

УДК 531.55:521.2

**ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ДВИЖЕНИЯ ОСЕСИММЕТРИЧНОГО
СПУТНИКА ОТНОСИТЕЛЬНО ЦЕНТРА МАСС
ПОД ДЕЙСТВИЕМ ГРАВИТАЦИОННОГО МОМЕНТА**

САЗОНОВ В. В., СИДОРЮК М. Е.

Исследованы периодические решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающей движение продольной оси осесимметричного спутника под действием гравитационного момента на кеплеровой эллиптической орбите. Для слабо-эллиптических орбит указан класс симметричных периодических решений, совпадающих на круговой орбите с периодическими решениями Ляпунова и удовлетворяющих специальным краевым условиям. С помощью численных расчетов эти решения продолжены в область больших значений эксцентриситета орбиты и амплитуды. Исследована устойчивость в линейном приближении найденных решений.

1. Рассмотрим вращательное движение спутника под действием гравитационного момента. Полагаем, что спутник представляет собой осесимметричное твердое тело, центр масс которого движется по кеплеровой эллиптической орбите. Для записи уравнений движения введем следующие обозначения: $OX_1X_2X_3$ — орбитальная система координат (точка O — центр масс спутника, ось OX_3 направлена вдоль радиус-вектора точки O в сторону от притягивающего центра, ось OX_1 направлена по трансверсали к орбите, ось OX_2 дополняет систему до правой), i_2, i_3 и n — орты осей OX_2, OX_3 и оси симметрии спутника соответственно, ω — абсолютная угловая скорость спутника, A и C — его осевой и экваториальный моменты инерции, v — истинная аномалия точки O , e — эксцентриситет орбиты, ω_0 — средняя угловая скорость орбитального движения, t — время. Символом d'/dt будем обозначать производную вектора по времени относительно орбитальной системы координат.

С помощью введенных обозначений кинетический момент спутника K и приложенный к спутнику гравитационный момент M можно записать в виде

$$K = (A - C)(\omega \cdot n)n + C\omega \tag{1.1}$$

$$M = 3\omega_0^2(A - C) \left(\frac{1 + e \cos v}{1 - e^2} \right)^3 (i_3 \cdot n)(i_3 \times n)$$

Обе эти величины вычислены относительно точки O . Закон изменения кинетического момента спутника и уравнение, описывающее движение вектора n , имеют вид

$$dK/dt = M, \quad dn/dt = \omega \times n \tag{1.2}$$

Так как абсолютная угловая скорость системы $OX_1X_2X_3$ равна $i_2(dv/dt)$ и в силу (1.1) $\omega \times n = C^{-1}(K \times n)$, то уравнения (1.2) можно представить следующим образом:

$$\frac{d'K}{dt} + (i_2 \times K) \frac{dv}{dt} = 3\omega_0^2(A - C) \left(\frac{1 + e \cos v}{1 - e^2} \right)^3 (i_3 \cdot n)(i_3 \times n) \tag{1.3}$$

$$d'n/dt + (i_2 \times n)(dv/dt) = C^{-1}(K \times n)$$

Пусть в орбитальной системе координат $\mathbf{K}=(K_1, K_2, K_3)$, $\mathbf{n}=(n_1, n_2, n_3)$. Тогда в скалярной форме уравнения (1.3) будут иметь вид

$$\begin{aligned} \frac{dK_1}{dt} + K_3 \frac{dv}{dt} &= -3\omega_0^2(A-C) \left(\frac{1+e \cos v}{1-e^2} \right)^3 n_2 n_3 \\ \frac{dK_2}{dt} &= 3\omega_0^2(A-C) \left(\frac{1+e \cos v}{1-e^2} \right)^3 n_1 n_3 \\ \frac{dK_3}{dt} - K_1 \frac{dv}{dt} &= 0, \quad \frac{dn_1}{dt} + n_3 \frac{dv}{dt} = \frac{1}{C} (K_2 n_3 - K_3 n_2) \\ \frac{dn_2}{dt} &= \frac{1}{C} (K_3 n_1 - K_1 n_3), \quad \frac{dn_3}{dt} - n_1 \frac{dv}{dt} = \frac{1}{C} (K_1 n_2 - K_2 n_1) \end{aligned} \quad (1.4)$$

Эти уравнения вместе с уравнением для истинной аномалии $dv/dt = \omega_0(1+e \cos v)^2 / (1-e^2)^{3/2}$ образуют замкнутую систему, описывающую движение осесимметричного спутника относительно центра масс.

Примем в (1.4) в качестве независимой переменной истинную аномалию и положим $\lambda = A/C$, $K_j = Cl_j (dv/dt)$ ($j=1, 2, 3$). В результате эта система перейдет в систему

$$\begin{aligned} l_1^* + l_3 &= \frac{2e \sin v}{1+e \cos v} l_1 + \frac{3(1-\lambda)}{1+e \cos v} n_2 n_3 \\ l_2^* &= \frac{2e \sin v}{1+e \cos v} l_2 - \frac{3(1-\lambda)}{1+e \cos v} n_1 n_3 \\ l_3^* - l_1 &= \frac{2e \sin v}{1+e \cos v} l_3, \quad n_1^* + n_3 = l_2 n_3 - l_3 n_2 \\ n_2^* &= l_3 n_1 - l_1 n_3, \quad n_3^* - n_1 = l_1 n_2 - l_2 n_1 \end{aligned} \quad (1.5)$$

Здесь точкой обозначено дифференцирование по v . Система (1.5) является системой с 2π -периодическими коэффициентами и содержит параметры e и λ . Физически допустимые значения этих параметров лежат в интервалах $0 \leq e < 1$, $0 < \lambda < 2$. Неравенство $\lambda < 2$ следует из «неравенства треугольника» $A < C + C$ для моментов инерции спутника.

