МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 3 • 1984

УДК 539.3

ТЕРМОУПРУГОЕ ПОЛЕ В МАТЕРИАЛЕ С ЭЛЛИПСОИДАЛЬНОЙ НЕОДНОРОДНОСТЬЮ, СОЗДАВАЕМОЕ БЫСТРЫМ ЭЛЕКТРОНАГРЕВОМ

САЛГАНИК Р. Л.

Рассматривается задача о термоупругом напряженно-деформированном состоянии, возникающем в материале с эллипсоидальной неоднородностью в результате нагрева, вызванного электрическими потерями при действии на бесконечности однородного электрического поля (механические напряжения, создаваемые электрическим полем, предполагаются пренебрежимо малыми по сравнению с указанными термоупругими).

Рассмотрение относится к малым (но не слишком малым) интервалам времени, за которые термоупругое поле можно считать квазистатическим, по крайней мере в неоднородности и вблизи нее, электрическое поле — изменяющимся без запаздывания по отношению к внешнему, а распределение температуры — не затрагиваемым влиянием теплопроводности. Температура при этом претерпевает скачок на границе неоднородности. Фактически она резко изменяется в тонком пограничном слое, где пренебрегать теплопроводностью нельзя, поэтому рассматриваемая задача является внешней.

Главный член асимптотики распределения температуры в пограничном слое, в том числе распределение температуры на самой границе, можно найти решив внутреннюю задачу. Последняя решается для бесконечного тела с плоской границей, по обе стороны от которой на бесконечности температура равна значениям, которые получаются во внешней задаче на самой границе с соответствующей ее стороны. Такое рассмотрение допустимо в тех точках границы, где ее радиус кривизны гораздо больше толщины пограничного слоя. В точках, где это не выполняется (если они есть), внутренняя задача становится неодномерной.

При ограниченной кривизне границы термоупругие напряжения, получающиеся из решения внешней задачи, ограничены.

1. Постановка задачи. Предположим, что материал с эллипсоидальной неоднородностью помещен в однородное на бесконечности электрическое поле, изменяющееся во времени по гармоническому закону, и колебания установившиеся, т. е. в любой точке напряженность поля изменяется по закону $\exp(-i\omega t)$, где ω — круговая частота, t — время. Считая длину электромагнитной волны Λ, соответствующую этим колебаниям, гораздо большей характерного размера неоднородности d, для декартовых компонент вектора комплексной амплитуды напряженности электрического поля E_k (k=1, 2, 3) можем записать $E_k=-\varphi_{,k}$, где φ — комплексная амплитуда потенциала электрического поля, а индекс k, стоящий после запятой, означает, что берется частная производная по x_k (в дальнейшем тензорные индексы всегда располагаются внизу и для них используются только малые латинские буквы). Пренебрегая влиянием изменений температуры и механических напряжений на электрическое поле, имеем

$$\varphi_{,ll}^{(e)}=0, \quad \varphi_{,ll}^{(i)}=0 \tag{1.1}$$

Здесь и далее по повторяющимся тензорным индексам, если среди них встречаются два незаключенные в скобки, подразумевается суммирование от единицы до трех. Верхние индексы (e) и (i) означают отнесение величины к области внутри и вне неоднородности соответственно. Для краткости пары записей, которые выглядят аналогично в обеих этих областях, заменяются ниже, когда это удобно, одной записью без индексов (e), (i).

Считая, что эффекты, сосредоточенные на границе неоднородности, отсутствуют, имеем следующие граничные условия:

$$\varphi^{(e)}=\varphi^{(i)}, \quad \varepsilon^{(e)}\varphi_{,\nu}^{(e)}=\varepsilon^{(i)}\varphi_{,\nu}^{(i)} \tag{1.2}$$

Здесь $\varepsilon(\omega)=\varepsilon'(\omega)+i\varepsilon''(\omega)$ — комплексная диэлектрическая проницаемость; дифференцирование производится по внешней нормали; компоненты ее единичного вектора будут обозначаться ν_k.

Если имеются токи проводимости, $\varepsilon'(\omega)$ обладает особенностью при $\omega\to 0$ типа ω^{-1}; в проводниках с постоянной удельной проводимостью γ_0 имеем $\varepsilon''=\gamma_0\omega^{-1}$ [1]. Вдали от неоднородности

$$\varphi=\varphi^{(H)}=-E_k x_k, \quad r=(x_k^2)^{1/2}\to\infty \tag{1.3}$$

Обозначив здесь предполагаемую далее действительной амплитуду электрического поля вдали от неоднородности через E_k, в дальнейшем для записи напряженности поля в произвольных точках будем пользоваться ее выражением: $-\varphi_{,k}$.

Решение задачи (1.1)—(1.3) известно [1, 2]; надо лишь в нем заменить действительные параметры на соответствующие комплексные.

Считаем $(\omega/2\pi)\gg\xi d^{-2}$, где ξ — коэффициент температуропроводности. Тогда при вычислении повышения температуры можно использовать среднюю за период мощность тепловыделения, которая в расчете на единицу объема равна $Q={}^1/_2\omega\varepsilon''|\varphi_{,k}|^2$ (магнитными потерями пренебрегаем, пользуемся размерной диэлектрической проницаемостью) [1]. Приведенное выражение для Q сохраняется как главный член асимптотики (при условии, что ε'' не очень мало) и в том случае, если $\varphi_{,k}$ изменяется во времени достаточно медленно по сравнению с периодом $2\pi/\omega$; при этом остаются без изменения соотношения (1.1)—(1.3). В дальнейшем предполагается, что изменения $\varphi_{,k}$ во времени, медленные в указанном смысле, происходят достаточно быстро для того, чтобы всюду (за исключением тонкого пограничного слоя вблизи границы неоднородности) можно было пренебречь влиянием теплопроводности на распределение температуры, т. е. если τ — характерное время этих изменений, то должно быть $2\pi\omega^{-1}\ll\ll\tau\ll\xi^{-1}d^2$.

