

УДК 531.384

К ДИНАМИКЕ ВОЛЧКА

МАРКЕЕВ А. П.

Для бесконечного интервала времени исследована эволюция движения тяжелого динамически симметричного твердого тела (волчка) на плоскости с малым вязким трением. Поверхность волчка сферическая, центр масс лежит на оси симметрии вблизи геометрического центра поверхности. Наибольшее внимание уделено исследованию асимптотического стремления оси симметрии к ее совпадению с вертикалью.

1. Задаче о движении симметричного волчка на неподвижной горизонтальной плоскости при наличии скольжения посвящено много исследований. Первой из работ, где дано правильное физическое объяснение одного из основных динамических явлений в движении волчка — подъема его оси симметрии к вертикали при наличии трения скольжения, была работа [1]. Ее развернутое изложение содержится в [2]. Наглядное физическое объяснение подъема оси симметрии волчка содержится теперь во многих учебниках по механике [3, 4] и в научно-популярной литературе [5]. Некоторые математические вопросы теории движения волчка рассматривались в [6, 7], а также изложены в [8–10]. В [11] рассмотрены такие движения волчка, когда он, пройдя стадию скольжения, начинает катиться. Эти исследования были продолжены в [12]. В 50–60-х гг. появились публикации [13–27], содержащие исследования движения симметричного твердого тела, в частности волчка «тип — топ» (иначе, «китайского» волчка, или волчка Томсона) на плоскости с трением скольжения. Результаты [13–27] иногда имеют дискуссионный характер. Однако выявлены главные закономерности в поведении волчка и их происхождение. Основными факторами, определяющими движение, являются наличие трения скольжения, положение центра тяжести на оси симметрии и форма центрального эллипсоида инерции волчка.

Много внимания уделено исследованию устойчивости вращения волчка вокруг его вертикально расположенной оси симметрии. В работе [21] на основе анализа линейризованных уравнений движения получены необходимые условия устойчивости. Недавняя статья [28] содержит решение задачи об устойчивости в нелинейной постановке. Необходимые условия устойчивости получены также в [29], где проведено исследование влияния вращения волчка на трение скольжения и показано, что в реальных условиях горизонтальная реакция плоскости близка по характеру к вязкому трению. Результаты работы [29] наглядно представлены в монографии [30]. Вопросы об устойчивости вращения волчка рассматривались также в [31, 32]¹.

В статье [33] для анализа динамики различных симметричных волчков применена приближенная теория квазистационарных движений.

В [34] предложена формула для оценки времени, необходимого для подъема оси симметрии волчка эллипсоидальной формы. Справедливость формулы проверялась при помощи численного моделирования. Численный анализ эволюции движения волчка содержится в статье [35]. Интересна недавняя работа [36], в которой при помощи численных расчетов проведено исследование некоторых задач динамики волчка, когда в процессе движения фазы качения и скольжения могут сменять одна другую.

В статье [37] получены условия существования и устойчивости регулярной прецессии волчка на горизонтальной плоскости с вязким трением; в работе [38] решена задача об устойчивости вращения волчка вокруг вертикали при наличии сухого трения.

В публикуемой работе исследуется движение тяжелого динамически симметричного твердого тела сферической формы на неподвижной горизонтальной плоскости при действии вязкого трения. Предполагается, что центр тяжести тела находится на

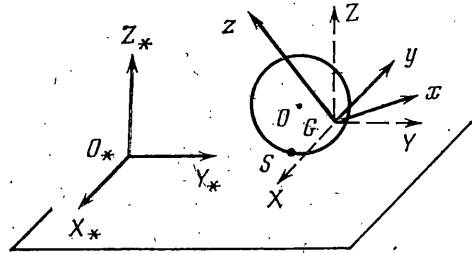
¹ См. также: Соколов В. С. О проявлении гироскопического эффекта при движении некоторых волчков. Курск, 1980.— 26 с. Деп. в ВИНТИ 30.06.80; № 2691-80.

Соколов В. С. Об устойчивости движения волчка Томсона. Курск, 1981.— 29 с. Деп. в ВИНТИ 17.12.81; № 5741-81.

Мошук Н. К. Об устойчивости стационарных движений тяжелого тела вращения на горизонтальной плоскости. М., 1983.— 19 с. Деп. в ВИНТИ 15.11.83; № 6090-83.

оси динамической симметрии тела и его расстояние от геометрического центра ограничивающей тело сферической поверхности мало. Трение также считается малым. Основным результатом состоит в доказательстве устойчивости полученного в работе характера эволюции движения оси симметрии на бесконечном интервале времени. Исследовано, в частности, асимптотическое стремление оси симметрии тела к ее совпадению с вертикалью.

2. Пусть тяжелое твердое тело движется по неподвижной горизонтальной плоскости, опираясь на нее одной точкой своей поверхности, являющейся сферой радиуса R . Неподвижная система координат $O_*X_*Y_*Z_*$ имеет начало в некоторой точке O_* опорной плоскости $Z_*=0$; ось O_*Z_* направлена вверх (фиг. 1). Начало кениговой системы координат $GXYZ$ находится в центре масс тела, а ее оси параллельны соответствующим осям системы координат $O_*X_*Y_*Z_*$. Оси системы координат $Gxyz$ направлены по главным центральным осям инерции тела.



