

О СПЕКТРЕ НОРМАЛЬНЫХ ВОЛН В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКЕ

ЛОСИН Н. А., ПРОЦЕНКО А. М.

Рассматривается краевая задача о распространении длинных волн вдоль образующей замкнутой круговой цилиндрической оболочки. Для отыскания волнового спектра использован подход, аналогичный [1, 2]. При помощи асимптотических представлений краевая задача сведена к спектральной задаче для квадратичного пучка операторов. Предложен способ формирования уравнений распространения нормальных волн на ЭВМ, позволяющий в итоге вычислять собственные числа задачи. Исследована зависимость скорости распространения волн от частоты. Приводятся соответствующие графики для фазовых скоростей.

1. **Постановка задачи.** Запишем динамические уравнения Ламе в операторном виде относительно неизвестного вектора перемещений \mathbf{u} в цилиндрической системе координат (r, θ, z, t) :

$$\{L(\partial_r^2, r^{-1}\partial_r, r^{-1}\partial_\theta, \partial_z^2) - \gamma_0 \partial_t^2\} \mathbf{u} = 0 \quad (1)$$

В силу окружной периодичности представим решение в виде ряда Фурье по θ , а вектор $\mathbf{u}_n = \{u_r, iu_\theta, u_z\}^T$ — в виде интеграла типа Фурье

$$\mathbf{u}(r, \theta, z, t) = \sum_n \mathbf{u}_n(r, z, t) e^{-in\theta} \quad (2)$$

$$\mathbf{u}_n = \frac{d^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[\frac{is(z, t, \omega)}{d}\right] \mathbf{v}(\rho, \omega) d\omega$$

Здесь γ_0 — объемная плотность, d — радиус срединной поверхности, 2δ — толщина стенки оболочки, $\chi = \delta/d$, a и c — скорости распространения объемной и сдвиговой волн, $\gamma = c^2/a^2$, $\gamma_1 = \gamma^{-1}$, $\rho = \omega r/d$ — безразмерная координата, $s(z, t, \omega) = \omega ct - \lambda(\omega)z$ — фаза волны, $\omega_p = \omega c/d$ — реальная частота колебаний, $\lambda(\omega)/d$ — волновое число, $\lambda(\omega)$ — неизвестный волновой спектр, подлежащий определению, $\omega \in (-\infty, \infty)$.

Подставим (2) в (1). Заменим операторы ∂_t и ∂_z соответственно символами $i\omega/d$ и $-i\lambda/d$ и учтем, что система (1) является однородной с порядком минус два. После этого уравнения Ламе сводятся аналогично [1] к системе трех обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\mathbf{v}' + N\mathbf{v}' + C\mathbf{v} = 0, \quad N = C_0^{-1}(D_0/\rho - ibG_0), \quad C_0 = \text{diag}(\gamma_1, 1, 1) \quad (3)$$

$$C = C_0^{-1}(F_0/\rho^2 - ibH_0/\rho - b^2S_0 + \omega^2I), \quad S_0 = \text{diag}(1, 1, \gamma_1)$$

$$D_0 = \begin{vmatrix} \gamma_1 & -n(\gamma_1 - 1) & 0 \\ n(\gamma_1 - 1) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad G_0 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \gamma_1 - 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ \gamma_1 - 1 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

$$F_0 = \begin{vmatrix} -n^2 - \gamma_1 & n(\gamma_1 + 1) & 0 \\ n(\gamma_1 + 1) & -n^2\gamma_1 - 1 & 0 \\ 0 & 0 & -n^2 \end{vmatrix}, \quad H_0 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n(\gamma_1 - 1) \\ \gamma_1 - 1 & -n(\gamma_1 - 1) & 0 \end{vmatrix}$$

Здесь $b = \lambda/\omega$, $v = \omega/\text{Re } \lambda$ — фазовая скорость; штрихом обозначено дифференцирование по переменной ρ . Считаем, что вектор \mathbf{v} зависит от n , как от параметра, и является регулярной функцией от ρ .

