

УДК 531.36

## ОБ УСТОЙЧИВОСТИ И БИФУРКАЦИИ ПОЛОЖЕНИЙ ОТНОСИТЕЛЬНОГО РАВНОВЕСИЯ ТЯЖЕЛОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА, ПОДВЕШЕННОГО НА СТРУНЕ

НОЗАДЗЕ Г. Т.

В [4] получены уравнения относительного равновесия тяжелого твердого тела, подвешенного на струне, в равномерно вращающейся системе координат. Эти уравнения исследованы при больших значениях угловой скорости вращения. Показано [2], что существуют положения относительного равновесия, при которых одна из главных центральных осей инерции тела занимает вертикальное положение. Виды относительного равновесия осесимметричного тела исследованы в [3].

В [4] рассмотрены стационарные движения осесимметричного твердого тела, при которых центр масс тела находится ниже точки крепления тела со струной. Исследована их устойчивость<sup>1</sup>.

Бифуркация стационарных движений консервативных систем с двумя циклическими координатами исследована в [5]. Там же изучены некоторые особенности бифуркации стационарных движений тяжелого осесимметричного твердого тела, подвешенного на струне в одной из точек оси симметрии.

Результаты классической теории бифуркации Пуанкаре — Четаева распространены на системы с известными первыми интегралами [6].

В публикуемой работе на основе этого метода изучается бифуркация и устойчивость положений относительного равновесия тяжелого твердого тела, подвешенного на струне, в равномерно вращающейся системе координат.

1. Рассмотрим тяжелое твердое тело массой  $M$ , подвешенное в точке  $O$  тела на струне длиной  $l$ , другой конец которой укреплен в неподвижной точке  $O_1$ . Струна рассматривается как геометрическая связь, под влиянием которой точка  $O$  во все время движения находится на поверхности сферы радиуса  $l$  с центром в точке  $O_1$ .

Введем системы координат: неподвижную  $O_1\xi\eta\zeta$  с осью  $\zeta$ , направленной вертикально вниз, и вращающуюся с постоянной угловой скоростью  $\omega$  вокруг оси  $\zeta$  систему координат  $O_1\xi_1\eta_1\zeta$  (фиг. 1).

В центре масс  $G$  твердого тела поместим начало системы координат  $Z_1Z_2Z_3$ , оси которой направлены по главным центральным осям инерции тела. Потенциальная энергия сил тяжести и центробежных сил инерции имеет вид

$$V = -Mg(lx_1 + ex_2) - \frac{1}{2} \omega^2 \left[ \sum_{i=1}^3 I_i \gamma_i^2 + M(l^2 + e^2 - l^2 x_1^2 - e^2 x_2^2 + 2el y_1 y_2 \cos \gamma) \right]$$

$$x_1 = \cos \alpha, \quad y_1 = \sin \alpha, \quad x_2 = \cos \sigma, \quad y_2 = \sin \sigma$$

Здесь  $\gamma_i$  ( $i=1, 2, 3$ ) — косинусы углов, образуемых нисходящей вертикалью с осями  $Z_i$ ,  $e$  — длина вектора  $e = OG = \{e_1, e_2, e_3\}^T$ , где  $e_i$  — проекции этого вектора на оси  $Z_i$ ,  $I_i$  — главные центральные моменты инерции.

<sup>1</sup> *Стороженко В. А.* Об устойчивости стационарных движений твердого тела вращения, подвешенного на струне в произвольной точке. — Препринт Ин-та матем. АН УССР, Киев, 1981, № 13. 36 с.

твердого тела,  $g$  — ускорение свободного падения,  $\alpha$  и  $\sigma$  — углы, образуемые соответственно струной и вектором  $e$  с нисходящей вертикалью,  $\gamma$  — угол, который образуют проекции струны и вектора  $e$  на горизонтальную плоскость.

По принципу Лаламбера в положении относительного равновесия действующие на тело силы — тяжести, натяжения струны и главный вектор даламберовых сил инерции — должны уравновешивать друг друга. Но если точка  $O$  лежит выше точки  $O_1$ , то равновесие сил возможно лишь в случае, когда сила натяжения струны направлена от точки  $O_1$  к точке  $O$ . При этом в самой струне должны возникнуть сжимающие усилия, что недопустимо [4]. Очевидно, что  $|\alpha| = 1/2\pi$  также невозможно, так как действующие на тело силы не будут уравновешивать друг друга. Кроме того, картина движения обладает симметрией относительно оси  $\xi$  (фиг. 1). Поэтому рассмотрим только значения  $0 \leq \alpha < 1/2\pi$ ,  $|\sigma| \leq \pi$ ,  $0 \leq \gamma \leq \pi$ . При таком выборе интервалов изменения углов  $\alpha$ ,  $\sigma$  получим  $0 < x_1 \leq 1$ ,  $0 \leq y_1 < 1$ ,  $|x_2| \leq 1$ ,  $|y_2| \leq 1$ .