Фиг. 1

Обозначим через v вектор абсолютной скорости точки S тела, которой оно касается плоскости, а его проекции на оси GX и GZ — через v_x и v_z соответственно. Для реакции F плоскости имеем выражение $F = -\|fmv_x, -fmv_z, F_z\|^T$, где f — постоянный положительный коэффициент, m — масса тела, F_z — нормальная реакция плоскости; символ T означает транспонирование.

Если через X, Y, Z обозначить координаты точки G в неподвижной системе координат, то

$$\ddot{X} = -fv_x, \quad \ddot{Y} = -fv_z, \quad \ddot{Z} = -g + F_z/m \quad (2.1)$$

Для описания движения тела относительно центра масс будем применять одну из модификаций переменных Андуайе [39], введенную в [40, 41]. Пусть $G\xi\eta\zeta$ — система координат, связанная с вектором кинетического момента K тела относительно центра масс (фиг. 2, а). Ось $G\xi$ направлена по вектору K ; переход от кениговой системы координат $GXYZ$ к системе координат $G\xi\eta\zeta$ осуществляется двумя последовательными поворотами: на угол σ вокруг оси GZ (при этом ось GZ переходит в ось $G\eta$) и на угол ρ вокруг оси $G\eta$. Ориентация твердого тела относительно системы координат $G\xi\eta\zeta$ определяется углами Эйлера (фиг. 2, б).

Взаимные ориентации введенных систем координат задаются при помощи соответствующих матриц направляющих косинусов

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

Величины c_{ij} известным образом выражаются через углы Эйлера, для b_{ij} и a_{ij} имеют место формулы

$$b_{11} = \cos \rho \sin \sigma, \quad b_{12} = \cos \sigma, \quad b_{13} = \sin \rho \sin \sigma, \quad b_{21} = -\sin \rho, \quad b_{22} = 0 \quad (2.3)$$

$$b_{23} = \cos \rho, \quad b_{31} = \cos \rho \cos \sigma, \quad b_{32} = -\sin \sigma, \quad b_{33} = \sin \rho \cos \sigma$$

$$a_{11} = \cos \rho \sin \sigma (\cos \psi \cos \varphi - \sin \psi \sin \varphi \cos \theta) + \cos \sigma (\sin \psi \cos \varphi + \cos \psi \sin \varphi \cos \theta) + \sin \rho \sin \sigma \sin \theta \sin \varphi \quad (2.4)$$

$$a_{12} = -\cos \rho \sin \sigma (\cos \psi \sin \varphi + \sin \psi \cos \varphi \cos \theta) + \cos \sigma (-\sin \psi \sin \varphi + \cos \psi \cos \varphi \cos \theta) + \sin \rho \sin \sigma \sin \theta \cos \varphi$$

$$a_{13} = \cos \rho \sin \sigma \sin \theta \sin \psi - \cos \sigma \sin \theta \cos \psi + \sin \rho \sin \sigma \cos \theta$$

$$a_{21} = -\sin \rho (\cos \psi \cos \varphi - \sin \psi \sin \varphi \cos \theta) + \cos \rho \sin \theta \sin \varphi$$

$$a_{22} = \sin \rho (\cos \psi \sin \varphi + \sin \psi \cos \varphi \cos \theta) + \cos \rho \sin \theta \cos \varphi$$

$$\begin{aligned}
 a_{23} &= -\sin \rho \sin \theta \sin \psi + \cos \rho \cos \theta \\
 a_{31} &= \cos \rho \cos \sigma (\cos \psi \cos \varphi - \sin \psi \sin \varphi \cos \theta) - \sin \sigma (\sin \psi \cos \varphi + \\
 &\quad + \cos \psi \sin \varphi \cos \theta) + \sin \rho \cos \sigma \sin \theta \sin \varphi \\
 a_{32} &= -\cos \rho \cos \sigma (\cos \psi \sin \varphi + \sin \psi \cos \varphi \cos \theta) - \sin \sigma (-\sin \psi \sin \varphi + \\
 &\quad + \cos \psi \cos \varphi \cos \theta) + \sin \rho \cos \sigma \sin \theta \cos \varphi \\
 a_{33} &= \cos \rho \cos \sigma \sin \theta \sin \psi + \sin \sigma \sin \theta \cos \psi + \sin \rho \cos \sigma \cos \theta
 \end{aligned}$$

