

УДК 539.3

ОПТИМИЗАЦИЯ В ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ С НЕИЗВЕСТНЫМИ ГРАНИЦАМИ

БАНИЧУК Н. В., БЕЛЬСКИЙ В. Г., КОБЕЛЕВ В. В.

Исследуются задачи оптимизации форм упругих тел. В качестве оптимизируемых критериев рассматриваются интегральные и локальные функционалы. Представлена новая методика вывода необходимых условий оптимальности для задачи с неизвестными границами при произвольных краевых условиях. При выводе существенно используется формула, выражающая вариацию функционала через вариации границ и функций состояния. Предложен алгоритм численного определения оптимальных форм двумерных упругих тел, основанный на необходимых условиях оптимальности и анализе чувствительности. Алгоритм является итерационным и заключается в последовательном решении прямых задач определения напряженно-деформированного состояния по методу конечных элементов и построении улучшающих вариаций формы области, занимаемой упругим телом. Для различных случаев нагружения численно определены оптимальные формы плоских элементов конструкций.

1. Постановка задачи оптимизации. Рассмотрим упругое деформируемое тело, занимающее область Ω с границей Γ . На части границы Γ_u заданы перемещения $u_i = U_i$, а на части Γ_σ — нагрузки ($\Gamma = \Gamma_u + \Gamma_\sigma$): $\sigma_{ij}n_j = T_i$, где n_j — компоненты вектора единичной нормали к поверхности Γ ($n_i n_i = 1$).

Латинские индексы принимают значения 1, 2, 3; по дважды повторяющимся индексам производится суммирование. Предполагая выполненными условия статики и малости деформаций, запишем основные уравнения

$$\sigma_{ij,j} + q_i = 0, \quad \sigma_{ij} = 1/2 A_{ijkl} (u_{k,i} + u_{l,k}) \quad (1.1)$$

где A_{ijkl} — упругие модули, σ_{ij} — компоненты тензора напряжений, u_k — перемещения, q_i — объемные силы, действующие на тело; индекс после запятой означает дифференцирование по соответствующей координате.

Напряженно-деформированное состояние тела (элемента конструкции) оценивается функционалом

$$I = \int_{\Omega} F(\sigma_{ij}, u_k) d\Omega \quad (1.2)$$

где F — заданная функция переменных u_k , σ_{ij} . Задача оптимизации заключается в отыскании варьируемой части границы Γ , минимизирующей объем упругого тела

$$V = \int_{\Omega} d\Omega \rightarrow \min_{\Gamma} \quad (1.3)$$

и такой, что удовлетворяются ограничения на напряженно-деформированное состояние $I \leq I_0$, где I_0 — заданная константа.

В (1.3) допускаются вариации границы, не изменяющие связности (топологического класса) области Ω , при этом для каждой допустимой

конфигурации области на границе Γ определены функции U_i и T_i . Приведем пояснения. Конкретным заданием функции F можно удовлетворить локальные ограничения на прочность и жесткость. Учет указанных ограничений осуществляется с использованием соотношений между нормами в пространстве непрерывных функций и нормами в пространстве функций, интегрируемых с p -й степенью. Так, ограничение по прочности $\max_{\Omega} g(\sigma_{ij}) \leq \sigma_T^2$ можно при достаточно больших p заменить ограничением

$$\frac{1}{V} \int_{\Omega} |g(\sigma_{ij})|^p d\Omega \leq \sigma_T^{2p}$$

В этом случае в (1.2) следует считать $F = |g(\sigma_{ij})|^p/V$, а в ограничении положить $I_0 = \sigma_T^{2p}$. Ограничение на жесткость (максимальную величину смещения) $\max_{\Omega} |u_i| \leq W_i$ может быть приближенно заменено ограничением

$$\frac{1}{V} \int_{\Omega} |u_i|^p d\Omega \leq W_i^p$$

Для включения этого ограничения в (1.2) и условие $I \leq I_0$ достаточно положить $F = |u_i|^p/V$, $I_0 = W_i^p$.