Система (1.3) допускает первый интеграл $\mathbf{K} \cdot \mathbf{n} = \text{const}$ и интегральное соотношение $\mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = 1$. Величина $\omega_1 = A^{-1} \mathbf{K} \cdot \mathbf{n}$ является проекцией абсолютной угловой скорости спутника на его ось симметрии. Существование интеграла $\mathbf{K} \cdot \mathbf{n} = \text{const}$ означает, что эта проекция постоянна при любом движении спутника. Для системы (1.5) указанные первый интеграл и интегральное соотношение принимают вид

$$\begin{aligned} l_1 n_1 + l_2 n_2 + l_3 n_3 &= \lambda \Omega_1 (1+e \cos v)^2 / (1-e^2)^{3/2} \\ n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 &= 1 \end{aligned} \quad (1.6)$$

где $\Omega_1 = \omega_1 / \omega_0$ — произвольная постоянная.

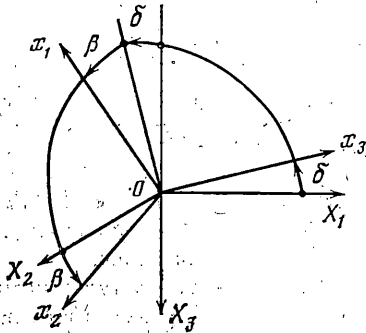
При $e=0$ (круговая орбита) система (1.5) допускает стационарные решения — конические прецессии [1]:

$$\begin{aligned} l_1 = n_1 = 0, \quad l_2 = 1 + 3(1-\lambda)n_2^2, \quad l_3 = 3(1-\lambda)n_2 n_3 \\ n_2 = \lambda \Omega_1 / (4-3\lambda), \quad n_3 = \pm (1-n_2^2)^{1/2} \end{aligned} \quad (1.7)$$

где Ω_1 — произвольная постоянная, входящая в (1.6), $|\lambda \Omega_1| < |4-3\lambda|$. Эти стационарные решения описывают положения равновесия оси симметрии спутника в орбитальной системе координат.

В данной работе рассматривается следующая задача. Пусть p и q — взаимно простые натуральные числа. Будем искать $2\pi p$ -периодические

решения системы (1.5), переходящие при $e=0$ в $2\pi r/q$ -периодические решения, существующие в окрестности одного из положений равновесия (1.7). Такие решения сначала будут найдены аналитически, а затем исследованы численно. Указанные периодические решения интересны потому, что положения равновесия (1.7) можно использовать в качестве номинальных невозмущенных движений осесимметричного спутника в режиме гравитационной ориентации [2]. Исследование этих периодических



Фиг. 1

решений позволяет глубже понять особенности такого способа ориентации.

2. Для проведения аналитического исследования понизим порядок системы (1.5) при помощи соотношений (1.6). С этой целью введем оси Резаля Ox_1, Ox_2, Ox_3 . Ось Ox_1 направим вдоль вектора n , положение системы $Ox_1x_2x_3$ относительно орбитальной системы координат будем задавать углами δ и β (фиг. 1), значения которых принадлежат отрезкам $0 \leq \delta \leq 2\pi$, $0 \leq \beta \leq 1/2\pi$. Введем еще величины Ω_2 и Ω_3 так, чтобы проекции абсолютной угловой скорости спутника на оси Ox_2 и Ox_3 были равны $\Omega_2(dv/dt)$ и $\Omega_3(dv/dt)$. Тогда пе-

ременные системы (1.5) на интегральных поверхностях (1.6) можно представить в виде

$$\begin{aligned} n_1 &= -\sin \delta \cos \beta, \quad n_2 = \sin \beta, \quad n_3 = -\cos \delta \cos \beta \\ l_1 &= \frac{\lambda \Omega_1 (1-e^2)^{3/2}}{(1+e \cos v)^2} n_1 + \Omega_2 \sin \delta \sin \beta + \Omega_3 \cos \delta \\ l_2 &= \frac{\lambda \Omega_1 (1-e^2)^{3/2}}{(1+e \cos v)^2} n_2 + \Omega_2 \cos \beta \\ l_3 &= \frac{\lambda \Omega_1 (1-e^2)^{3/2}}{(1+e \cos v)^2} n_3 + \Omega_2 \cos \delta \sin \beta - \Omega_3 \sin \delta \end{aligned} \quad (2.1)$$

Переходя в системе (1.5) от переменных l_j, n_j ($j=1, 2, 3$) к переменным $\delta, \beta, \Omega_2, \Omega_3$ при помощи соотношений (2.1), получим уравнения

$$\begin{aligned} \delta \dot{} &= \Omega_2 / \cos \beta - 1, \quad \beta \dot{} = \Omega_3 \\ \Omega_2 \dot{} &= \frac{2e \sin v}{1+e \cos v} \Omega_2 - \left[\frac{\lambda \Omega_1 (1-e^2)^{3/2}}{(1+e \cos v)^2} - \Omega_2 \operatorname{tg} \beta \right] \Omega_3 - \\ &\quad - \frac{3(1-\lambda)}{1+e \cos v} \sin \delta \cos \delta \cos \beta \\ \Omega_3 \dot{} &= \frac{2e \sin v}{1+e \cos v} \Omega_3 + \left[\frac{\lambda \Omega_1 (1-e^2)^{3/2}}{(1+e \cos v)^2} - \Omega_2 \operatorname{tg} \beta \right] \Omega_2 - \\ &\quad - \frac{3(1-\lambda)}{1+e \cos v} \cos^2 \delta \sin \beta \cos \beta \end{aligned} \quad (2.2)$$

Здесь Ω_1 — параметр. При $\cos \beta=0$ ($n_1=n_3=0, n_2=\pm 1$) система (2.2) имеет особенность и поэтому неудобна для исследования движения оси симметрии спутника в окрестности нормали к плоскости орбиты.