Переменные  $x_j, y_j$  ( $j=1, 2$ ),  $\gamma_i$  ( $i=1, 2, 3$ ) связаны соотношениями

$$U_1 = \sum_{i=1}^3 \gamma_i^2 = 1, \quad U_2 = \sum_{i=1}^3 e_i \gamma_i - e x_2 = 0, \quad U_3 = x_1^2 + y_1^2 = 1, \quad U_4 = x_2^2 + y_2^2 = 1 \quad (1.1)$$

Значения переменных  $\gamma_i$  ( $i=1, 2, 3$ ),  $x_j, y_j$  ( $j=1, 2$ ),  $\gamma$ , для которых  $V$  принимает стационарные значения при условиях (1.1), соответствуют положениям относительного равновесия подвешенного на струне твердого тела [6] и введением множителей Лагранжа  $\lambda_k$  ( $k=1, 2, 3, 4$ ) могут быть определены из уравнений

$$\frac{\partial W}{\partial \gamma} = \frac{\partial W}{\partial x_1} = \frac{\partial W}{\partial x_2} = \frac{\partial W}{\partial y_1} = \frac{\partial W}{\partial y_2} = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial \gamma_1} = 0 \quad (1.2.3),$$

$$\frac{\partial W}{\partial \lambda_k} = 0 \quad (k=1, 2, 3, 4)$$

$$W = V + 1/2 \lambda_1 \omega^2 (U_1 - 1) + \lambda_2 M \omega^2 U_2 + 1/2 \lambda_3 M l \omega^2 (U_3 - 1) + 1/2 \lambda_4 M e \omega^2 (U_4 - 1) \quad (1.2)$$

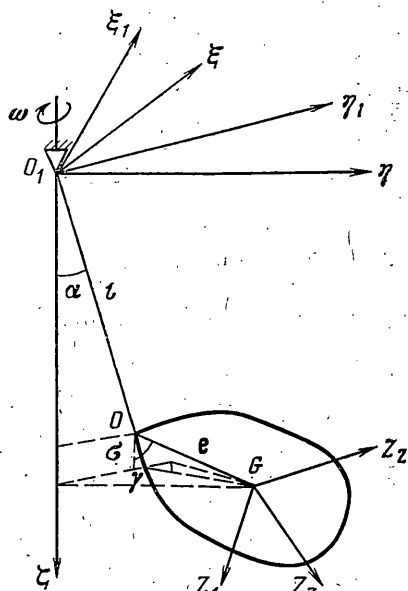
Первые восемь из уравнений (1.2) имеют вид

$$y_1 y_2 \sin \gamma = 0, \quad (\lambda_3 + l) \omega^2 x_1 - g = 0$$

$$(\lambda_4 + e) \omega^2 x_2 - g - \lambda_2 \omega^2 = 0, \quad e y_2 \cos \gamma - \lambda_3 y_1 = 0 \quad (1.3)$$

$$l y_1 \cos \gamma - \lambda_4 y_2 = 0, \quad (\lambda_1 - I_i) \gamma_i + M \lambda_2 e_i = 0 \quad (i=1, 2, 3)$$

Из первого уравнения системы (1.3) следует, что в положении относительного равновесия либо  $\gamma=0$ , либо  $\alpha=0$ , либо  $\sigma=0$ . Из фиг. 1 видно, что при  $\alpha=0$  без ограничения общности можно считать  $\gamma=0$ , а при  $\sigma=0$  угол  $\gamma$  не определен и потому доопределим его как  $\gamma=0$ .



Фиг. 1

Таким образом, во все время движения  $\gamma=0$ , т. е. точки  $O_1, O, G$  находятся в одной плоскости, проходящей через вертикаль  $\xi$  и струну. При этом центр масс всегда находится в одной полуплоскости со струной, как это следует из неравенства  $ly_1+ey_2 \geq 0$  в силу уравнений (1.3). Из тех же уравнений следует, что либо струна и вектор  $e$  вертикальны, либо они оба наклонены относительно вертикали. К аналогичным заключениям можно прийти и при помощи принципа Даламбера [1].

2. Рассмотрим случай, когда точка  $O$  находится на главной центральной оси инерции  $Z_1(e_1=e, e_2=e_3=0)$ , и исследуем положения относительного равновесия в предположении  $I_1 < I_2 < I_3$  (на струне подвешено тело продолговатой формы).