Отметим некоторые работы, посвященные отысканию форм упругих элементов конструкций. Существенным моментом исследования задач оптимизации конструкций с неизвестными границами является вывод условий оптимальности — дополнительных соотношений, служащих для определения неизвестных границ. В этом направлении одним из первых результатов был вывод в [1] условия оптимальности для участка границы, свободного от прикладываемых нагрузок, в случае интегрального критерия качества — податливости деформируемого тела. Установлено, что минимум податливости реализуется, если на рассматриваемом участке границы энергия упругих деформаций постоянна. Условие минимума функционала податливости при варьировании свободных границ было получено впоследствии другим способом [2], и показано, что постоянство плотности энергии деформаций является не только необходимым, но и достаточным условием оптимальности. Случай, когда на оптимизируемой границе заданы перемещения, проанализирован в [3]. Если вдоль искомой границы вектор смещений постоянен, то условие оптимальности приводится к тому же виду, что и в случае свободной границы.

Использование указанных условий оптимальности неизвестных границ приводит к замкнутым обратным задачам и позволяет в ряде случаев в принципе определить форму оптимальных тел. Однако решение этих задач связано с известными трудностями, поэтому оптимальные формы найдены лишь для небольшого числа задач и главным образом в последние годы. Из задач с интегральным критерием качества наиболее детальное исследование получила задача отыскания формы поперечного сечения скручиваемого цилиндрического стержня из условия максимума жесткости на кручение [3–8]. Близкие вопросы рассматривались в [9, 10].

Более сложным оказывается решение задач оптимизации с неизвестными границами и локальными критериями качества. К этим задачам приходим при отыскании форм упругих тел, обладающих минимальной концентрацией напряжений. В связи с проблемой предельного снижения концентрации напряжений наиболее полно изучены задачи оптимизации форм отверстий в пластинках, работающих на растяжение и изгиб, в сплошных телах [11–17]. В частности, установлено, что оптимальными являются отверстия с равнонапряженными границами. Разработка методов анализа чувствительности и эффективных численных алгоритмов решения задач оптимизации конструкций начата в [18–22]. Подробное изложение результатов по задачам оптимального проектирования с неизвестными границами содержится в [23].

2. Необходимые условия оптимальности. Для сформулированной задачи оптимизации запишем функционал Лагранжа

$$J = \int_{\Omega} f d\Omega, \quad f = 1 + \psi_i(\sigma_{ij,j} + q_i) + \chi_{ij}(\sigma_{ij} - A_{ijkl} u_{k,l}) + \lambda F \quad (2.1)$$

где λ — множитель Лагранжа. Подынтегральная функция в (2.1) зависит от переменных состояния σ_{ij} , u_k и сопряженных функций χ_{ij} , ψ_k и их производных по пространственным переменным. Из неизвестных функций, входящих в выражение для f , составим 18-мерный вектор $v = \{u_1, u_2, u_3,$

$\sigma_{11}, \sigma_{12}, \dots, \sigma_{33}, \psi_1, \psi_2, \psi_3, \chi_{11}, \chi_{12}, \dots, \chi_{33}$. Здесь учтено, что $\chi_{ij} = \chi_{ji}$, $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$.

Если в области Ω компоненты векторной функции v_α удовлетворяют уравнениям Эйлера

$$\partial f / \partial v_\alpha - (\partial / \partial x_i) (\partial f / \partial v_{\alpha,i}) = 0 \quad (\alpha = 1, \dots, 18) \quad (2.2)$$

то, как показано в [3], выражение для вариации δJ функционала (2.1) через вариации δv_α вектора v_α и вариации границы δx_i записывается в виде

$$\delta J = \int_{\Gamma} \frac{\partial f}{\partial v_{\alpha,i}} n_i (\delta v_\alpha - v_{\alpha,j} \delta x_j) d\Gamma + \int_{\Gamma} n_j \delta x_j f d\Gamma \quad (2.3)$$

Полагая в (2.2) $v_\alpha = u_i$, получаем сопряженное уравнение для переменной ψ_i :

$$\psi_{i,j} = \chi_{ij} + \lambda \partial F / \partial \sigma_{ij} \quad (2.4)$$

а подстановка $v_\alpha = \sigma_{ij}$ дает уравнение для χ_{kl} :

$$A_{ijkl} \chi_{kl,j} + \lambda \partial F / \partial u_i = 0 \quad (2.5)$$

Из условия обращения в нуль первого интеграла в (2.3) на участке, где не заданы компоненты векторной функции v_α , вытекает $(\partial f / \partial v_{\alpha,i}) n_i = 0$.