При $e=0$ система (2.2) допускает первый интеграл (обобщенный интеграл энергии)

$$H = 1/2 (\Omega_2^2 + \Omega_3^2) - 3/2 (1-\lambda) \cos^2 \delta \cos^2 \beta - \lambda \Omega_1 \sin \beta - \Omega_2 \cos \beta = \text{const} \quad (2.3)$$

Если $e=0$ и $|\lambda\Omega_1| < |4-3\lambda|$, то эта система имеет стационарное решение

$$\delta = \Omega_3 = 0, \quad \beta = \beta_0 = \arcsin \frac{\lambda\Omega_1}{4-3\lambda}, \quad \Omega_2 = \cos \beta_0 \quad (2.4)$$

соответствующее решению (1.7) в случае $n_3 < 0$. При $0 < \lambda < 1$ стационарное решение (2.4) устойчиво [1].

Для сокращения записи будем использовать векторные обозначения. Введем вектор $z = (\delta, \beta, \Omega_2, \Omega_3)^T$ и определим функцию $F(z, v, \lambda, \Omega_1, e) \in \mathbb{R}^4$ так, чтобы система (2.2) могла быть записана в виде

$$\dot{z} = F(z, v, \lambda, \Omega_1, e) \quad (2.5)$$

Система (2.5) обладает свойством (E) [3] по отношению к матрице $S = \text{diag}(-1, 1, 1, -1)$, т. е. функция $F(z, v, \lambda, \Omega_1, e)$ удовлетворяет соотношению

$$SF(Sz, -v, \lambda, \Omega_1, e) = -F(z, v, \lambda, \Omega_1, e) \quad (2.6)$$

Кроме того, при $S_1 = \text{diag}(1, -1, 1, -1)$ имеем

$$F(z, v+\pi, \lambda, \Omega_1, e) = F(z, v, \lambda, \Omega_1, -e) \quad (2.7)$$

$$F(z, v, \lambda, -\Omega_1, e) = S_1 F(S_1 z, v, \lambda, \Omega_1, e)$$

Систему (2.5) при $e=0$ запишем следующим образом:

$$\dot{z} = F_0(z, \lambda, \Omega_1) \quad (2.8)$$

Здесь $F_0(z, \lambda, \Omega_1) = F(z, v, \lambda, \Omega_1, 0)$. Интеграл (2.3) и стационарное решение (2.4) обозначим соответственно $H(z, \Omega_1)$ и $z_0(\lambda, \Omega_1)$. Справедливы соотношения

$$\begin{aligned} Sz_0(\lambda, \Omega_1) &= z_0(\lambda, \Omega_1), \quad S_1 z_0(\lambda, -\Omega_1) = z_0(\lambda, \Omega_1) \\ H(Sz, \Omega_1) &= H(z, \Omega_1), \quad H(S_1 z, -\Omega_1) = H(z, \Omega_1) \end{aligned} \quad (2.9)$$

Вернемся к формулировке основной задачи. Пусть p и q — взаимно простые натуральные числа. Будем искать $2\pi p$ -периодические решения системы (2.5), совпадающие при $e=0$ с $2\pi p/q$ -периодическими решениями Ляпунова системы (2.8), существующими в окрестности стационарного решения $z_0(\lambda, \Omega_1)$. Для достаточно малых значений эксцентриситета орбиты и амплитуды решений Ляпунова существование искомых решений будет установлено аналитически. Затем с помощью численных расчетов эти решения будут продолжены в область произвольных значений амплитуды и эксцентриситета.

В процессе такого продолжения были найдены решения, удовлетворяющие при некоторых значениях v соотношению $\cos \beta = 0$. Чтобы исключить эту особенность, начиная с определенных значений параметров вместо периодических решений системы (2.2) вычислялись соответствующие периодические решения системы (1.5). Переход к системе (1.5) позволил обнаружить новые типы периодических решений.

3. Характеристическое уравнение системы (2.8), линеаризованной в окрестности стационарного решения $z_0(\lambda, \Omega_1)$, имеет вид

$$\kappa^4 + [7-6\lambda-9\lambda(1-\lambda)\sin^2 \beta_0]\kappa^2 + 3(1-\lambda)(4-3\lambda)\cos^2 \beta_0 = 0 \quad (3.1)$$

Пусть в некоторой области $G \subset \{(\lambda, \Omega_1) : 0 < \lambda < 2, |\lambda\Omega_1| < |4-3\lambda|\}$ это уравнение имеет простой корень $\kappa = i\Omega(\lambda, \Omega_1)$ ($i^2 = -1, \Omega(\lambda, \Omega_1) > 0$) и не имеет корней вида $\kappa = ik\Omega(\lambda, \Omega_1)$ для любого целого k , не равного ± 1 . Тогда [4] при $(\lambda, \Omega_1) \in G$ в окрестности стационарного решения $z_0(\lambda, \Omega_1)$ система (2.8) допускает двухпараметрическое семейство периодических решений Ляпунова