В кениговой системе координат вектор мгновенной угловой скорости тела ω имеет следующие компоненты:

$$\begin{aligned}
 \omega_x &= \dot{\rho} \cos \sigma + \dot{\psi} \sin \rho \sin \sigma + \dot{\theta} (\cos \rho \sin \sigma \cos \psi + \cos \sigma \sin \psi) + \quad (2.5) \\
 &\quad + \dot{\varphi} (\cos \rho \sin \sigma \sin \theta \sin \psi - \cos \sigma \sin \theta \cos \psi + \sin \rho \sin \sigma \cos \theta) \\
 \omega_y &= \dot{\sigma} + \dot{\psi} \cos \rho - \dot{\theta} \sin \rho \cos \psi + \dot{\varphi} (-\sin \rho \sin \theta \sin \psi + \cos \rho \cos \theta) \\
 \omega_z &= -\dot{\rho} \sin \sigma + \dot{\psi} \sin \rho \cos \sigma + \dot{\theta} (\cos \rho \cos \sigma \cos \psi - \sin \sigma \sin \psi) + \\
 &\quad + \dot{\varphi} (\cos \rho \cos \sigma \sin \theta \sin \psi + \sin \sigma \sin \theta \cos \psi + \sin \rho \cos \sigma \cos \theta)
 \end{aligned}$$

Уравнения, описывающие движение тела относительно центра масс, имеют вид [41]:

$$dK/dt = M_\xi, \quad d\rho/dt = M_\eta/K, \quad d\sigma/dt = M_\eta/(K \sin \rho) \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned}
 \frac{d\theta}{dt} &= K \sin \theta \sin \varphi \cos \varphi \left(\frac{1}{A} - \frac{1}{B} \right) + \frac{M_\xi \cos \psi - M_\xi \sin \psi}{K} \\
 \frac{d\varphi}{dt} &= K \cos \theta \left(\frac{1}{C} - \frac{\sin^2 \varphi}{A} - \frac{\cos^2 \varphi}{B} \right) + \frac{M_\xi \cos \psi + M_\eta \sin \psi}{K \sin \theta} \\
 \frac{d\psi}{dt} &= K \left(\frac{\sin^2 \varphi}{A} + \frac{\cos^2 \varphi}{B} \right) - \frac{M_\xi \cos \psi + M_\eta \sin \psi}{K} \operatorname{ctg} \theta - \frac{M_\eta}{K} \operatorname{ctg} \rho
 \end{aligned} \quad (2.7)$$

Здесь M_ξ , M_η , M_ζ — проекции момента M реакции плоскости на соответствующие оси системы координат $G\xi\eta\zeta$, A , B , C — моменты инерции тела относительно этих осей. Величины M_ξ , M_η , M_ζ вычисляются по формулам

$$M_\xi = M_x \cos \rho \sin \sigma - M_y \sin \rho + M_z \cos \rho \cos \sigma \quad (2.8)$$

$$M_\eta = M_x \cos \sigma - M_z \sin \sigma$$

$$M_\zeta = M_x \sin \rho \sin \sigma + M_y \cos \rho + M_z \sin \rho \cos \sigma$$

$$M_x = (a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}z_0)F_z + fmv_y (a_{31}x_0 + a_{32}y_0 + a_{33}z_0 - R) \quad (2.9)$$

$$M_y = -(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}z_0)F_z - fmv_x (a_{31}x_0 + a_{32}y_0 + a_{33}z_0 - R)$$

$$M_z = -fmv_y (a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}z_0) + fmv_x (a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}z_0)$$

$$v_x = X' + \omega_y (a_{31}x_0 + a_{32}y_0 + a_{33}z_0 - R) - \omega_z (a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}z_0) \quad (2.10)$$

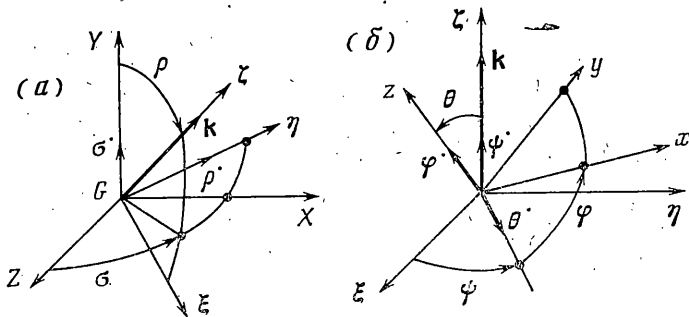
$$v_y = Y' + \omega_z (a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}z_0) - \omega_x (a_{31}x_0 + a_{32}y_0 + a_{33}z_0 - R)$$

В (2.9), (2.10) x_0 , y_0 , z_0 — координаты центра O сферической поверхности тела в системе координат $Gxyz$. Всюду в дальнейшем тело является динамически симметричным ($A=B$), а его центр масс лежит на оси симметрии ($x_0=y_0=0$). В этих предположениях уравнения движения (2.1), (2.6), (2.7) имеют интеграл Желле [6, 8]: $K(z_0 \cos \theta - R \sin \rho \cos \sigma) = \text{const}$.