Уравнения (1.1), (1.3) в этом случае имеют три однопараметрических семейства решений. Первое:

$$\gamma_1 = x_2 = \pm 1, \quad x_1 = 1, \quad y_1 = y_2 = \gamma_2 = \gamma_3 = 0, \quad \lambda_3 = g\omega^{-2} - l, \quad (2.1)$$

$$\lambda_4 = \pm (\lambda_2 + g\omega^{-2}) - e, \quad \lambda_2 = \pm (I_1 - \lambda_1) M^{-1} e^{-1}, \quad (\lambda_1 \neq I_2, I_3)$$

$\lambda_1$  — произвольная величина. При этом в формулах (2.1) нужно одновременно брать знак минус или плюс.

Решения (2.1) соответствуют положениям относительного равновесия, когда струна и ось  $Z_1$  вертикальны.

Второе семейство представляется при помощи вспомогательной переменной  $\lambda_3$ :

$$\begin{aligned} \gamma_1 = x_2 &= M e g \lambda_3 (M e^2 + I_2 - I_1)^{-1} (\lambda_3 - \kappa_1)^{-1} [F(\lambda_3)]^{-1/2} \\ \gamma_3 &= 0, \quad x_1 = g(\lambda_3 + l)^{-1} [F(\lambda_3)]^{-1/2} \\ \lambda_1 &= I_2, \quad y_1 = \{1 - g^2(\lambda_3 + l)^{-2} [F(\lambda_3)]^{-1}\}^{1/2} \\ \lambda_4 &= e l \lambda_3^{-1}, \quad \gamma_2 = \pm \lambda_3 \{1 - g^2(\lambda_3 + l)^{-2} [F(\lambda_3)]^{-1}\}^{1/2} \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\lambda_2 = g \lambda_3 (I_1 - I_2) (M e^2 + I_2 - I_1)^{-1} (\lambda_3 - \kappa_1)^{-1} [F(\lambda_3)]^{-1/2}$$

$$\omega^4 = F(\lambda_3) = g^2 (I_2 - I_1) (2M e^2 + I_2 - I_1) \lambda_3^3 (\lambda_3 - \kappa_2) (M e^2 + I_2 - I_1)^{-2} \times \\ \times (\lambda_3^2 - e^2)^{-1} (\lambda_3 + l)^{-2} (\lambda_3 - \kappa_1)^{-2}$$

$$\kappa_1 = -M e^2 l (M e^2 + I_2 - I_1)^{-1}, \quad \kappa_2 = -2M e^2 l (2M e^2 + I_2 - I_1)^{-1}$$

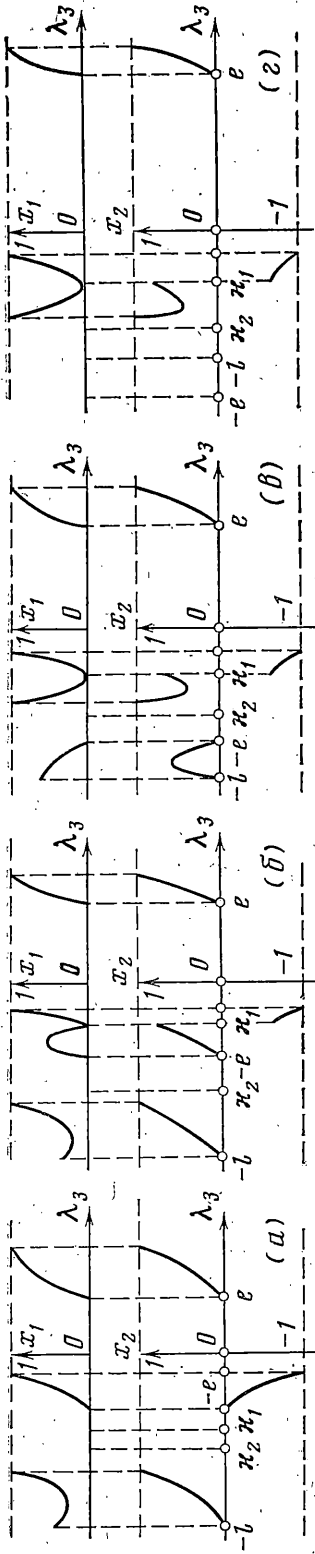
$$-l < \kappa_2 < \kappa_1 < 0 < e$$

Решения (2.2) соответствуют таким положениям относительного равновесия, при которых струна и вектор  $e$  наклонены относительно вертикали, а ось  $Z_3$  перпендикулярна плоскости, проходящей через ось  $\xi$  и струну.

