

УДК 534.015

К ИССЛЕДОВАНИЮ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ  
СИСТЕМ С НАСЛЕДСТВЕННЫМ ТРЕНИЕМ

МОСКВИН В. Г., СЕМЕНОВ В. А., СМИРНОВ А. И.

Параметрическим колебаниям механических систем посвящена обширная литература. Наиболее подробно разработана теория параметрических колебаний упругих систем под действием периодических [1] и случайных [2] сил. В последние годы появился ряд работ, посвященных исследованию параметрических колебаний вязкоупругих систем [3-5], которые описываются интегродифференциальными уравнениями с периодическими коэффициентами.

В публикуемой работе исследуется конфигурация границ областей неустойчивости линейных вязкоупругих систем с конечным числом степеней свободы при параметрическом возбуждении методом определителей Хилла и методом аппроксимации наследственных ядер суммой экспонент с последующим построением и исследованием матриц монодромии [6]. Применение этих методов позволяет снять ограничения малости коэффициента вязкого трения и параметра возбуждения. Рассматриваются случаи, когда ядро наследственности является как регулярной, так и слабо полярной функциями.

1. Рассмотрим систему, линеаризованные уравнения возмущенного движения которой имеют вид

$$A \frac{dx^2}{dt^2} + 2\gamma\omega_1 \int_{-\infty}^t S(t-\tau) B \frac{dx}{d\tau} d\tau + C(E + 2\mu G \cos \theta t) x = 0 \quad (1.1)$$

Здесь  $x(t)$  — вектор-функция обобщенных координат,  $\gamma$  — коэффициент, характеризующий интенсивность демпфирования,  $\omega_1$  — характерная частота системы,  $\theta$  — частота параметрического возбуждения,  $\mu$  — глубина модуляции,  $S(t-\tau)$  — ядро, характеризующее процесс релаксации (ядро наследственности),  $A, B, C, G$  — квадратные матрицы размерностью  $n \times n$ . Предположим, что матрицы инерционных коэффициентов  $A$ , упругих коэффициентов  $C$  и демпфирования  $B$  — числовые, симметричные и положительно-определенные. Матрица  $G$  — числовая, характеризующая параметрическое воздействие на различные обобщенные координаты.

Следуя [6], будем искать решение уравнения (1.1) в виде ряда

$$x(\tau) = e^{h\tau} \left[ b_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \sin kv\tau + b_k \cos kv\tau) \right] \quad (1.2)$$

где  $\tau = \omega_1 t$ ,  $v = \theta / \omega_1$ ,  $h$  — неизвестный характеристический показатель,  $b_0, a_k, b_k$  — неизвестные векторы.

Подставляя (1.2) в (1.1) и приравнявая коэффициенты при одинаковых функциях времени, приходим к бесконечной системе линейных однородных алгебраических уравнений относительно коэффициентов ряда (1.2):

$$(h^2 E + hWB + C)b_0 + \mu Gb_1 = 0$$

$$\begin{aligned}
&[(h^2 - \nu^2)E + (h\Gamma_{1c} + \nu\Gamma_{1s})B + C]a_1 + \mu Ga_2 + [(h\Gamma_{1s} - \nu\Gamma_{1c})B - 2h\nu E]b_1 = 0 \\
&[(h^2 - \nu^2)E + (h\Gamma_{1c} + \nu\Gamma_{1s})B + C]b_1 + 2\mu Gb_0 + \mu Gb_2 + [2h\nu E + (\nu\Gamma_{1c} - h\Gamma_{1s})B]a_1 = 0 \\
&[(h^2 - k^2\nu^2)E + (h\Gamma_{kc} + k\nu\Gamma_{ks})B + C]a_k + \mu G(a_{k+1} + a_{k-1}) + \\
&\quad + [(h\Gamma_{ks} - \nu k\Gamma_{kc})B - 2hk\nu E]b_k = 0 \\
&[(h^2 - k^2\nu^2)E + (h\Gamma_{kc} + k\nu\Gamma_{ks})B + C]b_k + \mu G(b_{k+1} - b_{k-1}) + \\
&\quad + [2hk\nu E + (k\nu\Gamma_{kc} - h\Gamma_{ks})B]a_k = 0 \quad (k=2, 3, \dots)
\end{aligned} \tag{1.3}$$

$$\Gamma_{kc} = \int_0^\infty S(\omega) e^{-h\omega} \cos k\nu\omega \, d\omega, \quad \Gamma_{ks} = \int_0^\infty S(\omega) e^{-h\omega} \sin k\nu\omega \, d\omega, \quad W = \int_0^\infty S(\omega) e^{-h\omega} \, d\omega \tag{1.4}$$