3. Пусть центр тяжести тела расположен вблизи геометрического центра его поверхности, а трение мало, причем величины $|z_0|/R$ и $f(R/g)^{1/2}$ имеют одинаковый (первый) порядок малости ε ($0 < \varepsilon \ll 1$). Можно, например, считать, что $z_0 = \varepsilon R z_0'$, $f = \varepsilon (g/R)^{1/2} f'$, где безразмерные величины z_0'

и f' имеют порядок единицы. При $\varepsilon=0$ вектор кинетического момента K неизменен по величине и направлению (K, ρ, σ постоянны), а тело совершает регулярную прецессию вокруг вектора K . При этом угол нутации $\theta = \text{const}$, угловая скорость собственного вращения $\dot{\varphi} = \omega_1 = K \cos \theta (1/C - 1/A)$, угловая скорость прецессии $\dot{\psi} = \omega_2 = K/A$, а центр масс тела движется равномерно и прямолинейно.

Координата Z центра масс в неподвижной системе координат $O_*X_*Y_*Z_*$ равна $R - z_0 a_{33}$. Если ε мало, но отлично от нуля, то из (2.4)



Фиг. 2

и уравнений движения следует, что нормальная реакция F_z с погрешностью порядка ε равна весу тела. Далее, из формул п. 2 получаем

$$M_\xi = m(gz_0 a_{23} - fRv_Y) \cos \rho \sin \sigma + m(gz_0 a_{13} - fRv_X) \sin \rho + O(\varepsilon^2) \quad (3.1)$$

$$M_\eta = m(gz_0 a_{23} - fRv_Y) \cos \sigma + O(\varepsilon^2)$$

$$M_z = m(gz_0 a_{23} - fRv_Y) \sin \rho \sin \sigma - m(gz_0 a_{13} - fRv_X) \cos \rho + O(\varepsilon^2)$$

$$v_X = X^* - R\omega_Y + O(\varepsilon), \quad v_Y = Y^* + R\omega_X + O(\varepsilon) \quad (3.2)$$

$$\omega_X = Kb_{13}/A + K \cos \theta (1/C - 1/A) a_{13} + O(\varepsilon) \quad (3.3)$$

$$\omega_Y = Kb_{23}/A + K \cos \theta (1/C - 1/A) a_{23} + O(\varepsilon)$$

$$\omega_Z = Kb_{33}/A + K \cos \theta (1/C - 1/A) a_{33} + O(\varepsilon)$$

При $\varepsilon \neq 0$ величины $X^*, Y^*, K, \rho, \sigma, \theta$ будут медленными, а φ и ψ — быстрыми переменными (если θ лежит вблизи $1/2\pi$, то медленной будет также и переменная φ). Правые части дифференциальных уравнений движения в первом приближении по ε содержат синусы и косинусы величин $\varphi, \psi, \varphi \pm \psi, \varphi \pm 2\psi$. При малых ε преобразуем уравнения движения, следуя одной из основных идей метода усреднения [42]. Сделаем близкую к тождественной замену переменных

$$X^* = x_1 + \varepsilon u_1, \quad Y^* = x_2 + \varepsilon u_2, \quad K = x_3 + \varepsilon u_3, \quad \rho = x_4 + \varepsilon u_4 \quad (3.4)$$

$$\sigma = x_5 + \varepsilon u_5, \quad \theta = x_6 + \varepsilon u_6, \quad \varphi = x_7 + \varepsilon u_7, \quad \psi = x_8 + \varepsilon u_8$$

которая позволяет привести уравнения движения к такой форме, что в первом приближении по ε уравнения для медленных переменных отделены от уравнений для быстрых переменных. Все u_i ($i=1, 2, \dots, 8$) в (3.4) — функции аргументов x_1, x_2, \dots, x_8 , ограниченные при стремлении величин x_7 и x_8 к бесконечности.

При построении замены переменных (3.4) существенно наличие или отсутствие резонансов на рассматриваемом промежутке времени. Так как $\omega_2 \neq 0$, то в первом приближении по ε резонанс может возникнуть только при таких значениях медленных переменных, когда одна из величин $\omega_1, \omega_1 \pm \omega_2, \omega_1 \pm 2\omega_2$ будет близкой или равной нулю. Используя выражения

для ω_1 и ω_2 , получаем, что резонанс $\omega_1 \approx 0$ возможен при $\theta \approx 1/2\pi$, т. е. когда ось динамической симметрии тела почти ортогональна вектору кинетического момента; резонансы $\omega_1 \pm \omega_2 \approx 0$ возникают при $\cos \theta \approx \pm C/(C-A)$ ($0 \leq C/A \leq 1/2$), а резонансы $\omega_1 \pm 2\omega_2 \approx 0$ — при $\cos \theta \approx \pm 2C/(C-A)$ ($0 \leq C/A \leq 1/3$).