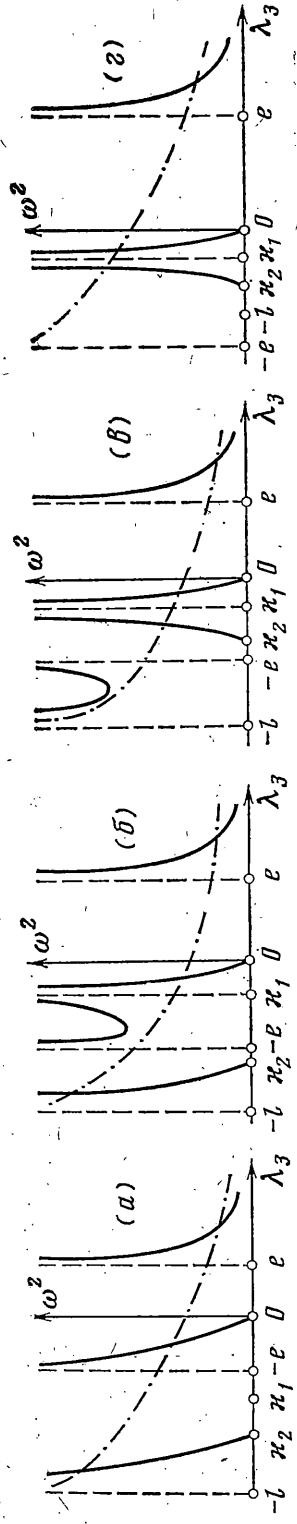
Третье семейство решений получается из (2.2) при замене  $\gamma_2, \gamma_3, I_2$  соответственно на  $\gamma_3, \gamma_2, I_3$  и описывает относительные равновесия, при которых ось  $Z_2$  перпендикулярна плоскости, проходящей через ось  $\xi$  и струну.

Исследуем множество положений относительного равновесия. Чтобы представить его в геометрически наглядной форме, построим бифуркационную диаграмму в виде графиков функций  $\alpha = \alpha(\omega^2)$ ,  $\sigma = \sigma(\omega^2)$ . Поскольку  $\gamma_i$  ( $i=1, 2, 3$ ) в формулах (2.2) выражаются через угол  $\sigma$ , то точки кривых  $\alpha = \alpha(\omega^2)$ ,  $\sigma = \sigma(\omega^2)$  будут полностью характеризовать положения тела и струны в зависимости от величины угловой скорости вращения.

Для первого семейства относительных равновесий  $\alpha = \sigma = 0$  или  $\alpha = 0$ ,  $\sigma = -\pi$ , а для второго и третьего функции  $\alpha = \alpha(\omega^2)$ ,  $\sigma = \sigma(\omega^2)$  заданы в параметрическом виде формулами (2.2). Вид графиков указанных функций для второго и третьего семейств будет один и тот же, так как заменой  $I_2$  на  $I_3$  в формулах (2.2) свойства функций не изменятся качественным образом. Поэтому бифуркационную диаграмму построим лишь для второго семейства относительных равновесий.