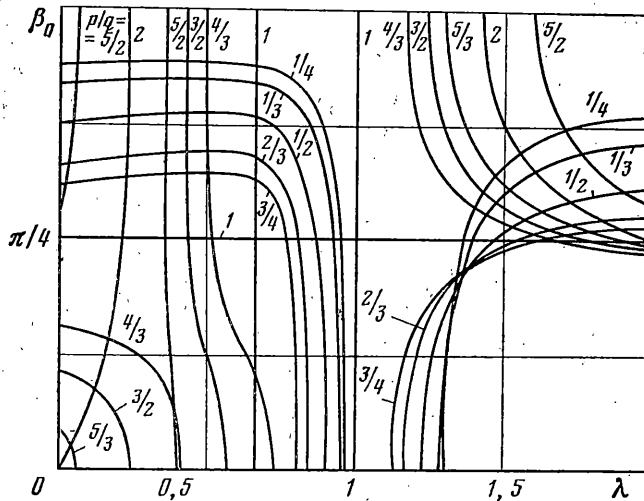
$$z = \varphi[\omega(\lambda, \Omega_1, c^2)(v+v_0), \lambda, \Omega_1, c] \quad (3.2)$$

Здесь v_0 и c — произвольные постоянные, $-\infty < v_0 < +\infty$, $|c| < c_0$ (c_0 — достаточно малое положительное число); $\varphi(\tau, \lambda, \Omega_1, c)$ и $\omega(\lambda, \Omega_1, c^2)$ — аналитические функции своих аргументов, $\varphi(\tau + \pi, \lambda, \Omega_1, -c) = \varphi(\tau, \lambda, \Omega_1, c)$, $\varphi(\tau, \lambda, \Omega_1, 0) = z_0(\lambda, \Omega_1)$, $\omega(\lambda, \Omega_1, 0) = \Omega(\lambda, \Omega_1)$. В силу свойств симметрии системы (2.8) и стационарного решения $z_0(\lambda, \Omega_1)$ (ср. соотношения (2.6), (2.7), (2.9)) функции φ и ω можно выбрать так, чтобы выполнялись соотношения¹

$$S\varphi(-\tau, \lambda, \Omega_1, c) = \varphi(\tau, \lambda, \Omega_1, c) \quad (3.3)$$

$$S_1\varphi(\tau, \lambda, -\Omega_1, c) = \varphi(\tau, \lambda, \Omega_1, c), \quad \omega(\lambda, -\Omega_1, c^2) = \omega(\lambda, \Omega_1, c^2)$$

Период решения (3.2) равен $2\pi / \omega(\lambda, \Omega_1, c^2)$. Далее будем рассматривать решения Ляпунова с периодом $2\pi p / q$, где, как и прежде, p и q —



Фиг. 2

взаимно простые натуральные числа. Для $2\pi p / q$ -периодических решений (3.2) постоянная c определяется уравнением

$$\omega(\lambda, \Omega_1, c^2) = q / p \quad (3.4)$$

При $c=0$ это уравнение переходит в уравнение

$$\Omega(\lambda, \Omega_1) = q / p \quad (3.5)$$

которое можно преобразовать к виду

$$q^4 - p^2 q^2 [7 - 6\lambda - 9\lambda(1-\lambda) \sin^2 \beta_0] + 3p^4 (1-\lambda) (4-3\lambda) \cos^2 \beta_0 = 0 \quad (3.6)$$

Для некоторых значений p и q кривые, задаваемые в плоскости (λ, β_0) уравнением (3.6), приведены на фиг. 2. Использование здесь плоскости (λ, β_0) вместо плоскости (λ, Ω_1) (связь между β_0 и Ω_1 указана в (2.4)) вызвано соображениями графического удобства.

При $p / q \neq 1$ на кривых (3.5) $(\partial\Omega / \partial\lambda)^2 + (\partial\Omega / \partial\Omega_1)^2 > 0$ и, следовательно, уравнение (3.4) задает в области $G \times (-c_0, c_0) \subset R^3(\lambda, \Omega_1, c)$ поверхность, пересекающую плоскость (λ, Ω_1) по кривой (3.5). Анализ уравнения (3.6) показывает, что в области $\{(\lambda, \Omega_1) : 0 < \lambda < 2, |\lambda\Omega_1| < |4-3\lambda|\}$ кривые (3.5) существуют лишь при $p^2 / q^2 < 7$.

Построение решения (3.2), (3.4) в явном виде и продолжение его в область больших значений амплитуды можно провести, вообще говоря,

¹ Сазонов В. В., Сарычев В. А. Периодические решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений, близких автономным. — Препринт Ин-та прикл. матем. АН СССР, М., 1977, № 90. 59 с.

только численными методами. При $v_0=0$ построение такого решения сводится к решению для системы (2.8) краевой задачи

$$Sz(0)=z(0), \quad Sz(\pi p/q)=z(\pi p/q) \quad (3.7)$$

В самом деле, вследствие первого соотношения (3.3) решение (3.2), (3.4) при $v_0=0$ удовлетворяет условиям (3.7). Наоборот, если $z(v)$ — решение краевой задачи (2.8), (3.7), то в силу (2.6) оно допускает [3, 5] продолжение на всю действительную ось с выполнением соотношений $Sz(-v)=z(v)$, $Sz(-v+\pi p/q)=z(v+\pi p/q)$. Отсюда имеем $z(v+2\pi p/q)=z(v)$. Далее, говоря о решениях краевых задач, определяющих периодические решения, считаем эти решения продолженными на всю действительную ось.

Краевые условия (3.7) в скалярной форме записываются следующим образом: $\delta(0)=\Omega_3(0)=\delta(\pi p/q)=\Omega_3(\pi p/q)=0$. Здесь последние два соотношения следует рассматривать как уравнения относительно неизвестных начальных условий $\beta(0)$ и $\Omega_2(0)$.