Эти равенства представляют собой условия трансверсальности в рассматриваемой вариационной задаче и играют роль краевых условий для сопряженных переменных. Так, в силу произвольности величин σ_{kl} на части границы Γ_u имеем $(\partial f / \partial \sigma_{kl,j}) n_j = \psi_{kl} n_j = 0$, а следовательно, $\psi_{kl} = 0$ на Γ_u и на границе Γ_σ , где не фиксирована функция u_i , $A_{ijkl} \chi_{kl,j} n_j = 0$ на Γ_σ .

В выражении (2.3) для вариации функционала J остаются члены, обусловленные вариацией границы $\delta x_i = n_i t$. С учетом (2.3), где t — произвольная функция, определенная на поверхности Γ , и условий на Γ_u , Γ_σ получим выражение, связывающее вариацию функционала с вариациями формы тела

$$\begin{aligned} \delta J = \int_{\Gamma_\sigma} (f - \psi_{i,j} \sigma_{ij} - \psi_i \sigma_{ij,j} + \psi_{i,j} T_i n_j + \\ + \psi_i T_i n_j - 2H \psi_i T_i) t d\Gamma + \int_{\Gamma_u} [f + (u_i - U_i)_{,j} \chi_{mn} A_{mnik} n_k n_j] t d\Gamma \end{aligned} \quad (2.6)$$

где H — средняя кривизна поверхности Γ .

При выводе (2.6) считается, что величины U_i и T_i заданы как функции пространственных координат $U_i(x_k)$, $T_i(x_k)$ и при вариации формы области вариации краевых условий записываются в виде $\delta u_i = U_{i,j} \delta x_j$, $\delta(\sigma_{ij} n_j) = n_j \delta \sigma_{ij} + \sigma_{ij} \delta n_j = T_{i,j} \delta x_j$. Вариация нормали δn_j выражается через производные величины t на поверхности и коэффициенты первой квадратичной формы варьируемой поверхности. Слагаемое, содержащее δn_j , затем преобразуется по частям в поверхностном интеграле. В полученном выражении с использованием уравнений Гаусса выделяется член, содержащий кривизну поверхности H .

Формула (2.6) определяет чувствительность оптимизируемого функционала к изменениям управляющих переменных (форма границы) и позволяет на ее основе развить численные методы последовательной оптимизации. Из (2.6) непосредственно вытекают необходимые условия оптимальности, служащие для определения искоемых частей границы Γ_u и Γ_σ . Введем функции $\xi_{ij} = A_{ijkl} \chi_{kl}$ (сопряженные напряжения). С учетом сделанной замены краевая задача для сопряженной переменной принимает

вид

$$\xi_{ij,j} = -\lambda \partial F / \partial u_i, \quad A_{ijkl} \psi_{i,j} = \xi_{kl} + \lambda A_{ijkl} \partial F / \partial \sigma_{ij} \quad (2.7)$$

$$\psi_i = 0 \text{ на } \Gamma_u, \quad \xi_{ij} n_j = 0 \text{ на } \Gamma_\sigma$$

Условия оптимальности записываются в форме

$$1 + \lambda F + (u_i - U_i)_{,j} \xi_{ij} = 0 \text{ на } \Gamma_u \quad (2.8)$$

$$1 + \lambda F - (\psi_i \sigma_{ij})_{,j} + (\psi_j T_i)_{,k} n_k - 2H \psi_i T_i = 0 \text{ на } \Gamma_\sigma$$

3. Численное решение задачи оптимизаций на основе метода конечных элементов (МКЭ) и алгоритма последовательной оптимизации. Применим полученные формулы для отыскания оптимальной формы тела, находящегося в условиях плоского напряженного или плоского деформированного состояния. Считаем, что индексы в формулах пп. 1–3 принимают значения 1 и 2 (U_i и T_i – заданные функции параметра кривой Γ , ограничивающей плоскую область Ω). В (1.4) ненулевые компоненты тензора модулей упругости A_{ijkl} для изотропного тела равны $A_{1111} = A_{2222} = 2\mu + l$, $A_{1122} = A_{2211} = l$, $A_{1212} = 2\mu$. Здесь $l = \lambda$ для случая плоской деформации, $l = = 1/2(2\mu - \lambda)\lambda/\mu$ для плоского напряженного состояния, λ, μ – коэффициенты Ламе материала. Рассматривается ограничение по прочности Мизеса

$$g = 3/2 \sigma_{ij} \sigma_{ij} + (S - 1/2) \sigma_{ii} \sigma_{jj} \quad (3.1)$$

Для обобщенного плоского напряженного состояния $S = 0$, для плоской деформации $S = v^2 - v$, $v = 1/2\lambda/(\lambda + \mu)$.