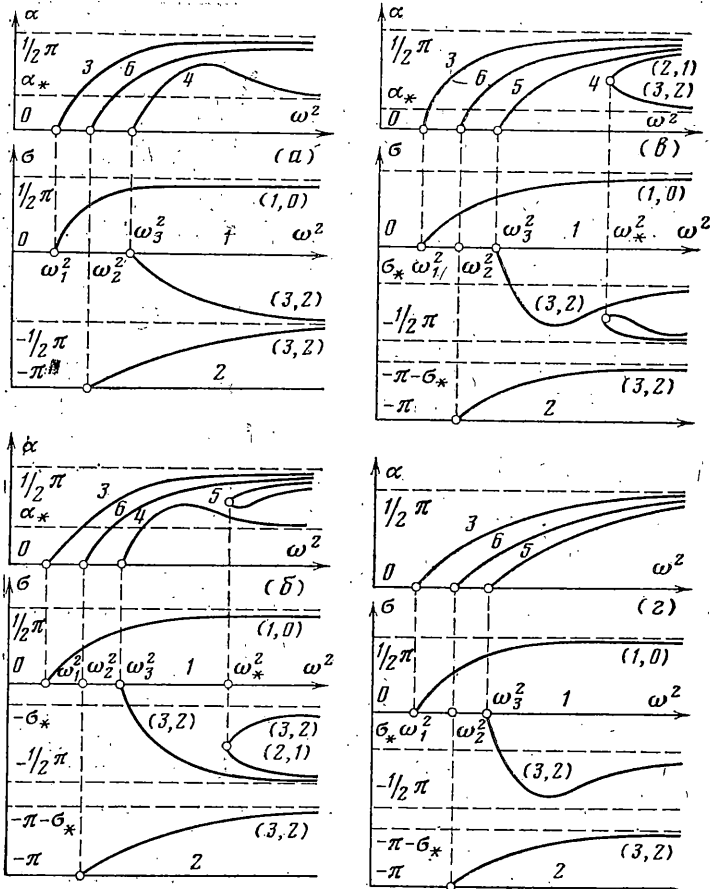


Фиг. 2



Фиг. 3

Предварительно изучим функции  $\omega^2 = [F(\lambda_3)]^{1/2}$ ,  $x_1 = x_1(\lambda_3)$ ,  $x_2 = x_2(\lambda_3)$ . Вид графиков этих функций в зависимости от соотношений параметров, характеризующих твердое тело и струну, представлен на фиг. 2, 3 (сплошные линии). В случае (а) имеем неравенство  $\kappa_1 < -e$ , или, что то же самое  $l > M^{-1}e^{-1}(Me^2 + I_2 - I_1)$ . В случае (б) выполняются неравенства  $\kappa_2 < -e < \kappa_1$ , т. е.  $1/2 M^{-1}e^{-1}(2Me^2 + I_2 - I_1) < l < M^{-1}e^{-1}(Me^2 + I_2 - I_1)$ . В случае (в) имеем



Фиг. 4

неравенства  $-l < -e < \kappa_2$ , которые равносильны условиям  $e < l < 1/2 M^{-1}e^{-1} \times (2Me^2 + I_2 - I_1)$ . Наконец, в случае (г) выполняется условие  $l < e$ .

Производные рассматриваемых функций не обращаются в нуль одновременно. Следовательно, функции  $\alpha = \alpha(\omega^2)$ ,  $\sigma = \sigma(\omega^2)$  не имеют особых точек. Точки самопересечения также отсутствуют. Поэтому бифуркационная диаграмма имеет вид, показанный на фиг. 4, причем случаи (а) — (г) на фиг. 4 соответствуют случаям (а) — (г) на фиг. 2, 3.

На фиг. 4 введены следующие обозначения:

$$\alpha_* = \arccos(1 - e^2 l^{-2})^{1/2}, \quad \sigma_* = -\arccos[1 - M^2 e^2 l^2 (Me^2 + I_2 - I_1)^{-2}]^{1/2}$$

$$\omega_1^2(I_2) = g[2l(I_2 - I_1)]^{-1} \{ Me(l+e) + I_2 - I_1 + [(Mel + Me^2 + I_2 - I_1)^2 + 4Mel(I_2 - I_1)]^{1/2} \}$$

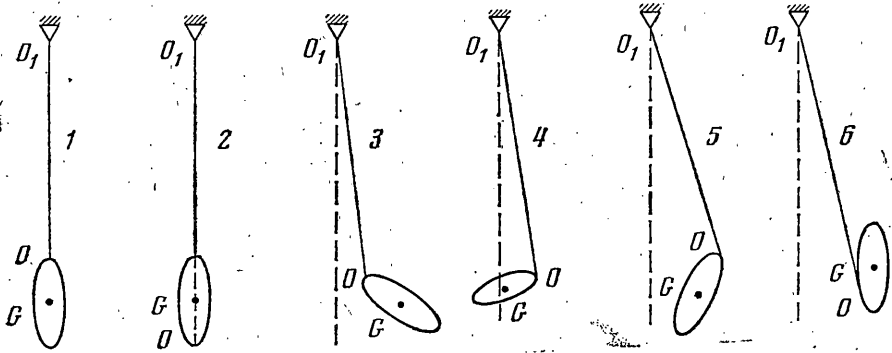
$$\omega_2^2(I_2) = g[2l(I_2 - I_1)]^{-1} \{ Me(e-l) + I_2 - I_1 + [(Me^2 - Mel + I_2 - I_1)^2 + 4Mel(I_2 - I_1)]^{1/2} \}$$

$$\omega_3^2(I_2) = g[2l(I_2 - I_1)]^{-1} \{ Me(l+e) + I_2 - I_1 + [(Me^2 + Mel + I_2 - I_1)^2 - 4Mel(I_2 - I_1)]^{1/2} \}$$

$$\omega_*^2(I_2) = [F(\kappa_*)]^{1/2}, \quad \left. \frac{dF}{d\lambda_3} \right|_{\lambda_3 = \kappa_*} = 0$$

Значения  $\omega_1(I_2)$ ,  $\omega_3(I_2)$  получаются из формул (2,2), если в них подставить значения  $x_1=x_2=1$  и исключить  $\lambda_3$  с учетом равенства  $[F(\lambda_3)]^{1/2} = \omega$ . Аналогично вычисляется значение  $\omega_2(I_2)$ , при этом исходим из равенств  $x_1=-x_2=1$ .