Наряду с краевыми условиями (3.7) решение (3.2), (3.4) при $v_0=0$ удовлетворяет также краевым условиям

$$Sz(0)=z(0), \quad Sz(\pi p)=z(\pi p) \quad (3.8)$$

Краевую задачу (3.8) можно рассматривать не только для автономной системы (2.8), но и для 2π -периодической системы (2.5). В силу (2.6) решение $z(v)$ задачи (2.5), (3.8) допускает [3, 5] продолжение на всю действительную ось, являющееся $2\pi p$ -периодическим и удовлетворяющее соотношению $Sz(-v)=z(v)$.

Исследуем краевую задачу (2.5), (3.8) методом Пуанкаре. Малым параметром будем считать ϵ , порождающим решением — решение (3.2), (3.4) при $v_0=0$ и $c \neq 0$. Это порождающее решение имеет вид $z = \varphi(qv/p, \lambda, \Omega_1, c)$, где c — корень уравнения (3.4). Для того чтобы воспользоваться теоремой Пуанкаре [4], необходимо выяснить, имеет ли краевая задача

$$\Delta z' = \{ \partial F_0[\varphi(qv/p, \lambda, \Omega_1, c), \lambda, \Omega_1] / \partial z \} \Delta z \quad (3.9)$$

$$S\Delta z(0) = \Delta z(0), \quad S\Delta z(\pi p) = \Delta z(\pi p) \quad (3.10)$$

нетривиальные решения. В силу соотношения (2.6) и первого соотношения (3.3) справедливо равенство

$$S \frac{\partial F_0[\varphi(qv/p, \lambda, \Omega_1, c), \lambda, \Omega_1]}{\partial z} = - \frac{\partial F_0[\varphi(-qv/p, \lambda, \Omega_1, c), \lambda, \Omega_1]}{\partial z} S \quad (3.11)$$

Поэтому [3, 5] всякое решение краевой задачи (3.9), (3.10) является $2\pi p$ -периодическим.

Исследуем решения системы (3.9) подробнее. Введем функции $u(v) = \partial \varphi(qv/p, \lambda, \Omega_1, c) / \partial \tau$, $v(v) = \partial \varphi(qv/p, \lambda, \Omega_1, c) / \partial c$, где c — корень уравнения (3.4). Эти функции являются $2\pi p/q$ -и, следовательно, $2\pi p$ -периодическими и удовлетворяют соотношениям (ср. (3.3)): $Su(-v) = -u(v)$, $Sv(-v) = v(v)$.

Можно доказать, что система (3.9) имеет решения $\Delta z_1 = u(v)$, $\Delta z_2 = v(v) + v u(v)$ ($\partial \omega / \partial c$). Будем рассматривать эту систему как $2\pi p$ -периодическую. В силу (3.11) ее характеристическое уравнение — возвратное [3], в силу наличия у нее $2\pi p$ -периодического решения $u(v)$ это уравнение имеет корень, равный единице. С учетом сказанного характеристическое уравнение системы (3.9) можно представить в виде

$$(\rho - 1)^2 [\rho^2 - a(\lambda, \Omega_1, c^2)\rho + 1] = 0 \quad (3.12)$$

где $a(\lambda, \Omega_1, c^2)$ — коэффициент. Справедливо соотношение $a(\lambda, \Omega_1, 0) =$

$= 2 \operatorname{ch} [2\pi p \kappa_*(\lambda, \Omega_1)]$, где $\kappa = \kappa_*(\lambda, \Omega_1)$ — корень уравнения (3.1), отличный от корня $\kappa = iq/p$. Напомним, что в (3.12) λ , Ω_1 и c связаны соотношением (3.4). Если

$$a(\lambda, \Omega_1, c^2) \neq 2, \quad \partial \omega(\lambda, \Omega_1, c^2) / \partial (c^2) \neq 0 \quad (3.13)$$

то система (3.9) допускает единственное $2\pi p$ -периодическое решение $\Delta z = u(v)$, удовлетворяющее крайевым условиям $S\Delta z(0) = -\Delta z(0)$, $S\Delta z(\pi p) = -\Delta z(\pi p)$. Таким образом, при выполнении неравенств (3.13) крайевая задача (3.9), (3.10) нетривиальных решений не имеет.

Неравенства (3.13) выполнены, например, в случае, когда $|c|$ достаточно мало

$$a(\lambda, \Omega_1, 0) \neq 2 \quad (3.14)$$

и справедливо хотя бы одно из неравенств

$$\partial^k \omega(\lambda, \Omega_1, 0) / \partial (c^2)^k \neq 0 \quad (k=1, 2, \dots) \quad (3.15)$$

На кривых (3.5) при фиксированных p и q неравенства (3.14) и (3.15) нарушаются, по-видимому, только в отдельных изолированных точках — нарушение неравенства (3.14) или одновременное нарушение неравенств (3.15) на множестве точек кривых (3.5), содержащем сходящуюся последовательность, не является особенностью общего положения в рассматриваемой задаче.

Фиксируем точку (λ, Ω_1, c) на поверхности (3.4). Пусть в этой точке выполнены неравенства (3.13). Тогда в силу теоремы Пуанкаре при достаточно малом e крайевая задача (2.5), (3.8) имеет единственное решение $z_*(v, \lambda, \Omega_1, c, e)$, аналитически зависящее от e и удовлетворяющее условию $z_*(v, \lambda, \Omega_1, c, 0) = \varphi(qv/p, \lambda, \Omega_1, c)$. С помощью соотношений (2.7), (3.3) можно доказать, что $S_1 z_*(v, \lambda, -\Omega_1, c, e) = z_*(v, \lambda, \Omega_1, c, e)$.