Записывая условие существования нетривиального решения системы (1.3), получим трансцендентное уравнение относительно показателей:

$$\begin{vmatrix}
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\dots & (h^2 - \nu^2)E + (h\Gamma_{1c} + \nu\Gamma_{1s})B + C & 0 & (h\Gamma_{1s} - \nu\Gamma_{1c})B - 2h\nu E & \dots \\
\dots & 0 & h^2E + hWB + C & \mu G & \dots \\
\dots & 2h\nu E + (\nu\Gamma_{1c} - h\Gamma_{1s})B & 2\mu G & (h^2 - \nu^2)E + (h\Gamma_{1c} + \nu\Gamma_{1s})B + C & \dots \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots
\end{vmatrix} = 0 \tag{1.5}$$

Можно показать, что определитель в уравнении (1.5) является нормальным [1], что позволяет рассматривать в соотношении (1.5) определитель конечного порядка. Если для усеченного уравнения (1.5) будут выполняться условия  $\text{Re } h_j < 0$  ( $j=1, 2, \dots, N$ ), где  $N$  — порядок усеченного определителя, то точка с координатами  $\{\mu, \nu\}$  на плоскости этих параметров будет принадлежать области устойчивости. Если же хотя бы для одного  $j$  окажется, что  $\text{Re } h_j > 0$ , то точка на плоскости параметров будет принадлежать области неустойчивости.

Численная реализация метода сводится к следующему: задаемся значением частоты  $\nu$  и полагаем  $h = ip$ . При фиксированном значении  $p$  определяем значения интегралов в (1.4). Подставляя полученные значения  $W, \Gamma_{kc}, \Gamma_{ks}$  в (1.5), получаем уравнение относительно глубины модуляции  $\mu$ . Если ядро наследственности представимо в виде суммы экспоненциальных функций, систему интегродифференциальных уравнений (1.1) можно свести к системе дифференциальных уравнений [7]. Тогда для исследования устойчивости нулевого решения исходной системы можно применить численный метод из [6], основанный на теории Флоке — Ляпунова.

2. Рассмотрим случай, когда поведение системы описывается уравнением

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\omega_1 \int_{-\infty}^t S(t-\tau) \frac{dx}{d\tau} d\tau + \omega_1^2 (1 - 2\mu \cos \theta t) x = 0 \tag{2.1}$$

Как известно [1], на границах областей неустойчивости нулевого решения уравнения (2.1) имеется хотя бы одно  $T$ - или  $2T$ -периодическое решение ( $T = 2\pi/\nu$ ). Этот факт позволяет получить из (1.5) соотношение, которым будут удовлетворять коэффициенты уравнения (2.1) на этих гра-

ницах. При  $2T$ -периодическом решении

$$\begin{vmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & 1 - \left(\frac{3\nu}{2}\right)^2 + 3\gamma\nu\Gamma_{3s} & -\mu & 0 & -3\gamma\nu\Gamma_{3c} & \dots \\ \dots & -\mu & \boxed{1 + \mu - \left(\frac{\nu}{2}\right)^2 + \gamma\nu\Gamma_{1s} - \gamma\nu\Gamma_{1c}} & 0 & \dots & \dots \\ \dots & 0 & \boxed{\gamma\nu\Gamma_{1c} \quad 1 - \mu - \left(\frac{\nu}{2}\right)^2 + \gamma\nu\Gamma_{1s}} & -\mu & \dots & \dots \\ \dots & 3\gamma\nu\Gamma_{3c} & 0 & -\mu & 1 - \left(\frac{3\nu}{2}\right)^2 + 3\gamma\nu\Gamma_{3s} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = 0 \quad (2.2)$$