Имея в виду рассмотрение внешней задачи, толщину пограничного слоя считаем нулевой, так что уравнения для изменения температуры θ (при учете тепловыделения за счет одних лишь электрических потерь) принимают вид

$$\rho c_\theta\dot\theta=\gamma|\varphi_{,l}|^2, \quad \gamma={}^1/_2\omega\varepsilon''(\omega) \tag{1.4}$$

Здесь ρ — плотность, c_θ — теплоемкость; точка над буквой означает частную производную по времени.

Предположим, что $d\ll c_s\tau$, где c_s — характерная скорость упругих волн. При этом уравнения термоупругости можно записать в пренебрежении инерционными членами.

Собирая вместе сформулированные выше ограничения, имеем

$$\max\left[(\tau\xi)^{1/2}, \xi c_s^{-1}\right]\ll d\ll\min\left[c_s\tau, \Lambda\right] \quad (2\pi\omega^{-1}\ll\tau) \tag{1.5}$$

Условия (1.5) в дальнейшем считаются выполненными; интервал удовлетворяющих им размеров неоднородности тем шире, чем, например, меньше теплопроводность.

Пусть u_j — вектор смещений, σ_{jk} — тензор напряжений. Квазистатические уравнения термоупругости [3] удобно записать в скоростях

$$(K+{}^1/_3G)\dot u_{l,jl}+G\dot u_{j,ll}=K\alpha\dot\theta_{,j} \tag{1.6}$$

$$\dot\sigma_{js}=K(\dot u_{ll}-\alpha\dot\theta)\delta_{js}+2G(\dot u_{js}-{}^1/_3\dot u_{ll}\delta_{js}) \qquad (1.7)$$

Здесь и в дальнейшем той же буквой, что и смещения, но с двумя индексами обозначаются малые деформации, $u_{js}={}^1/_2(u_{j,s}+u_{s,j})$, G, K — модули сдвига и объемного сжатия соответственно, α — объемный коэффициент расширения. Принимая, что на границе неоднородности (неподвижной с точностью до малых смещений, связанных с деформированием) нет разрывов вектора смещений и отсутствуют сосредоточенные силы, имеем следующие граничные условия:

$$\dot u_j^{(e)}=\dot u_j^{(i)}, \quad \dot\sigma_{jl}^{(e)}\nu_l=\dot\sigma_{jl}^{(i)}\nu_l, \quad \dot\sigma_{jl}^{(e)}(\infty)=\dot\sigma_{jl}^{(\infty)} \qquad (1.8)$$

где $\dot\sigma_{jl}^{(\infty)}$ — однородное поле скоростей изменения напряжений на бесконечности.

Если высокочастотная (по отношению к обратной длительности интервала времени, в течение которого рассматривается процесс) составляющая электрического поля отсутствует, надо использовать мгновенную мощность потерь.

Рассмотрим этот случай в предположении, что и неоднородность, и окружающий ее материал представляют собой проводники с постоянными удельными проводимостями $\gamma_0^{(i)}$, $\gamma_0^{(e)}$ (токи смещения отсутствуют). Чтобы можно было пренебречь эффектом запаздывания в изменениях электрического поля по сравнению с характерными временами, за которые температурное поле может измениться под влиянием теплопроводности, должно выполняться условие $(\mu_M\gamma_0\xi)\ll1$, где μ_M — магнитная проницаемость (размерная). Если это условие выполняется с достаточным запасом, то имеется диапазон времен, в котором можно считать несущественным также (при рассмотрении внешней задачи) влияние процесса теплопроводности на распределение температуры.

Тогда для изменяющегося во времени (в данном случае всюду действительного) потенциала электрического поля имеем уравнения и граничные условия (1.1)—(1.3) с заменой в (1.2) $\varepsilon^{(e)}$, $\varepsilon^{(i)}$ на $\gamma_0^{(e)}$, $\gamma_0^{(i)}$ соответственно. Для мгновенной мощности тепловыделения в единице объема имеем $Q=\gamma_0(\varphi_{,k})^2$. Уравнения для температуры принимают вид первого уравнения (1.4) с заменой в нем γ на γ_0. Все дальнейшее после этого остается аналогичным изложенному.

Смещения, деформации, напряжения получаются интегрированием по времени скоростей их изменения, которые находим путем решения задачи (1.6)—(1.8) с учетом (1.4), (1.1)—(1.3). При этом необходимо задать начальные условия. Их можно найти исходя из того, что в начальный момент температура материала с неоднородностью отличается на $\Delta\theta_0$ от температуры, при которой в отсутствие приложенных нагрузок нет напряжений.

2. Начальные условия и случай отсутствия потерь вне неоднородности. Нетрудно убедиться, что решение задачи о нахождении начального напряженно-деформированного состояния можно представить в виде суммы решений следующих двух задач. В первой задаче полагаем $\Delta\theta_0=0$ и вдали от неоднородности прикладываем заданные на бесконечности напряжения $\sigma_{jl}^{(\infty)}|_{t=0}$. В результате получаем задачу теории упругости об эллипсоидальной неоднородности во внешнем однородном поле напряжений, решение которой известно [4, с. 123].

Во второй задаче полагаем напряжения на бесконечности равными нулю. Эта задача термоупругости вследствие того, что $\Delta\theta_0=\text{const}$, сводится к решенной в [4, с. 147] задаче о напряженно-деформированном состоянии, создаваемом эллипсоидальной неоднородностью в результате того, что она претерпевает превращение, которое в состоянии, свободном от стеснения со стороны окружающего материала, выражается тензором деформаций $e_{jl}^{T\bullet}$ (свободная от напряжений деформация). Если в рассматриваемом случае отсчитывать смещения (в неоднородности и окружающем материале) от деформированного состояния, выражаемого тензором $^1/_3\alpha^{(e)}\Delta\theta_0\delta_{jl}$, то для получения искомого решения второй задачи надо положить

$$e_{jl}^{T\bullet}={}^1/_3(\alpha^{(i)}-\alpha^{(e)})\Delta\theta_0 \tag{2.1}$$

Напряжения во второй задаче будут выражаться соотношениями (1.7), в которых надо убрать точку над буквами и заменить θ на $\Delta\theta_0$. При этом u_{jl} играет роль e_{jl}^c в обозначениях [4].