Пусть $z^{(0)}(v, e)$ — какое-либо решение краевой задачи (2.5), (3.8). Тогда $z^{(0)}(v, e) - 2\pi p$ -периодическое решение системы (2.5). Это решение позволяет получить другие $2\pi p$ -периодические решения: $z^{(k)}(v, e) = z^{(0)}[v + \pi k, (-1)^k e]$ ($k = \pm 1, \pm 2, \dots$). Ясно, что различных решений здесь не более $2p$ и все они содержатся в совокупности $\{z^{(k)}; k = 0, 1, \dots, 2p-1\}$.

4. Краевая задача (2.8), (3.7) в соответствии с формулами (2.1) переходит в краевую задачу

$$l_1(0) = n_1(0) = l_1(\pi p/q) = n_1(\pi p/q) = 0 \quad (4.1)$$

$$l_2(0)n_2(0) + l_3(0)n_3(0) = \lambda \Omega_1, \quad n_2^2(0) + n_3^2(0) = 1$$

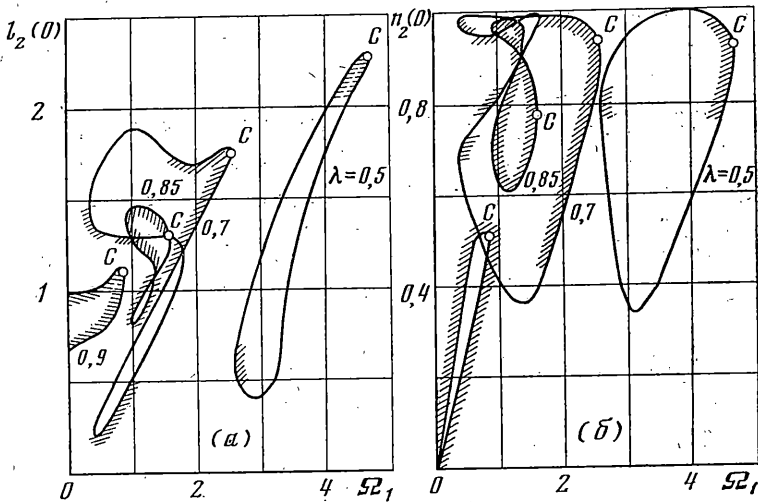
для системы (1.5) в случае $e=0$. Здесь последние два соотношения и условия $l_1(\pi p/q) = n_1(\pi p/q) = 0$ следует рассматривать как уравнения относительно неизвестных $l_2(0)$, $l_3(0)$, $n_2(0)$, $n_3(0)$.

В окрестности стационарного решения (2.4) краевые задачи (2.8), (3.7) и (1.5) ($e=0$), (4.1) эквивалентны. Однако при произвольных значениях переменных вторая крайевая задача является более общей, чем первая. В самом деле, если $l_2(0)$, $l_3(0)$, $n_2(0)$, $n_3(0)$ — начальные условия решения краевой задачи (1.5) ($e=0$), (4.1), то $l_2(0)$, $-l_3(0)$, $n_2(0)$, $-n_3(0)$ — также начальные условия решения этой задачи. Указанное свойство обусловлено свойством системы (1.5) и соотношений (4.1) сохранять свой вид при замене $l_1 \rightarrow -l_1$, $l_3 \rightarrow -l_3$, $n_1 \rightarrow -n_1$, $n_3 \rightarrow -n_3$. Такому преобразованию системы (1.5) соответствует преобразование $\delta \rightarrow \delta + \pi$ системы (2.2). Это преобразование переводит периодические решения Ляпунова, существующие в окрестности положения равновесия (2.4), в периодические решения Ляпунова, существующие в окрестности положения равновесия $\delta = \pi$, $\beta = \arcsin[\lambda \Omega_1 / (4 - 3\lambda)]$, $\Omega_2 = \cos \beta$, $\Omega_3 = 0$. Такое положение равновесия соответствует стационарному решению (1.7) в случае $n_3 > 0$.

Второй пример глобальной неэквивалентности краевых задач (2.8), (3.7) и (1.5) ($e=0$), (4.1) можно получить рассматривая вращательные

периодические решения системы (2.8). Дадим следующее определение. Пусть $h=(1, 0, 0, 0)^T$, k — целое число, $k \neq 0$. Решение $z(v)$ системы (2.8) назовем вращательным периодическим решением, если существует такое число $T > 0$ (период), что $z(v+T) = z(v) + 2\pi kh$.

В общем случае вращательное T -периодическое решение определяется краевыми условиями $z(T) = z(0) + 2\pi kh$. Однако, если разыскивать



Фиг. 3

только симметричные решения, то можно ограничиться исследованием краевых задач

$$Sz(0) = z(0), Sz(1/2T) = z(1/2T) - 2\pi kh \quad (k \neq 0) \quad (4.2)$$

Если в (4.2) положить $T = 2\pi p/q$ и с помощью формул (2.1) пересчитать эти краевые условия в переменные l_j, n_j ($j=1, 2, 3$), то в результате получим краевые условия (4.1).

Перейдем теперь к краевой задаче (2.5), (3.8). В соответствии с формулами (2.1) эта задача переходит в краевую задачу

$$l_1(0) = n_1(0) = l_1(\pi p) = n_1(\pi p) = 0, \quad n_2^2(0) + n_3^2(0) = 1 \quad (4.3)$$

$$l_2(0)n_2(0) + l_3(0)n_3(0) = \lambda \Omega_1 \frac{(1+e)^2}{(1-e^2)^{3/2}}$$

для системы (1.5). Все сказанное выше о краевых задачах (2.8), (3.7) и (1.5) ($e=0$), (4.1) с очевидными заменами $2\pi p/q \rightarrow 2\pi p$, $T \rightarrow 2\pi p$ справедливо и для краевых задач (2.5), (3.8) и (1.5), (4.3).