при  $T$ -периодическом решении

$$\begin{vmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & 1 - 4\nu^2 + 4\gamma\nu\Gamma_{4s} & -\mu & 0 & 0 & -4\gamma\nu\Gamma_{4c} & \dots \\ \dots & -\mu & \boxed{1 - \nu^2 + 2\gamma\nu\Gamma_{2s}} & 0 & -2\gamma\nu\Gamma_{2c} & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & 1 & -\mu & 0 & \dots \\ \dots & 0 & -2\gamma\nu\Gamma_{2c} & -2\mu & 1 - \nu^2 + 2\gamma\nu\Gamma_{2s} & -\mu & \dots \\ \dots & 4\gamma\nu\Gamma_{4c} & 0 & 0 & -\mu & 1 - 4\nu^2 + 4\gamma\nu\Gamma_{4s} & \dots \end{vmatrix} = 0 \quad (2.3)$$

Получим приближенную формулу для границы основной области неустойчивости. Для этого удержим в уравнении (2.2) центральные элементы, взятые в рамку

$$\begin{vmatrix} 1 + \mu - \frac{1}{4}\nu^2 + \gamma\nu\Gamma_{1s} & -\gamma\nu\Gamma_{1c} \\ \gamma\nu\Gamma_{1c} & 1 - \mu - \frac{1}{4}\nu^2 + \gamma\nu\Gamma_{1s} \end{vmatrix} = 0 \quad (2.4)$$

Отметим, что  $\Gamma_{1c}$  и  $\Gamma_{1s}$  — функции частоты  $\nu$ . Разрешая (2.4) относительно  $\mu^2$ , имеем

$$\mu^2 = [1 - \frac{1}{4}\nu^2 + \gamma\nu\Gamma_{1s}(\nu)]^2 + \gamma^2\nu^2\Gamma_{1c}^2(\nu) \quad (2.5)$$

Исследуя соотношение (2.5), можно получить критические значения коэффициента возбуждения  $\mu$  и коэффициента интенсивности наследственного трения  $\gamma$ , а также уравнение, которому должна удовлетворять частота  $\nu$ , на которой возникает основной параметрический резонанс. Так, из уравнения  $\partial\mu^2/\partial\gamma=0$  находим критическое значение

$$\gamma_* = (\Gamma_{1s}/\nu) (\frac{1}{4}\nu^2 - 1) / (\Gamma_{1s}^2 + \Gamma_{1c}^2) \quad (2.6)$$

Из выражения (2.6) следует, что для частот возбуждения  $\nu > 2$  критическое значение коэффициента  $\mu$  достигается при  $\gamma > 0$ , т. е. на плоскости параметров  $\{\mu, \nu\}$  точка границы основной области неустойчивости при изменении  $\gamma$  совершает при фиксированном значении  $\nu = \nu_0$  эволюцию, изображенную на фиг. 1. Уравнение, которому должна удовлетворять частота основного параметрического резонанса, имеет вид

$$\left(1 - \frac{\nu^2}{4} + \gamma\nu\Gamma_{1s}\right) \left(\gamma\Gamma_{1s} + \gamma\nu \frac{d\Gamma_{1s}}{d\nu} - \frac{\nu}{2}\right) + \gamma^2\nu^2\Gamma_{1c}^2 + \gamma^2\nu^2\Gamma_{1c} \frac{d\Gamma_{1c}}{d\nu} = 0 \quad (2.7)$$