Аналогично находится и решение задачи (1.6)–(1.8), когда отсутствуют потери вне неоднородности, т. е. $\gamma^{(e)}=0$. При этом (см. (1.4)) $\theta^{\cdot(e)}=0$, а $\theta^{\cdot(i)}$ не зависит от координат, поскольку внутри эллипсоидальной неоднородности, как вытекает из решения задачи (1.1)–(1.3) [1, 2], электрическое поле однородно. Решение задачи (1.6)–(1.8) находится как сумма решений, указанных выше первой и второй задач, если в них заменить смещения, деформации, напряжения на скорости их изменения; в первой задаче в качестве условия на бесконечности задать скорость изменения напряжений равной $\sigma_{jl}^{\cdot(\infty)}$, а во второй принять

$$e_{jl}^{\cdot T\bullet}={}^1/_3\alpha^{(i)}\zeta^{(i)}|\varphi_{,k}^{(i)}|^2\delta_{jl}, \qquad \zeta=\gamma/(\rho c_0) \tag{2.2}$$

Скорости изменения напряжений во второй задаче выражаются соотношениями (1.7), в которых $\theta^{\cdot(e)}=0$, $\theta^{\cdot(i)}=\zeta^{(i)}|\varphi_{,k}^{(i)}|^2$, а u_{jl} заменяется на e_{jl}^c в обозначениях [4]. При $\gamma^{(e)}\neq 0$ решение задачи (1.6)–(1.8) усложняется.

3. Преобразование задачи. Рассмотрим общий случай. Решение уравнений (1.6) можно представить в виде суммы их частного решения $\eta_j^\cdot$ и решения соответствующих однородных уравнений $w_j^\cdot$:

$$u_j^\cdot=\eta_j^\cdot+w_j^\cdot \tag{3.1}$$

При этом соотношения (1.7) принимают вид

$$\sigma_{jl}^\cdot=q_{jl}^\cdot+S_{jl}^\cdot-K\alpha\theta^{\cdot(\infty)}(1-H)\delta_{jl} \tag{3.2}$$

$$q_{jl}^\cdot=K[\eta_{nn}^\cdot-\alpha(\theta^\cdot-(1-H)\theta^{\cdot(\infty)})]\delta_{jl}+2G(\eta_{jl}^\cdot-{}^1/_3\eta_{nn}^\cdot\delta_{jl}) \tag{3.3}$$

$$S_{jl}^\cdot=Kw_{nn}^\cdot\delta_{jl}+2G(w_{jl}^\cdot-{}^1/_3w_{nn}^\cdot\delta_{jl}) \tag{3.4}$$

$$\theta^{\cdot(\infty)}=\zeta^{(e)}E_l^2, \quad \zeta^{(e)}=\gamma^{(e)}/(\rho^{(e)}c_\theta^{(e)}), \quad H^{(e)}=0, \quad H^{(i)}=1 \tag{3.5}$$

Потребуем, чтобы для $\eta_j^\cdot$ выполнялись граничные условия

$$\eta_j^{\cdot(e)}=\eta_j^{\cdot(i)}, \qquad \eta_j^{\cdot(e)}(\infty)=0 \tag{3.6}$$

Из (1.8) с учетом (3.1)–(3.6) имеем

$$w_j^{\cdot(e)}=w_j^{\cdot(i)}, \qquad (S_{jl}^{\cdot(e)}-S_{jl}^{\cdot(i)})\nu_l=-(q_{jl}^{\cdot(e)}-q_{jl}^{\cdot(i)}-K^{(e)}\alpha^{(e)}\theta^{\cdot(\infty)}\delta_{jl})\nu_l$$

$$S_{jl}^{\cdot(e)}(\infty)=S_{jl}^{\cdot(\infty)}, \quad S_{jl}^{\cdot(\infty)}=\sigma_{jl}^{\cdot(\infty)}+K^{(e)}\alpha^{(e)}\theta^{\cdot(\infty)}\delta_{jl} \tag{3.7}$$

Последнее условие можно записать также в виде

$$w_{jl}^{\cdot(\infty)}=u_{jl}^{\cdot(\infty)}.$$

4. Частное решение. Уравнения (1.6) при подстановке в них $\eta_j^\cdot$ вместо $u_j^\cdot$ будут удовлетворены, если

$$\eta_j^\cdot=U_{,j}, \quad U_{,ll}=m[\theta^\cdot-(1-H)\theta^{\cdot(\infty)}], \quad m=\frac{3\alpha K}{3K+4G} \tag{4.1}$$

Возможность добавления при этом в правые части вторых уравнений (4.1) произвольных величин, не зависящих от координат, использована здесь таким образом, чтобы обеспечить обращение в нуль $U_{,ll}$ на бесконечности.

Из (4.1) и (3.3) имеем

$$q_{jl}^{\cdot}=2G[U_{,jl}-m(\theta^{\cdot}-1-H)\theta^{\cdot(\infty)})\delta_{jl}] \tag{4.2}$$

Граничные условия (3.6) будут удовлетворены, если на границе эллипсоида

$$U^{(e)}=U^{(i)},\quad U^{(e)}_{,\nu}=U^{(i)}_{,\nu},\quad U^{(e)}(\infty)=0 \tag{4.3}$$

Задача (4.1), (4.3) с учетом (1.1)–(1.4), (3.5) математически близка к рассмотренной в [5] и решается аналогично.