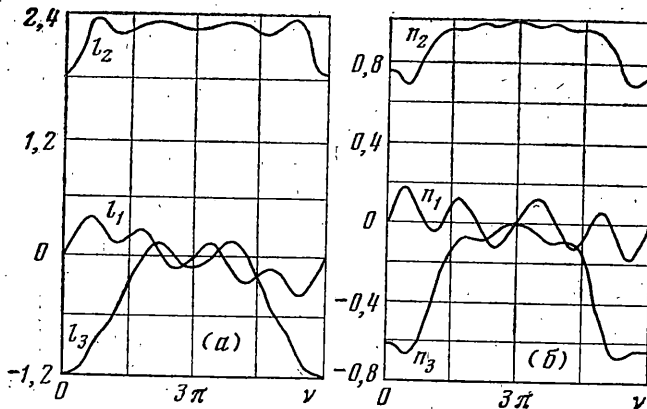
5. Численное исследование периодических решений системы (1.5) проводилось следующим образом. Фиксировались значения p и q . В окрестности стационарного решения (1.7), в котором параметры λ и Ω_1 связаны соотношением (3.5), рассматривалась система (2.8). Для этой системы методом [6] решалась краевая задача (3.7). Решения задачи (2.8), (3.7) представлялись в виде графиков зависимости начальных условий $\beta(0)$ и $\Omega_2(0)$ от Ω_1 при фиксированных значениях λ^2 .

В результате продолжения решений краевой задачи (2.8), (3.7) по параметру Ω_1 были найдены решения, удовлетворяющие при некотором зна-

² Более подробно результаты описываемых расчетов приведены в работе: Са-зонов В. В., Сидорук М. Е. Периодические движения оси симметрии динамически симметричного спутника под действием гравитационного момента. — Препринт Ин-та прикл. матем. АН СССР, М., 1981, № 31. 28 с.

чении ν соотношению $\cos \beta = 0$. Чтобы эта особенность не мешала дальнейшему продолжению, начиная с некоторого значения Ω_1 , вместо краевой задачи (2.8), (3.7) решалась краевая задача (1.5) ($e=0$), (4.1). При решении последней задачи неизвестными начальными условиями считались $l_2(0)$ и $n_2(0)$. Начальные условия $l_3(0)$ и $n_3(0)$ находились с помощью формул $n_3(0) = \pm [1 - n_2^2(0)]^{1/2}$, $l_3(0) = (\lambda \Omega_1 - l_2(0) n_2(0)) / n_3(0)$, причем знак $n_3(0)$ выбирался таким образом, чтобы в процессе продолжения решения по Ω_1 зависимость $n_3(0)$ от Ω_1 получалась гладкой.

Типичные результаты решения краевой задачи (1.5), (4.1) при $e=0$, $p=2$, $q=1$ приведены на фиг. 3, а и б в виде кривых, выражающих зависи-



Фиг. 4

мость начальных условий $l_2(0)$ и $n_2(0)$ от Ω_1 . Точки C на этой фигуре отвечают стационарному решению (1.7). Система (1.5) и краевые условия (4.1) инвариантны относительно преобразования $l_1 \rightarrow -l_1$, $l_3 \rightarrow -l_3$, $n_2 \rightarrow -n_2$, $\Omega_1 \rightarrow -\Omega_1$, поэтому кривые, получающиеся из кривых на фиг. 3 заменой $l_2(0) \rightarrow l_2(0)$, $n_2(0) \rightarrow -n_2(0)$, $\Omega_1 \rightarrow -\Omega_1$, также будут задавать начальные условия решений задачи (1.5), (4.1) в случае $e=0$, $p=2$, $q=1$. Некоторые кривые в плоскости $(\Omega_1, n_2(0))$ на фиг. 3 проходят через начало координат. У отвечающих началу координат решений рассматриваемой краевой задачи $l_1(\nu) = l_3(\nu) = n_2(\nu) = 0$. Такие решения описывают колебания оси симметрии спутника в плоскости орбиты.

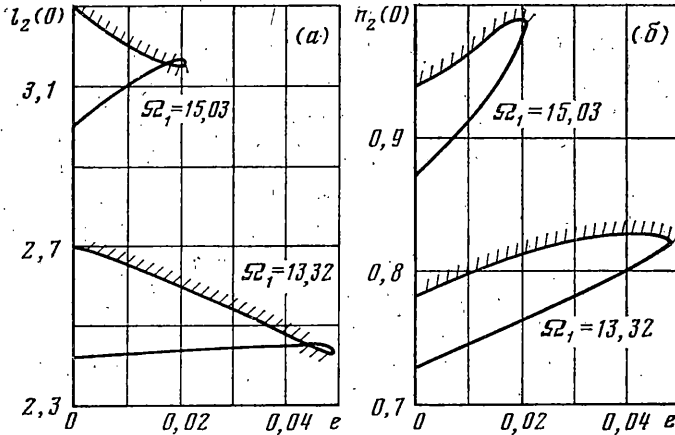
Пример решения краевой задачи (1.5), (4.1) в случае $e=0$, $p=3$, $q=1$ приведен на фиг. 4. Здесь для решения с параметрами $\lambda=0,4$, $\Omega_1=5$, $l_2(0) = -2,11407$, $l_3(0) = -1,20178$, $n_2(0) = 0,76776$, $n_3(0) = -0,64074$ указаны графики функций $l_j(\nu)$ и $n_j(\nu)$ ($j=1, 2, 3$) при $0 \leq \nu \leq 6\pi$. Как оказалось, $n_2(3\pi) \approx 0,999$. Пересчет рассматриваемого решения в переменные z показывает, что для него $z(\nu+6\pi) = z(\nu) + 2\pi h$, т. е. это решение является вращательным (см. п. 3). В процессе решения краевой задачи (1.5), (4.1) ($e=0$, $p=3$, $q=1$), в результате которого было найдено решение, приведенное на фиг. 4, переход от колебательных решений к вращательным произошел непрерывно. В точке перехода $n_2(3\pi) = 1$, в соседних точках $n_2(3\pi) < 1$.