Вычисления показывают, что в отсутствие резонанса уравнения для новых медленных переменных x_i ($i=1, 2, \dots, 6$) примут вид

$$\begin{aligned} x_1^{\cdot} &= -fx_1 + fRx_3 \cos x_4 (\sin^2 x_6/A + \cos^2 x_6/C) + X_1 \\ x_2^{\cdot} &= -fx_2 - fRx_3 \sin x_4 \sin x_5 (\sin^2 x_6/A + \cos^2 x_6/C) + X_2 \\ x_3^{\cdot} &= mR (\sin x_4 \sin x_5 x_2^{\cdot} - \cos x_4 x_1^{\cdot}) + X_3 \\ x_4^{\cdot} &= [mgz_0 \sin x_3 \cos x_6 + mR (\cos x_4 \sin x_5 x_2^{\cdot} + \sin x_4 x_1^{\cdot})] / x_3 + X_4 \\ x_5^{\cdot} &= (mgz_0 \cos x_4 \cos x_5 \cos x_6 + mR \cos x_5 x_2^{\cdot}) / (x_3 \sin x_4) + X_5 \\ x_6^{\cdot} &= 1/2 fmR^2 (1/C - 1/A) \sin x_6 \cos x_6 (1 + \sin^2 x_4 \cos^2 x_5) + X_6 \end{aligned} \quad (3.5)$$

где X_i — функции порядка ε^2 при любых значениях быстрых переменных x_7, x_8 .

При резонансе $\omega_1 \approx 0$ медленной будет также переменная φ . Для x_7 получается уравнение

$$x_7^{\cdot} = (1/C - 1/A) x_3 \cos x_6 - mgz_0 \sin x_4 \cos x_5 / x_3 + X_7 \quad (3.6)$$

а уравнения для x_1, x_2, \dots, x_6 в первом приближении по ε не изменяется. Функции X_i ($i=1, 2, \dots, 7$) в (3.5) и (3.6) имеют порядок ε^2 при всех значениях быстрой переменной x_8 .

При резонансах $\omega_1 \pm \omega_2 \approx 0$ или $\omega_1 \pm 2\omega_2 \approx 0$ согласно процедуре метода усреднения [42] вводится медленная переменная $\varphi \pm \psi$ или $\varphi \pm 2\psi$ соответственно. Преобразованные уравнения для медленных переменных не выписываем, так как они не понадобятся в дальнейшем. Существенно то, что и при этих резонансах в первом приближении по ε уравнения для x_1, x_2, \dots, x_6 будут такими же, как и в нерезонансном случае, а функции X_i ($i=1, 2, \dots, 6$) имеют порядок ε^2 при любых значениях быстрой переменной x_8 .

4. Для исследования движения сначала пренебрегаем в системе (3.5) функциями X_i . Приближенная система имеет несколько решений, которые можно выписать как явные функции времени; часть из них будет просто положениями равновесия. Рассмотрение этих решений дает обширную информацию о движении волчка на конечном интервале времени. Не анализируя всех этих решений, остановимся на рассмотрении только двух вопросов об эволюции движения волчка, но не на конечном, а на бесконечном интервале времени. Один из них связан с эволюцией угла нутации θ при произвольном движении волчка, а другой — с имеющейся в некоторых случаях тенденцией оси симметрии волчка занять вертикальное положение. Рассмотрение этих вопросов начнем с анализа соответствующих решений приближенной системы.

Из последнего уравнения системы (3.5) при $X_6 = 0$ видно, что при $t \rightarrow \infty$ для любых движений волчка величина $x_6(t)$ при $A > C$ стремится к значению, равному $1/2\pi$, независимо от начального значения $x_6(0)$, а при $A < C$ $x_6(t)$ стремится к нулю или π в зависимости от того, будет ли $x_6(0)$ меньше или больше $1/2\pi$. Таким образом, при $A \neq C$ движение, описываемое приближенной системой, таково, что в предельном (при $t \rightarrow \infty$) движении ось наибольшего момента инерции волчка направлена вдоль вектора кинетического момента K .

Приближенная система допускает частные решения, отвечающие квазистационарным движениям тела

$$x_1=0, \quad x_2=0, \quad x_3=x_3(0), \quad x_4=1/2\pi, \quad x_5=x_5(0)=0, \pi \quad (4.1)$$

$$\operatorname{tg} x_6(t) = \operatorname{tg} x_6(0) \exp [fmR^2(1/C-1/A)t]$$

Для решений (4.1) проекция центра масс на горизонтальную плоскость неподвижна, а его перемещение по вертикали описывается уравнением

$$Z=R-z_0 \cos x_5(0) \cos x_6(t) \quad (4.2)$$

Вектор кинетического момента \mathbf{K} постоянен и направлен вдоль вертикали (вверх при $x_5=0$ и вниз при $x_5=\pi$). Движение волчка относительно вектора \mathbf{K} будет регулярной прецессией, в которой угол нутации медленно эволюционирует в соответствии с (4.1). Ось симметрии волчка стремится расположиться вертикально, если $A < C$, и горизонтально, если $A > C$. При этом волчок вращается вокруг вертикали с угловой скоростью $\dot{\psi} = \omega_2$, а вокруг оси симметрии — с угловой скоростью $\dot{\varphi} = \omega_1$; если $x_6 \approx 1/2\pi$ (т. е. имеет место резонанс $\omega_1 \approx 0$), то, как следует из (3.6), с погрешностью порядка ε имеем $\omega_1 = 0$. Угол нутации не может пройти резонансное значение $1/2\pi$: он либо стремится в резонанс (при $A > C$), либо (при $A < C$) выходит из резонансной зоны. Резонансные зоны, соответствующие соотношениям $\omega_1 \pm \omega_2 \approx 0$ и $\omega_1 \pm 2\omega_2 \approx 0$, существующим при $A > 2C$ и $A > 3C$, проходятся при движении без нарушения характера эволюции угла нутации, описываемой формулой (4.1).