Поскольку с учетом (1.1) $|\varphi_{,l}|^2={}^1/_2(|\varphi|^2)_{,ll}$, то из (4.1), (1.3), (1.4), (3.5) находим

$$\Phi^{(e)}_{,ll}=0,\quad \Phi^{(e)}=U^{(e)}-{}^1/_2m^{(e)}\zeta^{(e)}[\,|\varphi^{(e)}|^2-(\varphi^{(H)})^2] \tag{4.4}$$

$$\Phi^{(i)}_{,ll}=0,\quad \Phi^{(i)}=U^{(i)}-{}^1/_2m^{(i)}\zeta^{(i)}|\varphi^{(i)}|^2 \tag{4.5}$$

Оси координат $x_1=x$, $x_2=y$, $x_3=z$ направим по осям эллипсоида, поместив начало координат в его центре; длины полуосей эллипсоида обозначим $a_1=a$, $a_2=b$, $a_3=c$.

Для получения решения задачи воспользуемся, как и в [5], потенциалами простого слоя $(R=[(x_l-x_l')^2]^{1/2})$:

$$v=\int\limits_V\frac{dV'}{R},\quad v_j=\int\limits_S\frac{\nu_j'\,dS'}{R},\quad v_{js}=\int\limits_S\frac{x_j'\,\nu_s'\,dS'}{R} \tag{4.6}$$

Интегрирование производится по штрихованным координатам, в первом интеграле — по объему V, в остальных — по поверхности S эллипсоида (штрихами отмечены величины, зависящие только от штрихованных координат). Имеем на границе эллипсоида

$$v^{(e)}_{j,\nu}-v^{(i)}_{j,\nu}=-4\pi\nu_j,\quad v^{(e)}_{jl,\nu}-v^{(i)}_{jl,\nu}=-4\pi x_j\nu_l \tag{4.7}$$

Решение задачи (1.1)–(1.3) [1, 2] можно представить в виде

$$\varphi=L_{(j)}E_jv_j+\varphi^{(H)},\quad L_j=\frac{\varepsilon^{(e)}-\varepsilon^{(i)}}{(\varepsilon^{(e)}-\varepsilon^{(i)})I_j-4\pi\varepsilon^{(e)}} \tag{4.8}$$

$$I_1=I_a=2\pi abc\int\limits_0^\infty\frac{ds}{(a^2+s)^{3/2}[(b^2+s)(c^2+s)]^{1/2}} \tag{4.9}$$

Выражения для $I_2=I_b$, $I_3=I_c$ получаются отсюда одновременными круговыми перестановками a, b, c и 1, 2, 3 (далее в подобных случаях говорится просто о круговых перестановках).

Из (4.8) следует

$$\varphi^{(i)}=-\varkappa_{(j)}E_jx_j,\quad \varkappa_j=1-L_{(j)}I_j \tag{4.10}$$

Из (4.3), вторых равенств (4.4), (4.5) с учетом (1.2) (для исключения членов с $\varphi^{(e)}$), (1.3), (4.6)–(4.10) находим граничные условия

$$\Phi^{(e)}-\Phi^{(i)}={}^1/_2B^{(0)}_{jl}x_jx_l,\quad \Phi^{(e)}_{,\nu}-\Phi^{(i)}_{,\nu}=B^{(1)}_{jl}x_j\nu_l,\quad \Phi^{(e)}(\infty)=0 \tag{4.11}$$

$$B^{(0)}_{jl}=[m^{(e)}\zeta^{(e)}-(m^{(e)}\zeta^{(e)}-m^{(i)}\zeta^{(i)})\operatorname{Re}(\overset{*}{\varkappa}_{(j)}\varkappa_{(l)})]E_jE_l \tag{4.12}$$

$$B^{(1)}_{jl}=\left\{m^{(e)}\zeta^{(e)}-\operatorname{Re}\left[\left(m^{(e)}\zeta^{(e)}\frac{\varepsilon^{(i)}}{\varepsilon^{(e)}}-m^{(i)}\zeta^{(i)}\right)\overset{*}{\varkappa}_{(j)}\varkappa_{(l)}\right]\right\}E_jE_l \tag{4.13}$$

(звездочка вверху означает комплексное сопряжение).

Далее положим аналогично формулам (3.3), (3.4) работы [5] [1]

$$\Phi=\Phi_*-(4\pi)^{-1}B_{ll}^{(0)}v-{}^1/_2HB_{jl}^{(0)}x_jx_l \tag{4.14}$$

Из (4.11) с учетом непрерывности v и $v_{,j}$ имеем граничные условия

$$\Phi_*^{(e)}-\Phi_*^{(i)}=0, \quad \Phi_{*,\nu}^{(e)}-\Phi_{*,\nu}^{(i)}=-F_{jl}x_j\nu_l, \quad \Phi_*^{(e)}(\infty)\neq 0 \tag{4.15}$$

$$F_{jl}=B_{jl}^{(0)}-B_{jl}^{(1)} \tag{4.16}$$

Из (4.14) с учетом равенства $v_{,ll}=-4\pi H$ следует, что $\Phi_{*,ll}=0$. Решение уравнения $\Phi_{*,ll}=0$ с граничными условиями (4.15) имеет вид

$$\Phi_*=(4\pi)^{-1}F_{jl}v_{jl} \tag{4.17}$$

Это следует из (4.6), (4.7). Тем самым искомое решение получено. Чтобы записать его в развернутом виде, воспользуемся следующими соотношениями (см. [5], формулы (2.5), (2.17), (2.26)—(2.30)):

$$v_{jl}^{(i)}=D_{(j)}\delta_{jl}+(D_{jlpq}+D'_{jlpq})x_px_q \tag{4.18}$$

$$D_1={}^1/_2(I_bb^2+I_cc^2), \qquad D_{1111}={}^1/_2(3a^2I_{aa}-I_a) \tag{4.19}$$

$$D_{1212}={}^3/_4(a^2+b^2)I_{ab}, \qquad D_{1122}=D_{2211}={}^1/_2(b^2I_b-a^2I_a)/(a^2-b^2)$$

$$I_{aa}=2\pi abc\int_0^\infty\frac{ds}{(a^2+s)^{5/2}[(b^2+s)(c^2+s)]^{1/2}}$$

$$I_{ab}=\frac{2}{3}\pi abc\int_0^\infty\frac{ds}{(a^2+s)^{3/2}(b^2+s)^{3/2}(c^2+s)^{1/2}} \tag{4.20}$$

$$D'_{jlpq}={}^1/_4(I_{(l)}-I_{(j)})(\delta_{jp}\delta_{lq}+\delta_{jq}\delta_{lp})$$