Вводим вектор, соответствующий при $\rho = \text{const}$ вектору напряжений $\boldsymbol{\tau}(\rho, \cdot) = \gamma_0 \{\sigma_{\rho\rho}/a^2, i\sigma_{\rho\theta}/c^2, \sigma_{\rho z}/c^2\}^T$.

После аналогичных преобразований представим его в виде

$$\boldsymbol{\tau}(\rho, \cdot) = \gamma_0 d(\mathbf{v}' + M\mathbf{v}), \quad M = A_0/\rho - ibB_0 \quad (4)$$

$$A_0 = \begin{vmatrix} 1 - 2\gamma & -n(1 - 2\gamma) & 0 \\ n & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad B_0 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 - 2\gamma \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Краевыми условиями для системы (3) является отсутствие напряжений на свободных поверхностях

$$\mathbf{v}' + M\mathbf{v} = 0, \quad \rho = \omega(1 \pm \chi) \quad (5)$$

2. **Спектральная задача.** Система (3) вместе с краевыми условиями (5) образует спектральную задачу для квадратичного пучка операторов, аналогичную [1]. Сохраняя сделанные там предположения относительно последовательности $\{\lambda_n(\omega)\}$, будем строить длинноволновую аппроксимацию квадратичного пучка операторов в регулярных точках спектра. Считаем, что длины волны сравнимы с радиусом срединной поверхности оболочки ρ_0 и $|\omega| = O(1)$. Тогда уравнение (3) определено в узкой области $\rho \in (\omega - \omega\chi, \omega + \omega\chi)$, $\rho_0 = \omega$.

Действуем далее по аналогии с [1, 2]. Обозначим

$$\tau^+ = \tau(\rho_0 + \omega\chi, \cdot) = 0, \quad \tau^- = \tau(\rho_0 - \omega\chi, \cdot) = 0 \quad (6)$$

Разложим $\tau(\rho, \cdot)$ в ряд Тейлора около срединной поверхности $\rho_0 = \omega$ и, комбинируя (6) в виде $\tau^+ + \tau^- = 0$, $\tau^+ - \tau^- = 0$, получим

$$\tau(\omega, \cdot) + \frac{1}{2}\omega^2\chi^2\tau''(\omega, \cdot) = O(\omega^4\chi^4), \quad \tau'(\omega, \cdot) + \frac{1}{6}\omega^2\chi^2\tau'''(\omega, \cdot) = O(\omega^4\chi^4)$$

Обозначим $\varepsilon^2 = \omega^2\chi^2$, $h = \varepsilon^2/6$, $h_1 = 3h$.

Краевую задачу (3), (5) окончательно формулируем так:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}'' + N\mathbf{v}' + C\mathbf{v} &= 0, \quad \omega(1 - \chi) < \rho < \omega(1 + \chi) \\ h_1\tau'' + \tau &= O(\varepsilon^4), \quad h\tau''' + \tau' = O(\varepsilon^4), \quad \rho = \omega(1 \pm \chi) \end{aligned} \quad (7)$$

Решим ее следующим образом. Дифференцируем первое уравнение (7) два раза и выразим \mathbf{v}'' , \mathbf{v}''' , \mathbf{v}^{IV} через \mathbf{v}' и \mathbf{v} :

$$\begin{aligned} \mathbf{v}'' + N\mathbf{v}' + C\mathbf{v} &= 0, \quad \mathbf{v}'' = \Phi_0(\mathbf{v}', \mathbf{v}) \\ \mathbf{v}''' + N\mathbf{v}'' + D\mathbf{v}' + F\mathbf{v} &= 0, \quad \mathbf{v}''' = \Phi_1(\mathbf{v}', \mathbf{v}) \\ \mathbf{v}^{IV} + N\mathbf{v}''' + G\mathbf{v}'' + H\mathbf{v}' + E\mathbf{v} &= 0, \quad \mathbf{v}^{IV} = \Phi_2(\mathbf{v}', \mathbf{v}) \end{aligned}$$