Из (4.1) и (4.2) следует, что за время эволюции центр масс волчка поднимется или опустится в зависимости от того, будет ли величина $(A-C)z_0 \cos x_5(0) \cos x_6(0)$ положительной или отрицательной.

Для решения (4.1) координаты X_* , Y_* точки касания волчка и плоскости в неподвижной системе координат $O_*X_*Y_*Z_*$ будут такими:

$$X_* = X - z_0 \cos x_5(0) \sin x_6(t) \cos \psi, \quad Y_* = Y - z_0 \sin x_6(t) \sin \psi$$

а координаты точки касания в связанной системе координат $Gxyz$ для решения (4.1) вычисляются по формулам

$$x = -R \cos x_5(0) \sin x_6(t) \sin \varphi, \quad y = -R \cos x_5(0) \sin x_6(t) \cos \varphi$$

$$z = z_0 - R \cos x_5(0) \cos x_6(t)$$

Траекторией точки касания на плоскости будет спираль, получающаяся из эволюционирующей окружности радиуса $|z_0| \sin x_6(t)$ с центром в проекции центра масс волчка на плоскость. Эта спираль будет раскручивающейся при $A > C$ (ось симметрии стремится занять горизонтальное положение) и скручивающейся при $A < C$ (ось симметрии стремится к вертикали). На поверхности волчка след точки касания также будет спиралью, которая при $A > C$, раскручиваясь, асимптотически приближается к окружности радиуса R , лежащей в сечении волчка плоскостью $z = z_0$. При $A < C$ след на поверхности волчка будет скручивающейся спиралью, стремящейся к точке поверхности сферы, лежащей на оси симметрии волчка.

Из (3.2), (3.3), (2.3) и (2.4) для решения (4.1) с погрешностью порядка ε получаем

$$v(t) = v(0) (1 + \operatorname{tg}^2 x_6(0)) \frac{\exp [fmR^2(C^{-1} - A^{-1})t]}{1 + \operatorname{tg}^2 x_6(0) \exp [2fmR^2(C^{-1} - A^{-1})t]}$$

Отсюда следует, что абсолютная скорость точки S , которой волчок касается плоскости, асимптотически стремится к нулю, ни при каком конечном t не обращаясь в нуль, т. е. волчок все время движется со скольжением.

5. Для исследования устойчивости движения (4.1) сделаем в уравнениях (3.5) замену переменных $x_1=Ry_1$, $x_2=Ry_2$, $x_3=x_3(0)+y_3$, $x_4=1/2\pi+y_4$, $x_5=x_5(0)+y_5$, $x_6=x_6(t)+y_6$. Получим

$$\begin{aligned} y_1' &= -y_1 - ay_4 + Y_1 + F_1, & y_3' &= Y_3 + F_3 \\ y_2' &= -y_2 - a \cos x_5(0) y_5 + Y_2 + F_2 \\ y_4' &= -by_1 - aby_4 + cy_5 + Y_4 + F_4, & y_6' &= dy_6 + Y_6 + F_6 \\ y_5' &= -b \cos x_5(0) y_2 - cy_4 - aby_5 + Y_5 + F_5 \end{aligned} \quad (5.1)$$

Здесь штрихом обозначено дифференцирование по безразмерной переменной $\tau = ft$ и введены обозначения

$$a = x_3(0) [\sin^2 x_6(t)/A + \cos^2 x_6(t)/C], \quad b = mR^2/x_3(0) \quad (5.2)$$

$$c = mgz_0 \cos x_5(0) \cos x_6(t)/(fx_3(0)), \quad d = mR^2(1/C - 1/A) \cos 2x_6(t)$$

Через Y_i обозначены функции, разложения которых в ряды начинаются с членов не ниже второго порядка относительно y_1, y_2, \dots, y_6 . Для дальнейшего существенно, что $Y_i = 0$, если только равны нулю переменные y_1, y_2, y_4, y_5, y_6 , т. е. ряды для Y_i не содержат членов, зависящих только от y_3 . Через F_i в (5.1) обозначены функции не ниже первого порядка относительно ϵ . Они представляют собой некоторые линейные комбинации входящих в (3.5) функций X_j , выраженных через новые переменные y_1, y_2, \dots, y_6 , и не обязательно равны нулю при $y_1 = y_2 = \dots = y_6 = 0$. Поэтому решение задачи об устойчивости движения (4.1) в силу точных уравнений движения (3.5) требует рассмотрения устойчивости при постоянно действующих возмущениях.