а также выражением [2, 4]:

$$v^{(i)}={}^1/_2(I_{(k)}a_k^2-I_{(k)}x_k^2) \tag{4.21}$$

Все остальные ненулевые значения D_j, D_{jlpq} и интегралов (4.20) находятся круговыми перестановками. Подставляя (4.17) в (4.14) и используя далее (4.5), с учетом (4.8), (4.10), (4.18) находим

$$U^{(e)}={}^1/_2m^{(e)}\zeta^{(e)}[L_{(j)}\overset{*}{L}_{(l)}v_jv_l-2\,\mathrm{Re}(L_{(j)})v_jx_l]E_jE_l+$$
$$+(4\pi)^{-1}(F_{jl}v_{jl}-B_{ll}^{(0)}v) \tag{4.22}$$

$$U^{(i)}=U_*^{(i)}+{}^1/_2U_{jl}^{(i)}x_jx_l \tag{4.23}$$

Здесь $U_*^{(i)}$ не зависит от координат, и поэтому на искомое термоупругое поле не влияет, а

$$U_{jl}^{(i)}=m^{(i)}\zeta^{(i)}\,\mathrm{Re}(\varkappa_{(j)}\overset{*}{\varkappa}_{(l)})E_jE_l-(\delta_{jk}\delta_{ln}-(4\pi)^{-1}I_{(l)}\delta_{kn}\delta_{jl})B_{kn}^{(0)}+$$
$$+(2\pi)^{-1}(D_{knjl}+D'_{knjl})F_{kn} \tag{4.24}$$

Скорость изменения термоупругого поля для рассматриваемого частного решения определяется формулами (4.1), (4.2), (4.22), (4.23). Из

[1] В [5] в формуле (3.4) пропущен множитель $A_{(l)(l)}$ при v, в формуле (3.2) для A_{jk} и в (3.19) вместо $|\overset{(\varphi)}{\varkappa}_{(j)}\overset{(\varphi)}{\varkappa}_{(k)}|$ должно быть $\overset{(\varphi)}{\varkappa}_{(j)}\overset{(\varphi)*}{\varkappa}_{(k)}$, в (4.6) вместо $|\varphi^{(H)}|$ должно быть $|\varphi^{(H)}|^2$.

(4.1), (4.2), (4.23) имеем

$$q_{jl}^{\cdot(i)} = 2G^{(i)}[U_{jl}^{(i)} - U_{nn}^{(i)}\delta_{jl}], \quad U_{nn}^{(i)} = m^{(i)}\zeta^{(i)}|\varkappa_{(j)}|^2 E_j^2 \tag{4.25}$$

Найдем $q_{js}^{\cdot(e)}$ на границе неоднородности. Поступая аналогично [4, с. 110], с учетом (4.1) имеем на границе

$$U_{,jl}^{(e)} - U_{,jl}^{(i)} = [m^{(e)}(\theta^{\cdot(e)} - \theta^{\cdot(\infty)}) - m^{(i)}\theta^{\cdot(i)}]\nu_j\nu_l = f\nu_j\nu_l \tag{4.26}$$

Из (1.10) исключая $\varphi_{,l}^{(e)}$ при помощи (1.2), (1.3) (для этого удобно разложить вектор $\varphi_{,l}^{(e)}$ на составляющие, нормальную и тангенциальную к границе) и учитывая (4.10), имеем

$$f = \left\{ m^{(e)}\zeta^{(e)}\left(\left|\frac{\varepsilon^{(i)}}{\varepsilon^{(e)}}\right|^2 - 1\right)\varkappa_{(j)}\overset{*}{\varkappa}_{(l)}\nu_j\nu_l + \right.$$

$$\left. + [(m^{(e)}\zeta^{(e)} - m^{(i)}\zeta^{(i)})\varkappa_{(j)}\overset{*}{\varkappa}_{(l)} - m^{(e)}\zeta^{(e)}]\delta_{jl}\right\} E_j E_l \tag{4.27}$$

Из (4.2), используя (4.1), (4.23), (4.26), (4.27), находим, что на границе неоднородности

$$q_{jl}^{\cdot(e)} = 2G^{(e)}[U_{jl}^{(i)} + f\nu_j\nu_l - (U_{nn}^{(i)} + f)\delta_{jl}] \tag{4.28}$$

Воспользуемся приведенными соотношениями, чтобы показать, как распространить на более общий случай решение задачи, рассмотренной в [5], где принималось предположение о симметрии тензора Q_{jk} (см. (3.7)*, далее звездочкой отмечаются формулы из [5]), которое при произвольном направлении электрического поля выполняется, если имеются одни лишь токи проводимости, либо малы мнимые части диэлектрических проницаемостей.