Для применения МКЭ тело разбивается на совокупность четырехугольных конечных элементов, каждый из которых состоит из четырех треугольников (комбинированный четырехугольный элемент). В треугольниках базисные функции линейные. Матрица жесткости формируется с использованием вариационных принципов, а полученная система линейных уравнений решается методом исключения Гаусса. Граница упругого тела аппроксимируется ломаной, причем вектор вариации границы $\delta x_i(s)$ представлялся в виде линейной комбинации $\delta x_i(s) = \delta x_{i\alpha} b_\alpha(s)$ ($\alpha = 1, \dots, m$), где $b_\alpha(s)$ – базисные функции, определенные на границе упругого тела. Система векторов нагрузок на варьируемой границе связана с координатами узлов конечных элементов, которые при вариации границы перемещаются вдоль заданных прямых. Внутренние узлы сетки конечных элементов при вариации границы также смещались вдоль заданных направлений. Метод численного решения задачи оптимизации заключается в последовательных приближениях к оптимальному решению.

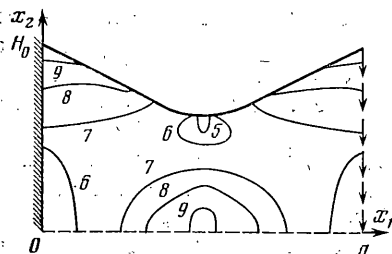
На одной типичной итерации решаются прямая и сопряженная задачи, заключающиеся в отыскании функций состояния и сопряженных переменных, строится улучшающая вариация границы и формируется новая сетка конечных элементов. При этом исходная задача условной минимизации (т. е. с учетом ограничения ($I \leq I_0$)) заменялась последовательностью задач безусловной минимизации. В задачах безусловной минимизации составлен функционал Лагранжа, в котором условия типа неравенства $I \leq I_0$ приписаны к (1.3) со штрафом, имеющим смысл множителя Лагранжа. Градиент этого функционала вычислялся при помощи условий оптимальности (2.8). Альтернативный способ построения улучшающих вариаций с использованием метода функций Лагранжа [24] не гарантирует получения решения.

Отметим, что в [21] получены необходимые условия оптимальности, в которых отсутствует слагаемое, порождаемое вариацией прочностного ограничения по управляющим параметрам (формула (6.3) в [21]); этот член не возникает в условиях оптимальности, когда условие по прочности выполнено. При решении задачи оптимизации методом штрафных функций формулы [21] в случае нарушения условия прочности не соответствуют шагу по градиенту.

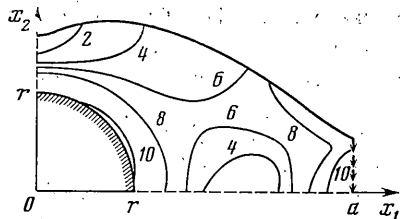
4. Результаты расчетов. При помощи указанного алгоритма были рассчитаны на ЭВМ оптимальные формы плоских элементов конструкций. На фиг. 1–4 показаны изолинии интенсивности напряжений $g^{1/2}$ в оптимальных элементах. Числа на изолиниях соответствуют величине $10g^{1/2}/\sigma_T$. В силу симметрии изображены четверти областей, отвечающие $x_2 \geq 0$, $0 \leq x_1 \leq a$.

Разыскивается оптимальная форма сплошной пластины, заключенной между двумя недеформируемыми прямолинейными направляющими. Пластина приварена к направляющим (т. е. на участках приварки Γ_u имеем $u_1 = u_2 = 0$), а свободная граница (линии, соединяющие крайние точки приварки) варьируется. Вдоль прямой $x_1 = a$ приложены равномерно распределенные усилия в направлении оси x_2 , причем их равнодействующая T постоянна.