Положив в (5.1) $Y_i = 0, F_i = 0$, рассмотрим сначала устойчивость линеаризованной системы. Третье уравнение из (5.1) дает нулевой корень характеристического уравнения. Остальные пять уравнений не содержат y_3 и имеют переменные коэффициенты, которые при $\tau \rightarrow \infty$ стремятся к некоторым конечным пределам. Этим уравнениям соответствует характеристическое уравнение

$$(\lambda - d) [\lambda^2(\lambda + ab + 1)^2 + c^2(\lambda + 1)^2] = 0 \quad (5.3)$$

Отмечая звездочкой предельные значения величин (5.2) при $\tau \rightarrow \infty$ и применяя критерий Рауса — Гурвица, получаем, что вещественные части всех корней уравнения (5.3) при $\tau \rightarrow \infty$ будут отрицательными тогда и только тогда, когда $a_*b > 0, c_* \neq 0$. Первое из этих неравенств выполняется всегда, а второе — когда одновременно $z_0 \neq 0$ и предельное значение x_6^* отлично от $1/2\pi$. Оставляя открытым вопрос об устойчивости движения (4.1) в случае $A > C$, соответствующем $x_6^* = 1/2\pi$, рассмотрим устойчивость при $A < C$, когда предельное (при $\tau \rightarrow \infty$) положение оси симметрии волчка является вертикальным ($x_6^* = 0$ или π).

Если $z_0 \neq 0$ и $A < C$, то для всех достаточно больших τ при некотором положительном α выполняются неравенства $\operatorname{Re} \lambda_i \leq -\alpha < 0$, где λ_i ($i = 1, 2, \dots, 5$) — корни уравнения (5.3). Поэтому согласно [43], существует определенно-положительная квадратичная форма V переменных y_1, y_2, y_4, y_5, y_6 , производная которой V' в силу линеаризованных уравнений (5.1) будет определенно-отрицательной функцией тех же переменных. Следовательно, линеаризованная система асимптотически устойчива относительно y_1, y_2, y_4, y_5, y_6 .

Так как разложения функций Y_i не содержат членов, зависящих только от y_3 , то V' будет также определенно-отрицательной и в силу нелинейной системы (5.1) (при $F_i = 0$). Таким образом, если пренебречь постоянно действующими возмущениями F_i , то движение (4.1) асимптотически устойчиво относительно y_1, y_2, y_4, y_5, y_6 , т. е. относительно возмущений

скорости центра масс волчка, ориентации его вектора кинетического момента \mathbf{K} и угла между осью симметрии волчка и вектором \mathbf{K} .

Покажем теперь, что при достаточно малых ε движение (4.1) устойчиво относительно всех переменных y_i ($i=1, 2, \dots, 6$). Чтобы показать устойчивость относительно y_1, y_2, y_4, y_5, y_6 , достаточно заметить, что производные $\partial V/\partial y_i$ ограничены и, следовательно, применима теорема Малкина об устойчивости при постоянно действующих возмущениях [44]. Устойчивость относительно y_3 , т. е. относительно возмущений модуля вектора кинетического момента, следует теперь из интеграла Желле.