Не требуя симметрии Q_{jk}, надо вместо (3.9)* записать

$$\chi_* = B_j^{(T)} v_j + X_{jl} v_{jl} + \psi \tag{4.29}$$

где неизвестный постоянный тензор X_{jk} теперь не обязательно симметричен. Поступая далее, как описано в [5], и используя (4.18), (4.19), (4.7), приходим к граничным условиям для ψ в виде (3.11)* и к заключению о том, что $\psi=0$, если надлежащим образом выбрать X_{jl}. Но для X_{jl} при $j\neq l$ вместо (3.14)* имеем

$$\begin{gathered} X_{12}[(\lambda^{(e)} - \lambda^{(i)})(D_{1212} + D'_{1212}) - 2\pi\lambda^{(e)}] + X_{21}(\lambda^{(e)} - \lambda^{(i)})(D_{1212} - D'_{1212}) = -{}^1\!/_2 Q_{12} \\ X_{12}(\lambda^{(e)} - \lambda^{(i)})(D_{1212} + D'_{1212}) + X_{21}[(\lambda^{(e)} - \lambda^{(i)})(D_{1212} - D'_{1212}) - 2\pi\lambda^{(e)}] = -{}^1\!/_2 Q_{21} \end{gathered} \tag{4.30}$$

и еще две аналогичные системы для X_{13}, X_{31} и X_{23}, X_{32}, получающиеся отсюда круговыми перестановками. Система для X_{11}, X_{22}, X_{23} сохраняет вид (3.15)*.

Если $Q_{jk} = Q_{kj}$, то, вычитая второе уравнение (4.30) из первого (и аналогично в двух других системах), находим $X_{jl} = X_{lj}$, что приводит к прежнему результату (3.14)*.

Выражения для возмущения температуры вне и внутри неоднородности получаются, как описано в [5], но с использованием вместо (3.9)* более общего выражения (4.29). Выражение для возмущения температуры на больших расстояниях от неоднородности сохраняет вид (3.25)*.

5. Решение задачи в общем случае. Положим

$$\begin{gathered} w_j^{\cdot} = w_j^{\cdot\prime} - w_{jl}^{\cdot(\beta)} x_l, \quad w_{jl}^{\cdot(\beta)} = U_{jl}^{(i)} - {}^1\!/_3 U_{nn}^{(i)}\delta_{jl} \\ S_{jl}^{\cdot\prime} = K w_{nn}^{\cdot\prime}\delta_{jl} + 2G(w_{jl}^{\cdot\prime} - {}^1\!/_3 w_{nn}^{\cdot\prime}\delta_{jl}) \end{gathered} \tag{5.1}$$

Из (3.7) с учетом (3.4), (4.25), (4.28), (5.1), имеем

$$w^{\bullet\prime(e)}=w^{\bullet\prime(i)},\quad (S_{jl}^{\bullet\prime(e)}-S_{jl}^{\bullet\prime(i)})\nu_l=[{}^4/_3(G^{(e)}-G^{(i)})U_{nn}^{(i)}+$$

$$+K^{(e)}\alpha^{(e)}\theta^{\bullet(\infty)}]\boldsymbol{\nu}_j,\quad w_{jl}^{\bullet\prime}(\infty)=u_{jl}^{\bullet(\infty)}+w_{jl}^{\bullet(\beta)} \tag{5.2}$$

Члены, содержащие f (см. (4.28)), не вошли в (5.2), так как исчезают при свертывании с ν_j. Положим далее

$$w_j^{\bullet\prime}=w_{\mathrm{I}j}^{\bullet}+w_{\mathrm{II}j}^{\bullet},\quad \dot{S}_{\mathrm{I}jl}=K\dot{w}_{\mathrm{I}nn}\delta_{jl}+2G(\dot{w}_{\mathrm{I}jl}-{}^1/_3\dot{w}_{\mathrm{I}nn}\delta_{jl})$$

$$\dot{S}_{\mathrm{II}jl}=K(\dot{w}_{\mathrm{II}nn}-\alpha_{\mathrm{II}}\theta^{\bullet(\infty)})\delta_{jl}+2G(\dot{w}_{\mathrm{II}jl}-{}^1/_3\dot{w}_{\mathrm{II}nn}\delta_{jl}) \tag{5.3}$$

Здесь для удобства введены эквивалентные коэффициенты температурного расширения

$$\alpha_{\mathrm{II}}^{(e)}=\alpha^{(e)}+\frac{4}{3}\frac{G^{(e)}}{K^{(e)}}\frac{U_{nn}^{(i)}}{\theta^{\bullet(\infty)}},\quad \alpha_{\mathrm{II}}^{(i)}=\frac{4}{3}\frac{G^{(i)}}{K^{(i)}}\frac{U_{nn}^{(i)}}{\theta^{\bullet(\infty)}}, \tag{5.4}$$

очевидно, не зависящие от координат. Множители при $U_{nn}^{(i)}/\theta^{\bullet(\infty)}$ зависят только от соответствующих коэффициентов Пуассона (можно считать $\theta^{\bullet(\infty)}\neq0$; в противном случае решение находится как описано в п. 2).

Из (5.1), (5.3) имеем

$$S_{jl}^{\bullet\prime}=\dot{S}_{\mathrm{I}jl}+\dot{S}_{\mathrm{II}jl}+K\alpha_{\mathrm{II}}\theta^{\bullet(\infty)}\delta_{jl} \tag{5.5}$$

Граничные условия (5.2) будут удовлетворены, если

$$w_{\mathrm{I}j}^{\bullet(e)}=w_{\mathrm{I}j}^{\bullet(i)},\quad (S_{\mathrm{I}jl}^{\bullet(e)}-S_{\mathrm{I}jl}^{\bullet(i)})\nu_l=0,\quad \dot{w}_{\mathrm{I}jl}(\infty)=w_{jl}^{\bullet\prime}(\infty)-{}^1/_2\alpha_{\mathrm{II}}^{(e)}\theta^{\bullet(\infty)}\delta_{jl} \tag{5.6}$$

$$w_{\mathrm{II}j}^{\bullet(e)}=w_{\mathrm{II}j}^{\bullet(i)},\quad (S_{\mathrm{II}jl}^{\bullet(e)}-S_{\mathrm{II}jl}^{\bullet(i)})\nu_l=0,\quad \dot{w}_{\mathrm{II}jl}(\infty)={}^1/_3\alpha_{\mathrm{II}}^{(e)}\theta^{\bullet(\infty)}\delta_{jl} \tag{5.7}$$