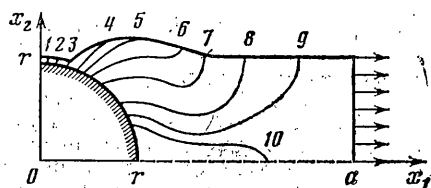
На фиг. 1 представлено очертание оптимальной пластины. При вычислениях принималось $T/(\sigma_T a) = 0,185$, $E/\sigma_T = 10^3$, $\nu = 0,3$. Расчеты показывают, что изделие оптимальной формы имеет сужение при $x_1 = a/2$, $h = 0,65H_0$. Здесь E — модуль Юнга, ν — коэффициент Пуассона, h и H_0 — высоты сечений пластины плоскостями $x_1 = a/2$ и $x_1 = a$ соответственно. Размеры сечений изделия плоскостями $x_1 = 0$ и $x_1 = a$ практически совпадают и равны $0,55a$. Максимум интенсивности напряжений достигается на границе тела при $x_1 = 0$ и в окрестности точек $x_2 = 0$, $x_1 = a/2$. Оптимальная форма рычага, передающего заданное усилие на жесткий круговой вал, изображена на фиг. 2. Рычаг жестко соединен с валом ($u_1 = u_2 = 0$ при $x_1^2 + x_2^2 = r^2$) и нагружен распределенными на прямолинейном участке границы усилиями, причем создаваемый ими крутящий момент фиксирован. Форма свободной поверх-



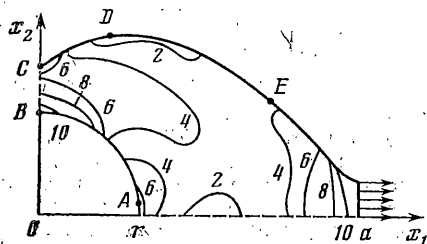
Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

ности и размеры участка приложения усилий d определялись в результате расчетов. При решении задачи принимались следующие значения параметров: $r = 0,32a$, $T_2 d / \sigma_T a = 0,1$.

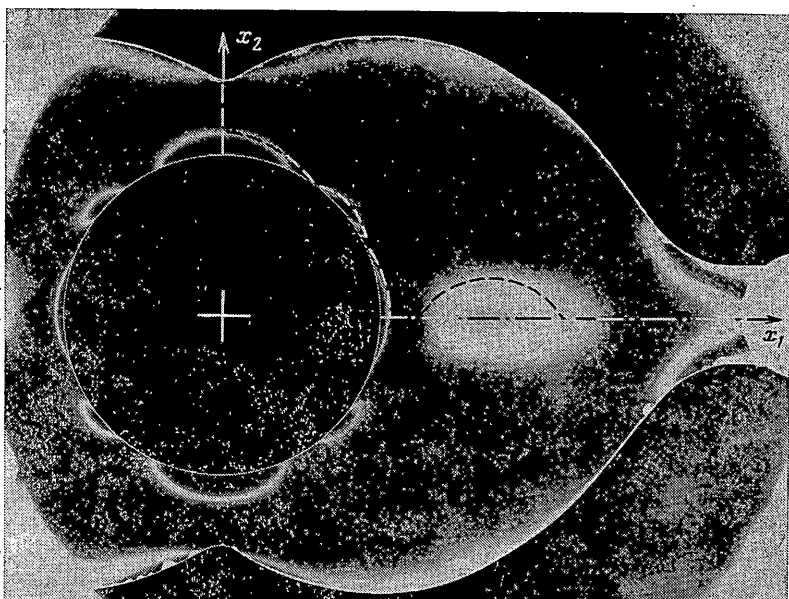
Интенсивность напряжений максимальна в зонах сопряжения рычага с валом и приложения нагрузки.

В следующем примере полоса, передающая усилие на жесткий вал радиуса r , нагружена растягивающим усилием заданной интенсивности. Усилие создается равномерно распределенной по участку границы Γ_0 нагрузкой T_1 . Как и в предыдущем примере, варьируется форма свободной поверхности и размеры участка приложения нагрузки. На фиг. 3 показано оптимальное распределение материала вдоль полосы. Вдали от вала напряженное состояние близко к однородному и оптимальная ширина полосы постоянна. Вблизи линии закрепления ширина полосы увеличивается и снижается максимальная интенсивность напряжений. Область концентрации напряжений вытянута от границы вала вдоль оси Ox_1 . В расчетах принималось $r = 0,32a$, $T_1 d / \sigma_T a = 0,348$.