Отметим, что уравнение (2.7) может иметь несколько действительных корней в зависимости от вида ядра наследственности. В качестве одного из примеров рассмотрим экспоненциальное ядро

$$S(t-\tau) = s \exp[-\beta(t-\tau)] \quad (2.8)$$

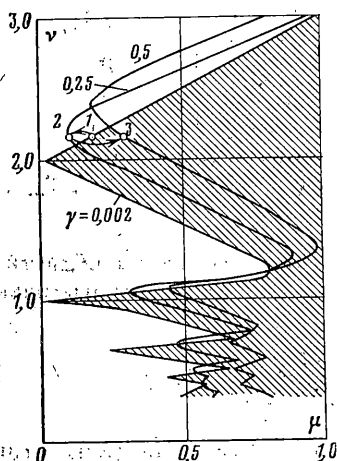
(случай стандартного линейного вязкоупругого тела). Для такого ядра из уравнения (2.7) получаем приближенное выражение для частоты основного параметрического резонанса

$$\nu = 2\sqrt{1+2\gamma s} \quad (2.9)$$

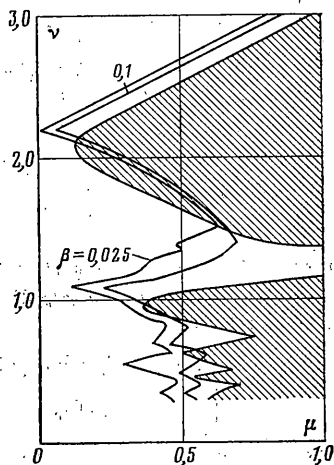
Из выражения (2.9) следует, что для рассматриваемого ядра основной параметрический резонанс смещается по частоте возбуждения в сторону увеличения  $\nu$ . В силу (2.9) резонансы более высоких порядков будут удовлетворять частотному соотношению

$$\nu = 2\sqrt{1+2\gamma s/p} \quad (p=2, 3, \dots) \quad (2.10)$$

В случае экспоненциальных ядер наследственности интегродифференциальным уравнениям вида (1.1) соответствуют эквивалентные диффе-



Фиг. 1



Фиг. 2

ренциальным уравнениям. Так, уравнению (2.1) для рассматриваемого экспоненциального ядра эквивалентным будет следующее дифференциальное уравнение;

$$\frac{d^3x}{d\tau^3} + \beta \frac{d^2x}{d\tau^2} + (2\gamma s + 1 - 2\mu \cos \nu\tau) \frac{dx}{d\tau} + [2\mu\nu \sin \nu\tau + \beta(1 - 2\mu \cos \nu\tau)]x = 0 \quad (2.11)$$

На фиг. 1, 2 показаны границы областей неустойчивости нулевого решения уравнения (2.1) для различных значений  $\gamma$  и  $\beta$ . Границы, полученные методом определителей Хилла и численным методом из [6], практически совпадают. Для главной области параметрического резонанса при  $\mu < 0,5$  аналогичные результаты дает приближенная формула (2.5). Фиг. 1 соответствует значениям  $s = \beta = 0,5$ ,  $\gamma = 0,002; 0,25; 0,5$ , фиг. 2 — значениям  $\gamma = 0,25; s = 0,5$ ,  $\beta = 0,025; 0,1; 1,0$ . В уравнении (2.2) рассматривался определитель шестого порядка, а в (2.3) — седьмого.

Оценивая смещение основного резонанса при помощи соотношения (2.9), получаем те же значения частот, какие дает численный анализ. Анализируя зависимость конфигурации областей неустойчивости от коэффициента  $\gamma$ , следует отметить, что даже для достаточно больших его значений ( $\gamma = 0,5$ ) отчетливо наблюдаются параметрические резонансы высоких порядков, соответствующие соотношению (2.10) (вплоть до  $p = 5$ ).

С увеличением коэффициента  $\beta$  границы областей неустойчивости сглаживаются и смещаются в сторону увеличения  $\mu$ .