Соотношение бифуркационных значений  $\omega_i(I_2)$  ( $i=1, 2, 3$ ) устанавливается при помощи фиг. 2, 3. Величины  $\omega_i(I_2)$  ( $i=1, 2, 3$ ) равны значениям  $\omega$  в точках пересечения графиков функций  $\omega^2=[F(\lambda_3)]^{1/2}$  и  $\omega^2=g(\lambda_3+l)^{-1}$  (последний показан на фиг. 3 в виде штрихпунктирной линии). Поэтому, чем больше в точке пересечения значение  $\lambda_3$ , тем меньше



Фиг. 5

соответствующее значение  $\omega$ . Тогда из фиг. 2 с учетом равенства  $y_2=\lambda_3 e^{-1}y_1$  следуют неравенства  $\omega_1(I_2) < \omega_2(I_2) < \omega_3(I_2)$ .

На фиг. 5 изображены типы относительных равновесий, существующие при разных значениях угловой скорости  $\omega$ . Среди них относительные равновесия типа 1, 2 отвечают первому семейству решений и существуют при любых значениях  $\omega$ , причем  $\alpha=\sigma=0$  для типа 1 и  $\alpha=0, \sigma=-\pi$  для типа 2. Второму семейству решений соответствуют относительные равновесия типа 3-6 на фиг. 5. Их классификация проводится при помощи формулы  $y_2=\lambda_3 e^{-1}y_1$ , из которой следует, что на ветвях второго семейства относительных равновесий, где  $\lambda_3 > e$ , имеем  $\sigma > \alpha > 0$  (тип 3); где  $\lambda_3 < -e$  имеем  $-\sigma > \alpha > 0$  (тип 4); где  $-e < \lambda_3 < 0$ , получаем  $0 < -\sigma < \alpha$  при  $x_2 > 0$  (тип 5) и  $-\pi + \alpha > \sigma > -\pi$  при  $x_2 < 0$  (тип 6). Типы относительных равновесий указаны на бифуркационной диаграмме (фиг. 4) на соответствующих ветвях кривой относительных равновесий цифрами 1-6 вне круговых скобок.

3. Полученная бифуркационная диаграмма дает ясное представление об относительных равновесиях, соответствующих второму семейству решений, в зависимости от соотношений параметров, характеризующих твердое тело и струну. Для третьего семейства решений, как уже отмечалось выше, бифуркационная диаграмма имеет совершенно аналогичный вид с той лишь разницей, что критические значения величин  $\sigma$ ,  $\omega$  будут сдвинуты по сравнению с прежними значениями. В частности, в силу неравенств  $I_1 < I_2 < I_3$  выполняются неравенства  $\sigma_*(I_3) > \sigma_*(I_2)$ ,  $\omega_2(I_3) < \omega_2(I_2) < \omega_3(I_2)$ ,  $\omega_1^2(I_3) < \omega_1^2(I_2) < g/l < \omega_2^2(I_3) < \omega_3^2(I_3) < \omega_3^2(I_2)$ .

Для выяснения полной геометрической картины относительных равновесий осталось установить взаиморасположение ветвей второго и третьего семейств относительных равновесий.

Рассмотрим пространство переменных  $\alpha, \sigma, \gamma, \gamma_i$  ( $i=1, 2, 3$ ),  $\omega^2$ , в котором положениям относительного равновесия соответствуют точки кривой  $\Gamma$ :  $\alpha=\alpha(\omega^2)$ ,  $\sigma=\sigma(\omega^2)$ ,  $\gamma=0$ ,  $\gamma_i=\gamma_i(\omega^2)$  ( $i=1, 2, 3$ ). Построенные бифуркационные диаграммы представляют проекции пространственной кривой  $\Gamma$  на плоскости  $(\alpha, \omega^2)$ ,  $(\sigma, \omega^2)$ . При этом ветви кривой  $\Gamma$ , отвечающие

второму семейству решений, расположены в гиперплоскости  $\gamma_3=0$ , а ветви, соответствующие третьему семейству решений, — в гиперплоскости  $\gamma_2=0$ . Эти гиперплоскости пересекаются вдоль многообразия  $\alpha=\gamma=\gamma_2=\gamma_3=0$ ,  $\gamma_1=\pm 1$ ,  $\sigma=0$ ,  $-\pi$ , точки которой соответствуют первому семейству решений. Поэтому ветви кривой  $\Gamma$ , отвечающие второму и третьему семействам решений, не пересекаются в силу неравенства  $I_2 < I_3$ .