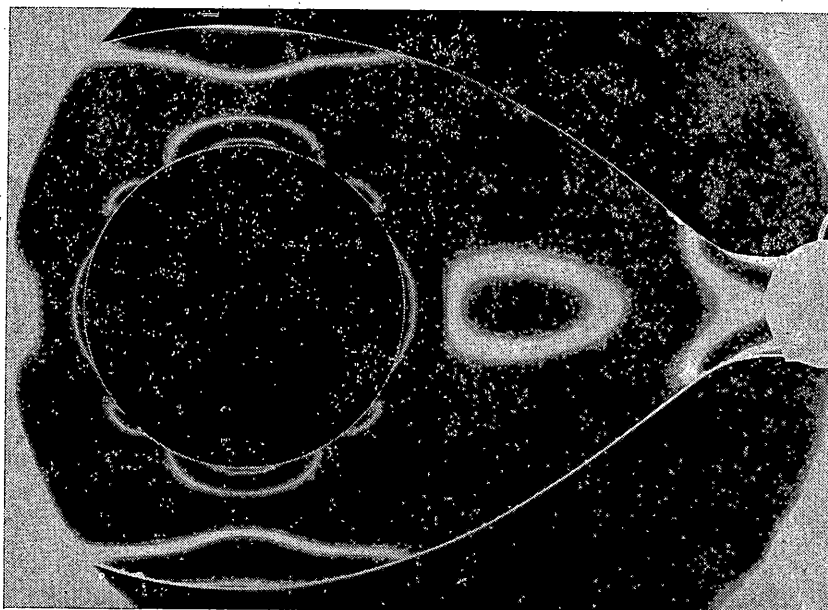
Определим внешнее очертание упругой полосы с круговым отверстием. Элемент растягивается распределенными по прямолинейному участку границы ($x_1 = \pm a$, $|x_2| \leq d$) нагрузками T_1 , статически эквивалентными заданной силе P ($T_1 d = P = \text{const}$). Поверхность отверстия радиуса r свободна от напряжений. Оптимальная форма растягиваемого элемента с отверстием приведена на фиг. 4. Расчетные параметры удовлетворяли соотношениям $r/a = 0,32$, $P/\sigma_T a = 0,1$.

Максимум компоненты напряжения σ_{22} достигается в точке A (и равняется 60% максимально допустимого напряжения). Основной вклад в величину интенсивности дает напряжение σ_{11} . Максимальное значение напряжения σ_{11} достигается в районе точки B . В точке C , лежащей на свободной поверхности элемента, напряжение равно 55% максимальной величины. Вариации границы, ослабляющие деталь на участке границы DE , приводят к увеличению напряжения в окрестности точки B и к падению интенсивности напряжений в точке C , вплоть до появления в окрестности точки C сжимающих напряжений. Это и обуславливает максимальное расширение детали на участке границы DE .

Для проверки результатов расчета напряжения определялись экспериментально методом фотоупругости. Из оптически активного материала были изготовлены модели



Фиг. 5



Фиг. 6

оптимального (фиг. 5) и «эталонного» (фиг. 6) образцов. При просвечивании поляризованным светом нагруженных моделей на фотопластинке фиксировались картины интерференционных полос, которые представляют собой изолинии разности главных напряжений. На свободной границе разность главных напряжений равна интенсивности напряжений.