Совершенно аналогично можно доказать устойчивость рассмотренной в п. 4 эволюции угла нутации (выражающейся в стремлении оси наибольшего из моментов инерции совпасть с направлением вектора кинетического момента) при произвольном движении волчка, а не только в случае движения (4.1).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Smith A.* Note on the theory of a spinning top.— *Cambr. Math. J.*, 1839, v. 1, p. 42—44.
2. *Граммель Р.* Гирскоп, его теория и применение. Т. 1. М.: Изд-во иностр. лит., 1952. 351 с.
3. *Вебстер А. Г.* Механика материальных точек, твердых, упругих и жидких тел. Л.—М.: Гостехтеоретиздат, 1933. 634 с.
4. *Сивухин Д. В.* Общий курс физики. Т. 1. Механика. М.: Наука, 1979. 519 с.
5. *Перри Дж.* Вращающийся волчок. М.—Л.: Гл. ред. науч.-популярной и юношеской лит., 1935. 92 с.
6. *Jellet J. H.* A Treatise on the theory of friction. Dublin — London: Macmillan, 1872. 230 p.
7. *Gallop E. G.* On the rise of a Spinning Top.— *Proc. Cambr. Philos. Soc.*, 1904, v. 19, pt 3, p. 356—373.
8. *Routh E. J.* The advanced part of a treatise on the dynamics of a system of rigid bodies. L.: Macmillan, 1905. 484 p.
9. *Klein F., Sommerfeld A.* Über die Theorie des Kreisels. H. 3. Leipzig — B.: Teubner, 1923, S. 513—759.
10. *Gray A.* A Treatise on gyrostatics and rotational motion. L.: Macmillan, 1918. 530 p.
11. *Fokker A. D.* The rising top, experimental evidence and theory.— *Physica*, 1941, v. 8, No. 6, p. 591—596.
12. *Fokker A. D.* The tracks of tops pegs on the floor.— *Physica*, 1952, v. 18, No. 8—9, p. 497—502.
13. *Hügenholtz N. M.* On tops rising by friction.— *Physica*, 1952, v. 18, No. 8—9, p. 515—527.
14. *Braams C. M.* On the influence of friction on the motion of a top.— *Physica*, 1952, v. 18, No. 8—9, p. 503—514.
15. *Braams C. M.* The Symmetrical spherical top.— *Nature*, 1952, v. 170, No. 4314, p. 34.
16. *Jacobs J. A.* Note on the behavior of a certain symmetrical top.— *Amer. J. Phys.*, 1952, v. 20, No. 8, p. 517—518.
17. *Synge J. L.* On a case of instability produced by rotation.— *Philos. Mag.*, 1952, v. 43, No. 342, p. 724—728.
18. *Haringx J. A.* Miraculous top.— *Ingenieur*, 1952, v. 64, No. 4, p. 0.13—0.17.
19. *Pliskin W. A.* The tippe — top (topsy — turvy top).— *Amer. J. Phys.*, 1954, v. 22, No. 1, p. 28—32.
20. *Braams C. M.* The tippe — top.— *Amer. J. Phys.*, 1954, v. 22, No. 8, p. 568.
21. *O'Brien S., Synge J. L.* The instability of the tippe — top explained by sliding friction.— *Proc. Roy. Irish Acad. Sec. A*, 1954, v. 56, No. 3, p. 23—35.
22. *Del Campo A. R.* Tippe — top (topsy — turnee top).— *Amer. J. Phys.*, 1955, v. 23, No. 8, p. 544—545.
23. *Freeman I. M.* The tippe — top again.— *Amer. J. Phys.*, 1956, v. 24, No. 3, p. 178.
24. *Parkyn D. G.* The inverting top.— *Math. Gazette*, 1956, v. 40, No. 334, p. 260—265.
25. *Parkyn D. G.* The rising of tops with rounded pegs.— *Physica*, 1958, v. 24, No. 5, p. 313—330.
26. *Hart J. B.* Angular momentum and tippe — top.— *Amer. J. Phys.*, 1959, v. 27, No. 3, p. 189.
27. *Johnson F. F.* The tippe — top.— *Amer. J. Phys.*, 1960, v. 28, No. 4, p. 406—407.
28. *Румянцев В. В.* К задаче об устойчивости вращения тяжелого гиростата на горизонтальной плоскости с трением.— В кн.: *Современные проблемы механики и авиации*. М.: Машиностроение, 1982, с. 263—272.
29. *Конгенсу П.* Связь между трением скольжения и трением верчения и ее учет в теории волчка.— В кн.: *Проблемы гироскопии*. М.: Мир, 1967, с. 60—77.
30. *Магнус К.* Гирскоп. Теория и применение. М.: Мир, 1974. 526 с.

31. Семов А. М. Об устойчивости вертикального положения равновесия динамической оси тела на горизонтальной плоскости с трением и на неголономной плоскости.— В кн.: Избранные вопросы динамики. М.: Наука, 1979, с. 46—54.
32. Togeiro de Figueiredo Ruy. Stability of stationary motion of the symmetrical top with rounded peg.— Rev. bras. fis., 1982, v. 12, No. 3, p. 443—458.
33. Самсонов В. А. Качественный анализ задачи о движении волчка по плоскости с трением.— Изв. АН СССР. МТТ, 1981, № 5, с. 29—35.
34. Yamamoto T. Rotation of an ellipsoid and reversible top.— Sci. Repts Hiroshima Univ., 1980, v. 27, No. 1, p. 9—16.
35. Cohen R. J. The tippe-top revisited.— Amer. J. Phys., 1977, v. 45, No. 1, p. 12—17.
36. Kane T. R., Levinson D. A. A realistic solution of the symmetric top problem.— Trans. ASME. J. Appl. Mech., Ser. E. 1978, v. 45, No. 4, p. 903—909.
37. Карапетян А. В. О регулярной прецессии тела вращения на горизонтальной плоскости с трением.— ПММ, 1982, т. 46, вып. 4, с. 568—572.
38. Миндлин И. М. Об устойчивости движения волчка на горизонтальной плоскости при действии сухого трения скольжения.— Инж. ж., 1965, т. 5, вып. 2, с. 211—216.
39. Andoyer M. H. Cours de mécanique céleste. P.: Gauthier-Villars, t. 1, 1923. 440 p; t. 2, 1926. 454 p.
40. Белецкий В. В. Движение искусственного спутника земли относительно центра масс.— Искусственные спутники Земли: Сб. статей. М.: Изд-во АН СССР, 1958, вып. 1, с. 25—43.
41. Черноушко Ф. Л. О движении спутника относительно центра масс под действием гравитационных моментов.— ПММ, 1963, т. 27, вып. 3, с. 474—483.
42. Моисеев Н. Н. Асимптотические методы в нелинейной механике. М.: Наука, 1969. 379 с.
43. Персидский К. П. О характеристических числах дифференциальных уравнений.— Изв. АН КазССР. Серия матем. и механ., 1947, № 42, вып. 1, с. 5—47.
44. Малкин И. Г. Теория устойчивости движения. М.: Наука, 1966. 530 с.

Москва

Поступила в редакцию
27.XII.1982