Из (4) найдем τ' , τ'' , τ''' и через \mathbf{v}'' , \mathbf{v}''' , \mathbf{v}^{IV} представим их как функции от \mathbf{v}' и \mathbf{v} . Все результаты отнесем к срединной поверхности $\rho = \rho_0 = \omega$:

$$\begin{aligned} \tau &= \gamma_0 d(\mathbf{v}' + M\mathbf{v}), \quad \tau = \Psi_0(\mathbf{v}', \mathbf{v}) \\ \tau' &= \gamma_0 d(\mathbf{v}'' + M\mathbf{v}' + A\mathbf{v}), \quad \tau' = \Psi_1(\mathbf{v}', \mathbf{v}) \\ \tau'' &= \gamma_0 d(\mathbf{v}''' + M\mathbf{v}'' + B\mathbf{v}' + R\mathbf{v}), \quad \tau'' = \Psi_2(\mathbf{v}', \mathbf{v}) \\ \tau''' &= \gamma_0 d(\mathbf{v}^{IV} + M\mathbf{v}''' + S\mathbf{v}'' + U\mathbf{v}' + W\mathbf{v}), \quad \tau''' = \Psi_3(\mathbf{v}', \mathbf{v}) \end{aligned}$$

Представим символически τ'' в виде линейной комбинации \mathbf{v}' и \mathbf{v} : $\tau'' = \Psi_2(\mathbf{v}', \mathbf{v}) = \gamma_0 d(K\mathbf{v}' + P\mathbf{v})$.

Подставим τ'' и τ в (7) и решим его относительно \mathbf{v}' в предположении, что $|\omega^2\chi^2| \ll 1$:

$$(I + h_1K)\mathbf{v}' + (M + h_1P)\mathbf{v} = O(\varepsilon^4), \quad \mathbf{v}' = -[M + h_1(P - KM)]\mathbf{v} + O(\varepsilon^4) \quad (8)$$

Подставляя теперь в (7) \mathbf{v}' из (8), получаем систему линейных алгебраических уравнений $[T_0(\lambda) + hT_1(\lambda)]\mathbf{v} = O(\varepsilon^4)$. Считая здесь величины в правой части малыми, приходим к спектральной задаче для аналитически возмущенного квадратичного пучка матриц [3]:

$$T(\lambda) = T_0(\lambda) + hT_1(\lambda) \quad (9)$$

$$T_0(\lambda) = (M - N)M - A + C \quad (10)$$

$$T_1(\lambda) = 3[(M - N)L_1 - P_1] + K_1M \quad (11)$$

$$L_1 = (NC - F) - MC + R - [(N^2 - D) - MN + B]M$$

$$P_1 = GC - E + (M - N)(NC - F) - SC + W$$

$$K_1 = GN - H + (M - N)(N^2 - D) - SN + U$$

Пучок (10) представляет собой регулярную часть возмущения. Он является квадратичным по λ и совпадает с соответствующим пучком (2.7) из [1]:

$$T_0(\lambda) = P_0 - i\lambda K_0 - \lambda^2 L_0 \quad (12)$$

Там же приведены выражения для матричных коэффициентов P_0 , K_0 , L_0 . Пучок (11) соответствует сингулярному возмущению и является матричным полиномом четвертой степени по λ :

$$T_1(\lambda) = \sum_{h=0}^4 (-i\lambda)^h T_{1h} \quad (T_{1h} - \text{матрицы порядка } 3 \times 3) \quad (13)$$

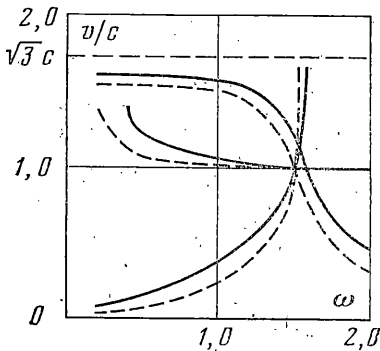
Собственные числа задачи находятся из характеристического уравнения