Пунктирными линиями на фиг. 5 изображены изолинии разности главных напряжений, рассчитанные для оптимального образца с использованием МКЭ. Приведенные экспериментальные данные согласуются с теоретическими результатами: линии разности главных напряжений, построенные с использованием рассчитанных значений напряжений, совпадают с экспериментальными кривыми.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Wasiutynski Z.* On the congruency of the forming according to the minimum potential energy with that according to the equal strength.—Bull. Acad. polon. sci. Ser. Sci. techn., 1960, v. 8, No. 6, p. 259—268.
2. *Прагер В.* Основы теории оптимального проектирования конструкций. М.: Мир, 1977. 109 с.
3. *Баничук Н. В.* Оптимизация форм упругих тел. М.: Наука, 1980. 255 с.
4. *Баничук Н. В.* Об одной вариационной задаче с неизвестной границей и определении оптимальных форм упругих тел.—ПММ, 1975, т. 39, вып. 6, с. 1082—1092.
5. *Куришин Л. М.* К задаче об определении формы сечения стержня максимальной крутильной жесткости.—Докл. АН СССР, 1975, т. 223, № 3, с. 585—588.
6. *Куришин Л. М., Онопrienko П. Н.* Определение форм двусвязных сечений стержней максимальной крутильной жесткости.—ПММ, 1976, т. 40, вып. 6, с. 1078—1084.
7. *Куришин Л. М., Расторгуев Г. И.* К задаче о подкреплении контура отверстия в пластинке безмоментным упругим стержнем.—ПММ, 1980, т. 44, вып. 5, с. 905—915.
8. *Na Moon-Soo, Kikuchi Noboru, Taylor J. E.* Shape optimization for elastic torsion bars.—In: Optimization methods in structural design. Zürich: Bibliographisches Inst. Mannheim, 1983, p. 216—223.
9. *Cea J.* Identification de Domaines.—In: Lect. Notes in Computer Sci. V. 3. B.: Springer, 1973, p. 92—102.
10. *Gurvitch E. L.* On isoperimetric problems for domains with partly known boundaries.—J. Optimiz. Theory and Appl., 1976, v. 20, No. 1, p. 65—79.
11. *Wheeler L.* On the role of constants-stress surfaces in the problem of minimizing elastic stress concentration.—Internat. J. Solids and Struct., 1976, v. 12, No. 11, p. 779—789.
12. *Баничук Н. В.* Задача оптимизации формы отверстия в пластине, работающей на изгиб.—Изв. АН СССР. МТТ, 1977, № 3, с. 81—88.
13. *Баничук Н. В.* Условия оптимальности в задаче отыскания форм отверстий в упругих телах.—ПММ, 1977, т. 41, вып. 5, с. 920—925.
14. *Виздвергауз С. Б.* Об одном случае обратной задачи двумерной теории упругости.—ПММ, 1977, т. 41, вып. 5, с. 902—908.
15. *Хугорянский Н. М.* Некоторые обратные и оптимизационные плоские задачи теории упругости.—Прикладные проблемы прочности и пластичности: Сб. статей. Горький, Горьковский ун-т, 1977, вып. 6, с. 81—87.
16. *Хугорянский Н. М.* К решению некоторых пространственных и плоских задач оптимизации форм упругих тел.—Прикладные проблемы прочности и пластичности: Сб. статей. Горький, Горьковский ун-т, 1978, вып. 8, с. 66—74.
17. *Виздвергауз С. Б.* Обратная задача трехмерной теории упругости.—Изв. АН СССР. МТТ, 1983, № 2, с. 90—93.
18. *Cea J.* Problems of shape optimal design.—In: Proc. Advanced Study Institute, Optimization of Distributed Parameter Structures. Netherlands, Alphen Ann de Rijn: Sijthoff-Nordhoff, 1981, p. 1005—1048.
19. *Yoo Y. M., Haug E. J., Choi K. K.* Shape optimal design of multiple loaded structural components.—In: Optimization methods in structural design. Zürich: Bibliographisches Inst. Mannheim, 1983, p. 250—253.
20. *Tvergaard V.* On the optimum shape of a fillet in a flat bar with restrictions.—In: Proc. of IUTAM Symposium on Optimization in Structural Design. B.: Springer, 1975, p. 181—195.
21. *Троицкий В. А., Петухов Л. В.* Оптимизация формы упругих тел. М.: Наука, 1982. 432 с.
22. *Chun Y. W., Haug E. J.* A gradient projection method for optimizing shape of elastic bodies.—In: Proc. Advanced Study Institute. Optimization of Distributed Parameter Structures. Netherlands, Alphen Ann de Rijn: Sijthoff-Nordhoff, 1981, p. 1269—1284.
23. *Banichuk N. V.* Optimality conditions and analytical methods of shape optimization.—In: Proc. Advanced Study Institute. Optimization of distributed Parameter Structures. Netherlands, Alphen Ann de Rijn: Sijthoff-Nordhoff, 1981, p. 973—1004.
24. *Васильев Ф. П.* Численные методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1980. 520 с.

Москва

Поступила в редакцию
28.VI.1983