3. В качестве второго примера рассмотрим параметрическую систему с двумя степенями свободы (1.1), где

$$A=E, \quad B=\text{diag}\{\alpha_1, \alpha_2\}, \quad C=\text{diag}\{\omega_1^2, \omega_2^2\}, \quad G=\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix} \quad (3.1)$$

Иследуем устойчивость нулевого решения системы (1.1), (1.3) в предположении, что ядро наследственности описывается соотношением (2.8). Тогда, используя алгоритм сведения интегродифференциальных уравнений к системам дифференциальных уравнений [7], получим вместо (1.1)

$$\begin{aligned} \frac{d^3 x_1}{d\tau^3} + \beta \frac{d^2 x_1}{d\tau^2} - 2\gamma_1 s \frac{dx_1}{d\tau} + \frac{dx_1}{d\tau} + 2\mu \left( g_{11} \frac{dx_1}{d\tau} + g_{12} \frac{dx_2}{d\tau} \cos v\tau \right) - \\ - 2\mu v (g_{11} x_1 + g_{12} x_2) \sin v\tau + \beta x_1 + 2\mu \beta (g_{11} x_1 + g_{12} x_2) \cos v\tau = 0 \\ \frac{d^3 x_2}{d\tau^3} + \beta \frac{d^2 x_2}{d\tau^2} + (\kappa^2 + 2\gamma_2 s) \frac{dx_2}{d\tau} + 2\mu \kappa^2 \left( g_{21} \frac{dx_1}{d\tau} + g_{22} \frac{dx_2}{d\tau} \cos v\tau + \right. \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\left. + (\beta + 2\mu \beta g_{22} \cos v\tau - 2\mu v g_{22} \sin v\tau) \kappa^2 x_2 + 2\mu \kappa^2 g_{21} (\beta \cos v\tau - v \sin v\tau) x_1 = 0 \right.$$

$$\gamma_1 = \gamma \alpha_1 / \omega_1, \quad \gamma_2 = \gamma \alpha_2 / \omega_1, \quad \kappa = \omega_2 / \omega_1$$

Запишем систему (3.2) в нормальной форме Коши

$$dy/d\tau = \Phi y, \quad y^T = \{x_1, x_2, x_1', x_2', x_1'', x_2''\} \quad (3.3)$$

где  $\Phi(\tau)$  — матрица-функция с элементами  $\Phi_{ij} = 0$  ( $i, j=1, 2, 3, 4, j \neq i+2$ ):

$$\Phi_{i, i+2} = 1 \quad (i=1, 2, 3, 4), \quad \Phi_{51} = -(\beta + 2\mu \beta g_{11} \cos v\tau - 2\mu v g_{11} \sin v\tau)$$

$$\Phi_{52} = -2\mu g_{12} (\beta \cos v\tau - v \sin v\tau), \quad \Phi_{53} = -(1 + 2\gamma_1 s + 2\mu g_{11} \cos v\tau)$$

$$\Phi_{54} = -2\mu g_{12} \cos v\tau, \quad \Phi_{55} = \Phi_{66} = -\beta, \quad \Phi_{56} = \Phi_{65} = 0$$

$$\Phi_{61} = -2\mu \kappa^2 g_{21} (\beta \cos v\tau - v \sin v\tau), \quad \Phi_{62} = -\kappa^2 (\beta + 2\mu \beta g_{22} \cos v\tau - 2\mu v g_{22} \sin v\tau) \quad (3.4)$$

$$\Phi_{64} = -(\kappa^2 + 2\gamma_2 s + 2\mu \kappa^2 g_{22} \cos v\tau), \quad \Phi_{63} = -2\mu \kappa^2 g_{21} \cos v\tau$$

Таким образом, исходная система (1.1), (3.1) приведена к стандартному виду (3.3), пригодному для численного интегрирования. Дальнейшее исследование устойчивости проводилось численным методом [6] при помощи построения и анализа матриц монодромии.

Известно [4], что области неустойчивости системы (1.1) в случае  $B=0$  на плоскости параметров  $\{\mu, v\}$  имеют счетное множество выступов, которые при  $\mu \rightarrow 0$  примыкают к частотам, определяемым условиями параметрического резонанса. Для простых параметрических резонансов эти условия имеют вид

$$\theta = 2\omega_j/p \quad (j=1, 2) \quad (p=1, 2, \dots) \quad (3.5)$$

где  $\omega_j$  — собственные частоты соответствующих консервативных систем. Кроме того, имеют место комбинационные резонансы

$$\theta = |\omega_j + \omega_k|/p \quad (j, k=1, 2; j \neq k) \quad (p=1, 2, \dots) \quad (3.6)$$