Следовательно, не существуют точки ветвления, отличные от известных точек бифуркаций. Это позволяет рассматривать бифуркационные диаграммы второго и третьего семейств решений отдельно, вне зависимости друг от друга.

Таким образом, для подвешенного на струне несимметричного твердого тела в случае  $e_1=e$ ,  $e_2=e_3=0$ ,  $I_1 < I_2 < I_3$  существуют только относительные равновесия типа 1–6 (фиг. 5). При этом относительные равновесия типа 3–6 для второго и третьего семейств решений отличаются поворотом осей  $Z_2, Z_3$  вокруг оси  $Z_1$  на угол  $1/2\pi$ . Они появляются поочередно при значениях угловой скорости  $\omega_i(I_2)$ ,  $\omega_i(I_3)$  ( $i=1, 2, 3$ ),  $\omega_*(I_2)$ ,  $\omega_*(I_3)$ . Максимальное число возможных положений относительного равновесия равно двенадцати.

В случае осесимметричного твердого тела ( $I_2=I_3$ ) бифуркационные диаграммы второго и третьего семейств решений будут совпадать целиком. Максимальное число ветвей относительных равновесий равно семи; среди них только для пяти ветвей выполняется условие  $|\sigma| < 1/2\pi$ . Их существование показано в [3]. В данной работе дополнительно к известным результатам установлено и взаиморасположение указанных пяти ветвей относительных равновесий (фиг. 4).

4. Исследуем устойчивость найденных положений относительного равновесия подвешенного на струне несимметричного твердого тела.

Вековое уравнение для нашей задачи имеет вид [7]:  $\lambda^4 - \Delta_1 \lambda^3 + \Delta_2 \lambda^2 - \Delta_3 \lambda + \Delta_4 = 0$ , где  $\Delta_k$  ( $k=1, 2, 3, 4$ ) — суммы всевозможных диагональных миноров  $(k+8)$ -го порядка определителя

$$\Delta = \begin{vmatrix} Q & B \\ B^T & A \end{vmatrix}, \quad A = \|a_{kj}\|_{k=1}^8 = \left\| \left( \frac{\partial^2 W}{\partial v_k \partial v_j} \right)_0 \right\|$$

$$B = \|b_{kj}\|_{k=1}^8, \quad j=3 = \left\| \left( \frac{\partial U_k}{\partial v_j} \right)_0 \right\|$$

$$v_1=\gamma_1, \quad v_2=x_1, \quad v_3=\gamma_2, \quad v_4=x_2, \quad v_5=\gamma_3, \quad v_6=y_1, \quad v_7=y_2, \quad v_8=\gamma$$

окаймляющих его главный диагональный минор четвертого порядка  $Q$ , состоящий из нулей. Здесь символ  $T$  означает операцию транспонирования, а символ  $(\dots)_0$  указывает, что соответствующая величина вычисляется для решения системы (1.2). Определитель  $\Delta = \Delta_4$  равен якобиану системы (1.2). Имеем

$$\begin{aligned} a_{11} &= (\lambda_1 - I_1) \omega^2, & a_{22} &= Ml \omega^2 (\lambda_3 + l), & a_{33} &= (\lambda_1 - I_1) \omega^2, & a_{44} &= Me \omega^2 (\lambda_4 + e) \\ a_{55} &= (\lambda_1 - I_3) \omega^2, & a_{66} &= Ml \omega^2 \lambda_3, & a_{77} &= Me \omega^2 \lambda_4, & a_{67} &= -Mel \omega^2, & a_{88} &= Mel \omega^2 y_1 y_2 \\ b_{11} &= 2\gamma_1, & b_{13} &= 2\gamma_2, & b_{15} &= 2\gamma_3, & b_{21} &= e, & b_{24} &= -e, & b_{32} &= 2x_1, & b_{36} &= 2y_1, & b_{44} &= 2x_2, & b_{47} &= 2y_2 \end{aligned}$$

а остальные  $a_{kj}, b_{kj}$  равны нулю.