$$|T_0(\lambda) + hT_1(\lambda)| = 0 \quad (14)$$

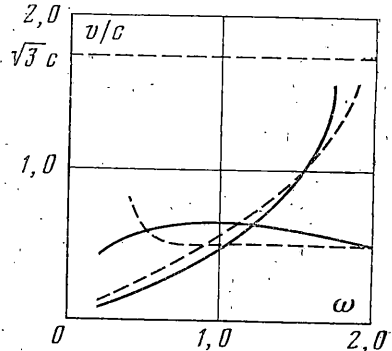
которое в общем случае есть полином двенадцатого порядка по четным степеням λ . Учитывая малость h и коэффициентов при λ^{10} и λ^{12} , окончательно приводим (14) к виду $Q_6(\lambda) + hQ_8(\lambda) = 0$. Здесь Q_6 и Q_8 — скалярные многочлены 6-й и 8-й степени по λ . Алгоритм реализован таким образом, что работа по вычислению матричных коэффициентов в (12), (13), формированию характеристического уравнения (14) и его решению выполняется на ЭВМ.

3. Анализ результатов. На ЭВМ была численно исследована зависимость фазовой скорости от частоты для следующих значений параметров: $\gamma_0 = 7,5 \cdot 10^{-3}$ кг/см³, $E_0 = 2 \cdot 10^6$ кг/см² — модуль упругости, $\nu = 0,25$ — коэффициент Пуассона, $\gamma = 1/3$, $d = 5$ см.

На фиг. 1–3 показаны графики скоростей для $n=0, 1, 2, 3, 4$; $\chi = 0,05$ и $0,1$. Графики построены в координатах $(\omega, v/c)$, где $v = \omega / \text{Re } \lambda_n$ — фазовая скорость волны, c — скорость сдвиговой волны, а частота ω связана с реальной частотой возмущения ω_p соотношением $\omega_p = \omega c/d$.



Фиг. 1



Фиг. 2

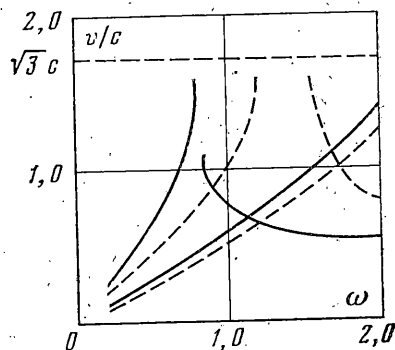
Эксперимент показал, что три волны возмущения могут распространяться только по недеформированной в окружном направлении оболочке, т. е. при $n=0$ (фиг. 1). Этим волнам соответствуют три различных корня уравнения (14), удовлетворяющие условиям излучения и расположенные в правом нижнем координатном ортанте

комплексной плоскости. Две из них распространяются со скоростями, близкими к скоростям объемной и сдвиговой волн в упругой среде. При этом первая при больших частотах затухает, а вторая движется с постоянной скоростью. Скорость третьей волны возрастает от нуля и достигает предельной. На фиг. 1 сплошная линия соответствует значению $\chi=0,1$, а штриховая — $\chi=0,05$.

Для деформированной оболочки ($n>0$) результаты качественно отличаются. В этом случае третья волна отсутствует и реальное возмущение распространяется вдоль оболочки с двумя скоростями (фиг. 2, 3).

На фиг. 2 $\chi=0,1$. Сплошная линия отвечает $n=1$, а штриховая — $n=2$. Скорость первой волны возрастает (при малых частотах почти линейно) и приближается к предельной. Скорость второй волны практически не меняется.

На фиг. 3 $\chi=0,1$. Сплошная линия соответствует $n=3$, а штриховая — $n=4$. Скорость первой волны быстро достигает предельной, а затем затухает и стабилизируется. Скорость второй волны медленно растет почти линейно.



Фиг. 3

ЛИТЕРАТУРА

1. Проценко А. М. Асимптотика волновых задач для цилиндрической оболочки.— ПММ, 1980, т. 44, вып. 3, с. 507—515.
2. Проценко А. М. Распространение волн по цилиндрической оболочке.—Изв. АН СССР. МТТ, 1979, № 6, с. 114—119.
3. Ланкастер П. Теория матриц. М.: Наука, 1978. 280 с.

Москва

Поступила в редакцию
29.VI.1983