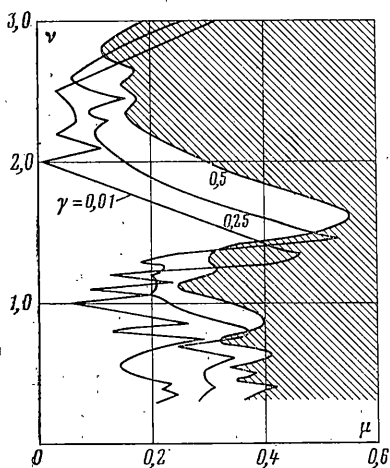
При этом комбинационные резонансы суммарного типа характерны для гамильтоновых систем, а разностного типа — для существенно негамильтоновых систем.

Вопрос о том, как трансформируются области неустойчивости с ростом наследственного трения, остается открытым, поэтому представляют интерес численные результаты, полученные при больших значениях коэффициента трения  $\gamma$ , для систем как с симметричной матрицей периодических сил  $G$ , так и с существенно несимметричной матрицей  $G$ .

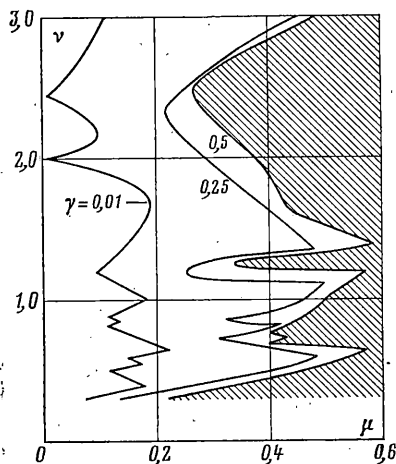
Вычисления проводились для случая:  $\kappa^2=1,5$ ,  $\gamma_1=\gamma_2=\gamma$ ,  $s=\beta=0,5$ . Матрица  $G$  рассматривалась в виде

$$G_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, \quad G_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$$

Результаты вычислений для системы с матрицей  $G=G_1$  представлены на фиг. 3. Коэффициент, характеризующий вязкое трение  $\gamma$ , принимался равным 0,01 (малое



Фиг. 3



Фиг. 4

демпфирование), 0,25; 0,5 (умеренно большое демпфирование). Области неустойчивости находятся справа.

Рассмотрим подробнее область неустойчивости при  $\gamma=0,01$ , которая имеет ряд выступов, соответствующих резонансным соотношениям (3.5) и (3.6). А именно, выступы при  $\nu=2,0$  и  $\nu \approx 2,5$  соответствуют главным резонансам типа (3.5) при  $\theta=2\omega_1$  и  $p=2$ . Выступы при  $\nu=1,0$  и  $\nu=1,25$  соответствуют резонансам того же типа при  $p=2$ . Выступы при  $\nu \approx 0,7$ ; 0,5; 0,4 соответствуют резонансам типа (3.5) для значений  $p=3, 4$  и 5 соответственно.

Выступ при  $\nu=2,25$  соответствует комбинационному резонансу (3.6) суммарного типа для  $p=1$ . Значению  $p=2$  соответствует комбинационный резонанс того же типа при  $\nu=1,12$ . Для частот, соответствующих комбинационным резонансам разностного типа, выступов на плоскости параметров  $\{\mu, \nu\}$  не обнаружено. Это вполне естественно, так как в рассматриваемом случае матрица периодических сил  $G$  является симметричной.

Сравнение кривых на фиг. 3 показывает, что при увеличении коэффициента демпфирования  $\gamma$  параметрические резонансы смещаются по оси частот  $\nu$  вверх и одновременно избирательная способность неустойчивости по отношению к частотным соотношениям (3.5), (3.6) падает. Все же при  $\gamma=0,25$  хорошо различимы выступы, соответствующие параметрическим резонансам, которые получились при деформировании областей неустойчивости с ростом трения. При дальнейшем увеличении коэффициента демпфирования до значения  $\gamma=0,5$  избирательная способность неустойчивости еще более падает, резонансы сглаживаются, комбинационные резонансы уже неразличимы. Существенным является то, что при увеличении демп-

фирования области неустойчивости смещаются вправо очень незначительно.

