2)$, с которой выведены условия сопряжения (1.7), эффективный объемный модуль k_0 единичной составной сферы совпадает с эффективным объемным модулем k всего представительного элемента объема рассматриваемой полидисперсной модели композита.

По формуле (3.2) была подсчитана величина k/k_m для композита, состоящего из стеклянных микросфер в полиэфирной матрице при $E_a/E_m=40,8$, $\nu_a=0,21$, $\nu_m=0,45$, $h/R=0,02$, $\nu=0,3$ для ряда значений параметра $\varepsilon=(1+E_m/E)^{-1}$. Результаты представлены на фигуре.

Формула (3.2) показывает, что упрочнение рассматриваемой дисперсно-наполненной структуры, т. е. выполнение условия $k > k_m$, происходит, если модуль упругости E межфазного слоя удовлетворяет неравенству $E/E_m > \varepsilon_1$, где ε_1 — корень квадратного уравнения относительно E/E_m , которое получается, если приравнять к нулю числитель дроби в формуле (3.2).



ЛИТЕРАТУРА

1. Композиционные материалы. Т. 6. Поверхности раздела в полимерных композициях. М.: Мир, 1978. 294 с.
2. *Липатов Ю. С.* Физическая химия наполненных полимеров. М.: Химия, 1977. 304 с.
3. *Тимошенко С. П.* Статические и динамические проблемы теории упругости. Киев: Наук. думка, 1975. 564 с.
4. *Подстригач Я. С.* Умови теплового контакту твердих тіл.— Доп. АН УРСР, 1963, № 7, с. 872—874.
5. *Подстригач Я. С., Шевчук П. Р.* О влиянии поверхностных слоев на процесс диффузии и на обусловленное им напряженное состояние в твердых телах. — Физ.-хим. механ. материалов, 1967, т. 3, № 5, с. 576—583.
6. *Подстригач Я. С.* Условия скачка напряжений и перемещений на тонкостенном упругом включении в сплошной среде.— Докл. АН УССР. Сер. А, 1982, № 12, с. 30—32.
7. *Лурье А. И.* Теория упругости. М.: Наука, 1970. 939 с.
8. *Пелех Б. Л.* Теория оболочек с конечной сдвиговой жесткостью. Киев: Наук. думка, 1973. 248 с.
9. *Соткилава О. В., Черепанов Г. П.* Некоторые задачи неоднородной теории упругости. — ПММ, 1974, т. 38, вып. 3, с. 539—550.
10. *Панасюк В. В., Андрейків О. І., Стадник М. М.* Пружна рівновага необмеженого тіла з тонким включенням. — Доп. АН УРСР. Сер. А, 1976, № 7, с. 636—639.
11. *Савин Г. Н., Флейшман Н. П.* Пластинки и оболочки с ребрами жесткости. Киев: Наук. думка, 1964. 384 с.
12. *Грилицкий Д. В., Сулим Г. Т.* Периодическая задача для упругой плоскости с тонкостенными включениями. — ПММ, 1975, т. 39, вып. 3, с. 520—529.
13. *Куришин Л. М., Суздальский И. Д.* Напряжения в плоскости с заполненной щелью. — Прикл. механика, 1973, т. 9, вып. 10, с. 62—68.
14. *Пелех Б. Л., Сухорольский М. А.* Контактные задачи теории упругости анизотропных оболочек. Киев: Наук. думка, 1980. 243 с.
15. *Кристенсен Р.* Введение в механику композитов. М.: Мир, 1982. 334 с.

Львов

Поступила в редакцию
9.XI.1982