Вычисление величин  $\Delta_k$  ( $k=1, 2, 3, 4$ ) требует больших усилий в связи с высоким порядком определителя  $\Delta$ . Поэтому далее будем пользоваться эквивалентными им (при определении степени неустойчивости [7]) величинами  $D_k$  ( $k=1, 2, 3, 4$ ), где  $D_k$  — главный диагональный минор  $(k+8)$ -го порядка определителя  $\Delta$  ( $D_4 = \Delta$ ).

Непосредственным вычислением убеждаемся, что якобиан  $\Delta = 0$  для первого семейства решений. Следовательно, для него степень неустойчивости не определена. Исследование устойчивости этого семейства следует проводить в других переменных, поскольку равенство  $\Delta = 0$  является следствием

вырождения выбранных переменных для первого семейства решений. Далее ограничимся исследованием устойчивости остальных семейств решений. Для второго семейства решений получаем

$$\begin{aligned}
 D_1 &= 64\omega^2 e^2 y_1^2 y_2^2 \gamma_2^2 (I_2 - I_3), \\
 D_2 &= M\omega^2 l y_1^{-2} D_1 [\lambda_3 + l - l(Me^2 + I_2 - I_1)^2 (\lambda_3^2 - e^2) (\lambda_3 - \kappa_1)^2 (I_2 - I_1)^{-4} \times \\
 &\quad \times (2Me^2 + I_2 - I_1)^{-1} \lambda_3^{-3} (\lambda_3 - \kappa_2)^{-1}] \\
 D_3 &= M^{-1} \omega^{-2} e^{-1} l^{-1} y_1^{-1} y_2^{-1} D_4, \quad D_4 = 64M^2 \omega^2 g^2 l^2 e^{-1} (I_3 - I_2) (I_2 - I_1) \times \\
 &\quad \times (2Me^2 + I_2 - I_1) (Me^2 + I_2 - I_1)^{-1} y_1^3 \gamma_2^2 \lambda_3^3 (\lambda_3 - \kappa_2) (\lambda_3 + l)^{-1} (\lambda_3 - \kappa_1)^{-1} \frac{d\omega^2}{d\lambda_3}
 \end{aligned}
 \tag{4.1}$$

Знаки величин  $D_k$  ( $k=1, 2, 3, 4$ ) на каждой ветви семейства решений (2.2) можно установить при помощи фиг. 2–4. По ним, согласно правилу Декарта, определено число отрицательных корней векового уравнения, т. е. степень неустойчивости  $\chi$ . Значения  $\chi$  на ветвях относительных равновесий (2.2) указаны на фиг. 4 в круглых скобках первой цифрой.

Исследование устойчивости третьего семейства решений проводится аналогично. Выражения для величин  $D_k$  ( $k=1, 2, 3, 4$ ) получаются из формул (4.1), где всюду вместо  $I_2, I_3, \gamma_2$  надо писать соответственно  $I_3, I_2, \gamma_3$ . Степень неустойчивости на ветвях указаны на фиг. 4 в круглых скобках второй цифрой.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Ишлинский А. Ю., Малашенко С. В., Стороженко В. А., Темченко М. Е., Шишкин П. Г. Метод балансировки вращающихся тел на струнном приводе.— Изв. АН СССР. МТТ, 1979, № 5, с. 3–18.
2. Ишлинский А. Ю., Малашенко С. В., Стороженко В. А., Темченко М. Е., Шишкин П. Г. О стационарных движениях подвешенного на струне твердого тела при вертикальном расположении одной из его главных центральных осей инерции.— Изв. АН СССР. МТТ, 1980, № 2, с. 34–45.
3. Бугаенко Г. О., Велигоцкий Г. Г. Формы динамической равновесии одной механической системы.— Наук. зап. Черкаськ. пед. ін-ту, сер. фіз.-мат. н., 1963, т. 17, с. 21–37.
4. Ишлинский А. Ю., Стороженко В. А., Темченко М. Е. О движении осесимметричного твердого тела, подвешенного на струне.— Изв. АН СССР. МТТ, 1979, № 6, с. 3–16.
5. Возлинский В. И. О бифуркации стационарных движений консервативных систем с двумя циклическими координатами.— ПММ, 1967, т. 31, вып. 5, с. 844–847.
6. Рубановский В. Н. О бифуркации и устойчивости стационарных движений систем с известными первыми интегралами.— Задачи исследования устойчивости и стабилизации движения: Сб. статей. М.: ВЦ АН СССР, 1975, вып. 1, с. 121–200.
7. Рубановский В. Н., Степанов С. Я. О теореме Рауса и методе Четаева построения функции Ляпунова из интегралов уравнений движения.— ПММ, 1969, т. 33, вып. 5, с. 904–912.

Тбилиси

Поступила в редакцию  
11.V.1983