Для исследования устойчивости периодических решений систем (2.8) и (1.5) ($e=0$) рассматривались характеристические уравнения соответствующих систем уравнений в вариациях. Используя свойства симметрии систем (2.8) и (1.5) ($e=0$) и исследуемых периодических решений, можно доказать, что эти характеристические уравнения возвратные. Далее, в силу автономности этих систем рассматриваемые характеристические уравнения имеют корень, равный 1, кратности не ниже 2, а для системы (1.5) ($e=0$) вследствие существования интегральных соотношений (1.6) кратность этого корня не ниже 4. С учетом сказанного характеристические уравнения для системы (2.8) и для системы (1.5) при $e=0$ можно

представить соответственно в виде

$$(\rho-1)^2(\rho^2-b\rho+1)=0, \quad (\rho-1)^4(\rho^2-b\rho+1)=0 \quad (5.1)$$

где b — коэффициент. Если $|b| \leq 2$, то все корни уравнений (5.1) лежат на окружности $|\rho|=1$ и выполнены необходимые условия орбитальной устойчивости исследуемых периодических решений. В противном случае эти решения орбитально неустойчивы. Коэффициент b находился числен-



Фиг. 5

но, причем уравнения в вариациях рассматривались как $2\pi p/q$ -периодические. На фиг. 3 участки $|b| \leq 2$ отмечены штриховкой.

Условие существования нетривиального решения краевой задачи (3.9), (3.10) можно записать в виде

$$D = \begin{vmatrix} \Delta\delta_1(\pi p) & \Delta\delta_2(\pi p) \\ \Delta\Omega_{31}(\pi p) & \Delta\Omega_{32}(\pi p) \end{vmatrix} = 0$$

где $\Delta z_j(v) = (\Delta\delta_j(v), \Delta\beta_j(v), \Delta\Omega_{2j}(v), \Delta\Omega_{3j}(v))^T$ ($j=1, 2$) — решения системы (3.9) с начальными условиями $\Delta z_1(0) = (0, 1, 0, 0)^T$, $\Delta z_2(0) = (0, 0, 1, 0)^T$. Как показали расчеты, для всех вычисленных решений краевой задачи (2.8), (3.7) равенство $D=0$ выполнено лишь в отдельных точках кривых, выражающих зависимость начальных условий $\beta(0)$ и $\Omega_2(0)$ от Ω_1 . Таким образом, указанная в п. 3 возможность применения теоремы Пуанкаре к исследованию краевой задачи (2.5), (3.8) в случае $e \ll 1$ подтверждается результатами численных расчетов.

Найденные численно решения краевых задач (2.8), (3.7) и (1.5) ($e=0$), (4.1) использовались в качестве порождающих для построения решений задач (2.5), (3.8) и (1.5), (4.3) при $e \neq 0$. Решение этих задач проводилось методом, изложенным в [6], результаты представлялись в виде графиков зависимости начальных условий $\beta(0)$ и $\Omega_2(0)$ или $l_2(0)$ и $n_2(0)$ от e при фиксированных значениях λ и Ω_1 . Примеры таких графиков в случае задачи (1.5), (4.3) при $p=1$, $\lambda=0,2$ приведены на фиг. 5, а и б.

Для исследования устойчивости найденных периодических решений рассматривались характеристические уравнения соответствующих систем уравнений в вариациях. Эти характеристические уравнения возвратные и имеют вид

$$(\rho^2 - a_1\rho + 1)(\rho^2 - a_2\rho + 1) = 0$$

$$(\rho - 1)^2(\rho^2 - a_1\rho + 1)(\rho^2 - a_2\rho + 1) = 0$$

где a_1 и a_2 — коэффициенты. Первое уравнение отвечает системе (2.2), вто-

рое — системе (1.5). Если a_1, a_2 действительны и $|a_1| \leq 2, |a_2| \leq 2$, то выполнены необходимые условия устойчивости исследуемых периодических решений. В противном случае эти решения неустойчивы. На фиг. 5 участки кривых, на которых одновременно $-2 \leq a_1 \leq 2$ и $-2 \leq a_2 \leq 2$, отмечены штриховкой.

Авторы благодарят В. А. Сарычева за полезные обсуждения при выполнении работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Черноушко Ф. Л. Об устойчивости регулярной прецессии спутника.— ПММ, 1964, т. 28, вып. 1, с. 155—159.
2. Сарычев В. А., Сазонов В. В. Гравитационная ориентация вращающегося спутника.— Космич. исследования, 1981, т. 19, вып. 4, с. 499—512.
3. Хейл Дж. К. Колебания в нелинейных системах. М.: Мир, 1966. 230 с.
4. Малкин И. Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. М.: Гостехиздат, 1956. 491 с.
5. Heinbockel J. H., Struble R. A. Periodic solutions for differential systems with symmetries.— J Soc. Indust. and Appl. Math., 1965, v. 13, № 2, p. 425—440.— Рус. перев.: — Механика: Сб. перев. иностр. статей. М.: Мир, 1966, № 1, с. 3—17.
6. Сарычев В. А., Сазонов В. В., Мельник Н. В. Пространственные периодические колебания спутника относительно центра масс.— Космич. исследования, 1980, т. 18, вып. 5, с. 659—677.

Москва

Поступила в редакцию
20.XII.1982