Таким образом, задача о нахождении $w_j^{\bullet}$ (см. п. 3) и тем самым задача (1.6)—(1.8) будут решены, если будут найдены $w_{\mathrm{I}j}^{\bullet}$ и $w_{\mathrm{II}j}^{\bullet}$, удовлетворяющие (при подстановке их вместо u_j) уравнениям (1.6) с нулевой правой частью и граничным условиям (5.6), (5.7). Но, очевидно, задача для $w_{\mathrm{I}j}^{\bullet}$ представляет собой задачу теории упругости об эллипсоидальной неоднородности, находящейся в однородном поле скоростей деформаций, а задача для $w_{\mathrm{II}j}^{\bullet}$ — задачу термоупругости об однородном нагреве материала с эллипсоидальной неоднородностью. В результате дело свелось к той же ситуации, которая была рассмотрена в п. 2.

Для обеих задач в соответствующих решениях [4] смещения, деформации и напряжения должны быть заменены на скорости их изменения, причем в первой, если воспользоваться обозначениями [4], принимается $e_{jl}^{\bullet A}=w_j^{\bullet\prime}(\infty)-{}^1/_3\alpha_{\mathrm{II}}^{(e)}\theta^{\bullet(\infty)}\delta_{jl}$ или (см. (5.1)—(5.6)):

$$p_{jl}^{\bullet A}=\dot{S}_{\mathrm{I}jl}(\infty)=\sigma_{jl}^{\bullet(\infty)}+2G^{(e)}(U_{jl}^{(i)}-U_{nn}^{(i)}\delta_{jl}) \tag{5.8}$$

а во второй принимается (ср. (2.1)):

$$e_{jl}^{T*}=\frac{1}{3}(\alpha_{\mathrm{II}}^{(i)}-\alpha_{\mathrm{II}}^{(e)})\theta^{\bullet(\infty)}\delta_{jl}=\frac{1}{3}\left[\frac{4}{3}\left(\frac{G^{(i)}}{K^{(i)}}-\frac{G^{(e)}}{K^{(e)}}\right)U_{nn}^{(i)}-\alpha^{(e)}\theta^{\bullet(\infty)}\right]\delta_{jl} \tag{5.9}$$

Решение задачи (1.6)—(1.8) имеет вид (см. (3.1), (3.2), (5.1), (5.3), (5.5)):

$$u_j^{\bullet}=w_{\mathrm{I}j}^{\bullet}-w_{jl}^{\bullet(\beta)}x_l+w_{\mathrm{II}j}^{\bullet}+\eta_j^{\bullet} \tag{5.10}$$

$$\sigma_{jl}^{\bullet}=S_{\mathrm{I}jl}^{\bullet}-2Gw_{jl}^{\bullet(\beta)}-K\theta^{\bullet(\infty)}[\alpha(1-H)-\alpha_{\mathrm{II}}]\delta_{jl}+S_{\mathrm{II}jl}^{\bullet}+q_{jl}^{\bullet} \tag{5.11}$$

Асимптотика $u_j^{\bullet}$ и $\sigma_{jl}^{\bullet}$ на больших расстояниях от неоднородности находится по асимптотике, приведенной в [4], и асимптотике частного решения, находимой по (4.22), (4.1), (4.2) с использованием формул (3.23), (3.24) из [5].

Из однородности $q_{js}^{\cdot(i)}$ (см. (4.25)) и результатов [4] следует, что скорость изменения напряжений внутри эллипсоидальной неоднородности не зависит от координат. Это позволяет (см. [6]) обобщить проведенное рассмотрение также на случай нелинейных определяющих уравнений внутри неоднородности.

6. Пример. Частными случаями рассмотренной задачи является задача для сферической, цилиндрической, иглообразной и трещинообразной неоднородностей. Рассмотрим случай податливой сферической неоднородности, ведущей себя как пора ($m^{(i)}\zeta^{(i)}\ll m^{(e)}\zeta^{(e)}$). Предположим сначала, что приложенные напряжения отсутствуют. Электрическое поле будем считать направленным по оси x_3 (полярная ось), обозначим его напряженность через E. Учитывая, что для сферической неоднородности $I_j=4\pi/3$, а D_{jhln} со всеми одинаковыми индексами равны $8\pi/15$ и с индексами, отличающимися при переходе от первой пары ко второй, равны $-4\pi/15$ (свойства и частные выражения для $I_a\ldots$, $I_{aa}I_{ab}\ldots$ см. в [1, 4]), из (4.24) находим

$$U_{33}^{(i)}-U_{11}^{(i)}=-m^{(e)}\zeta^{(e)}E^2A,\quad A=1-\frac{1}{5}\left|\frac{3\varepsilon^{(e)}}{2\varepsilon^{(e)}+\varepsilon^{(i)}}\right|^2\left(2\,\mathrm{Re}\frac{\varepsilon^{(i)}}{\varepsilon^{(e)}}+3\right) \tag{6.1}$$

При этом не обращаются тождественно в нуль только $U_{11}^{(i)}=U_{22}^{(i)}$ и $U_{33}^{(i)}$. Очевидно, в рассматриваемом случае $S_{\mathrm{II}jl}=0$ и начальное состояние ненапряженное.