Результаты вычислений для системы с матрицей  $G=G_2$  представлены на фиг. 4. Коэффициент  $\gamma$  принимал значения 0,01; 0,25; 0,5. Как следует из анализа графиков, при  $\gamma=0,01$  наиболее ярко выраженными являются параметрические резонансы типа (3.5). Комбинационные резонансы суммарного типа отсутствуют. С увеличением демпфирования избирательная способность системы падает, главная область параметрического резонанса смещается вверх по частоте возбуждения  $\nu$ . Однако даже для  $\gamma=0,5$  критическое значение коэффициента возбуждения мало:  $\mu_*=0,25$ .

4. Рассмотрим уравнение (2.1) со слабо сингулярным ядром наследственности

$$S(\tau) = \alpha e^{-\beta\tau} / (\tau + 1) \quad (\alpha=0,5, \beta=0,5) \quad (4.1)$$

где  $\beta$  характеризует время релаксации материала.

Границы областей неустойчивости рассчитывались по методу определителей Хилла (в уравнениях (2.2) и (2.3) рассматривались определители шестого и седьмого порядков соответственно) и при помощи аппроксимации ядра одной и двумя экспонентами.

$$S_1(\tau) = 0,2982e^{-0,5\tau}, \quad S_2(\tau) = -0,006e^{-0,5\tau} + 0,456e^{-\tau} \quad (4.2)$$

с последующим построением матриц монодромии.

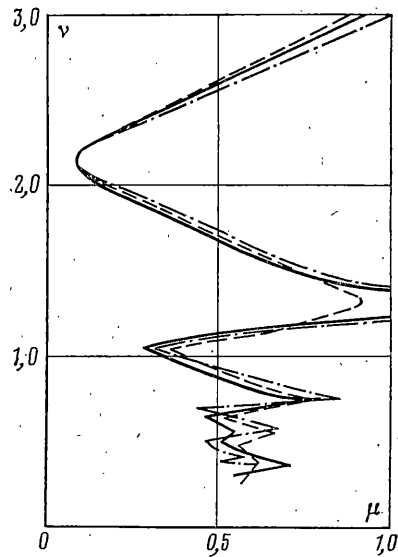
Области неустойчивости для системы (2.1) с ядром (4.1), полученные для  $\gamma=0,25$ , изображены на фиг. 5, где сплошными линиями изображены границы, полученные методом определителей Хилла, штриховой и штрихпунктирной линиями — численным исследованием матриц монодромии при аппроксимации ядер одной и двумя экспонентами соответственно. Практически во всем рассмотренном частотном диапазоне (за исключением области антирезонанса) границы областей неустойчивости, полученные различными методами, отличаются несущественно. В области антирезонанса границы областей неустойчивости, полученные в случае аппроксимации ядра одной экспонентой, заметно отличаются от соответствующих границ, полученных методом определителей Хилла.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *Бологин В. В.* Динамическая устойчивость упругих систем. М.: Гостехиздат, 1956. 600 с.
2. *Бологин В. В.* Случайные колебания упругих систем. М.: Наука, 1979. 335 с.
3. *Богданович А. Е.* Параметрические колебания цилиндрических оболочек, содержащих вязкоупругий наполнитель. — *Механика полимеров*, 1975, № 5, с. 840—849.
4. *Магаш В. И.* О динамической устойчивости шарнирно-опертого упруговязкого стержня. — *Механика полимеров*, 1971, № 2, с. 293—300.
5. *Магаш В. И.* Параметрические колебания вязкоупругих стержней. — *Механика полимеров*, 1974, № 1, с. 116—121.
6. *Бологин В. В.* К устойчивости параметрически возбуждаемых систем. — *Изв. АН СССР. МТТ*, 1974, № 5, с. 83—88.
7. *Работнов Ю. Н.* Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1966. 752 с.

Москва

Поступила в редакцию  
28.V.1982



Фиг. 5