Из последней формулы на с. 128 [4] (сферическая пора), (5.8) и формулы (5.11), подставляя в нее значения остальных величин, выполняя интегрирование по времени и переходя к сферическим координатам с углом δ, отсчитываемым от полярной оси, и долготой ψ для единственных, не обращающихся тождественно в нуль на границе поры компонент напряжения $\sigma_{\delta\delta}^{(\mathrm{г})}$, $\sigma_{\psi\psi}^{(\mathrm{г})}$, находим

$$\begin{aligned}\sigma_{\delta\delta}^{(\mathrm{г})}&=-\frac{\sigma_*}{1-\mu}\left[\frac{5}{7-5\mu}(2-\mu-3\cos^2\delta)A+B\cos^2\delta+C\right]\\ \sigma_{\psi\psi}^{(\mathrm{г})}&=\frac{\sigma_*}{1-\mu}\left[\frac{5}{7-5\mu}(1-2\mu+3\mu\cos^2\delta)A-B\cos^2\delta-C\right]\\ B&=\left(\left|\frac{\varepsilon^{(i)}}{\varepsilon^{(e)}}\right|^2-1\right)\left|\frac{3\varepsilon^{(e)}}{2\varepsilon^{(e)}+\varepsilon^{(i)}}\right|^2\end{aligned} \tag{6.2}$$

$$C=\left|\frac{3\varepsilon^{(e)}}{2\varepsilon^{(e)}+\varepsilon^{(i)}}\right|^2-1,\qquad \sigma_*={}^1\!/_3E_Y^{(e)}\,\alpha^{(e)}\zeta^{(e)}\int\limits_0^t E^2(t)\,dt$$

Здесь μ — коэффициент Пуассона материала; σ_* — абсолютная величина напряжения, которое возникло бы в отсутствие неоднородности, если бы при прочих неизменных условиях материал не имел возможности деформироваться в каком-либо одном направлении; $E_Y^{(e)}$ — модуль Юнга.

Для температуры $\theta^{(\mathrm{г})}$ на внешней стороне границы поры из (4.26), (4.27) с учетом (4.10), (1.4) находим

$$\theta^{(\mathrm{г})}=\theta^{(\infty)}\left[\left(\left|\frac{\varepsilon^{(i)}}{\varepsilon^{(e)}}\right|^2-1\right)\cos^2\delta+1\right]\left|\frac{3\varepsilon^{(e)}}{2\varepsilon^{(e)}+\varepsilon^{(i)}}\right|^2 \tag{6.3}$$

где $\theta^{(\mathrm{г})}$, $\theta^{(\infty)}$ отсчитываются от начальной температуры. Формулы для случая, когда имеются только токи проводимости и нагрев вызывается мгновенной мощностью тепловыделения (см. конец п. 1), получаются отсюда, если заменить $\varepsilon^{(i)}/\varepsilon^{(e)}$ на $\gamma_0^{(i)}/\gamma_0^{(e)}$ и положить $\zeta^{(e)}=\gamma_0^{(e)}/(\rho^{(e)}c_\theta^{(e)})$, где γ_0 — постоянная проводимость.

В частности, в том случае, если внутри поры проводимость равна нулю, формулы (6.2), (6.3) принимают вид

$$\sigma_{\delta\delta}^{(г)} = -\frac{3\sigma_*}{4(1-\mu)(7-5\mu)}[(7-6\mu)-(14-15\mu)\cos^2\delta]$$

$$\sigma_{\psi\psi}^{(г)} = -\frac{3\sigma_*}{4(1-\mu)(7-5\mu)}[(14-13\mu)-(21-22\mu)\cos^2\delta] \qquad (6.4)$$

$$\theta^{(г)}=2{,}25\,\theta^{(\infty)}\sin^2\delta$$

Предположим теперь, что имеются также приложенные напряжения $\sigma_{jl}^{(\infty)}$. Рассмотрим случай $\sigma_{11}^{(\infty)} = \sigma_{22}^{(\infty)} = \sigma_\perp$, $\sigma_{33}^{(\infty)} = \sigma_\parallel$. Тогда к (6.2) надо прибавить соответственно выражения [4, с. 128]:

$$\sigma_{\delta\delta A}^{(г)} = \frac{3}{2(7-5\mu)}[-2\sigma_\perp + (9-5\mu)\sigma_\parallel + 10(\sigma_\perp-\sigma_\parallel)\cos^2\delta]$$

$$\sigma_{\psi\psi A}^{(г)} = \frac{3}{2(7-5\mu)}[(8-10\mu)\sigma_\perp - (1-5\mu)\sigma_\parallel + 10\mu(\sigma_\perp-\sigma_\parallel)\cos^2\delta] \qquad (6.5)$$

Из (6.4) видно, что в области перегрева (по отношению к температуре $\theta^{(\infty)}$ вдали от неоднородности) вблизи экватора ($\delta\simeq\pi/2$) напряжения $\sigma_{\delta\delta}^{(г)}$, $\sigma_{\psi\psi}^{(г)}$ сжимающие, а в областях недогрева у полюсов эти напряжения растягивающие.

Сочетание действия повышенной температуры у границы поры с действием здесь касательных напряжений может облегчать переход к пластическому деформированию материала у границы поры (если для данного материала такой переход возможен).

Явления такого типа, происходящие на порах и других дефектах, могут оказаться важными в процессах разрушения и обработки материалов давлением с применением электрических полей.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Электродинамика сплошных сред. М.: Физматгиз, 1959. 532 с.
2. *Франк Ф., Мизес Р.* Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики. Л. – М.: ОНТИ, 1937. 998 с.
3. *Снеддон И. Н., Берри Д. С.* Классическая теория упругости. М.: Физматгиз, 1961. 219 с.
4. *Эшелби Дж.* Континуальная теория дислокаций. М.: Изд-во иностр. лит., 1963. 247 с.
5. *Салганик Р. Л.* Разогрев материала с эллипсоидальной неоднородностью вследствие электрических потерь. – Изв. АН СССР. МТТ, 1980, № 6, с. 98–109.
6. *Lin T. H.* Physical theory of plasticity. – Advances in Applied Mechanics, 1971, v. 11, p. 255–311. – Рус. перев.: Механика: Сб. перев. иностр. статей. М.: Мир, 1976, с. 7–68.

Москва

Поступила в редакцию
29.IV.1982