

## ЛИТЕРАТУРА

1. Гузь А. Н., Чернышенко И. С., Чехов Вал. Н., Чехов Вик. Н., Шнеренко К. И. Методы расчета оболочек. Т. 1. Теория тонких оболочек, ослабленных отверстием. Киев: Наук. думка, 1980. 635 с.
2. Hegarty R. F., Ariman T. Elasto-dynamic analysis of rectangular plates with circular holes.— Internat. J. Solids and Structures, 1975, v. 11, No. 7/8, p. 895–906.
3. Takahashi S. Vibration of rectangular plates with circular holes.— Bull. JSME, 1958, v. 1, No. 4, p. 380–385.
4. Ariman T., Hegarty R. F. Seismic analysis of cracked reactor vessels.— Nuc. Eng. Design, 1974, v. 29, No. 1, p. 89–109.

Запорожье

Поступила в редакцию  
3.V.1983

УДК 539.3

### О ФОРМЕ БЕЗМОМЕНТНОЙ РАВНОПРОЧНОЙ ОБОЛОЧКИ МИНИМАЛЬНОЙ МАССЫ

ТИМОНИН А. М.

Рассматривается задача минимизации массы замкнутой в вершине безмоментной равнопрочной оболочки вращения, имеющей заданный внутренний объем при заданном диаметре экватора. Получены необходимые условия оптимальности. Решение задачи оптимизации сводится к численному интегрированию системы дифференциальных уравнений. Проведен анализ полученных результатов.

Рассмотрим замкнутую в вершине безмоментную оболочку вращения, нагруженную внутренним давлением  $p$ . Выражения для меридиональных и окружных усилий имеют вид [1]:

$$T_1 = pR_2/2, \quad T_2 = T_1(2 - R_2/R_1) \quad (1)$$

Здесь  $R_1, R_2 = r/\sin \theta$  — радиусы кривизны срединной поверхности,  $r(\theta)$  — радиус параллельного круга,  $\theta$  — угол между нормалью к срединной поверхности и осью вращения оболочки.

Масса  $M$  и внутренний объем оболочки  $V$  определяются выражениями

$$M = 2\pi\rho \int_0^{\pi/2} rR_1 h \, d\theta, \quad V = \pi \int_0^{\pi/2} r^2 R_1 \sin \theta \, d\theta$$

где  $h(\theta)$  — толщина оболочки,  $\rho$  — плотность материала.

Определим форму оболочки, имеющей минимальную массу  $M$  при заданных значениях внутреннего объема  $V$  и радиуса экватора  $a$ , в любой точке которой выполняется условие прочности в форме Мизеса

$$T_1^2 - T_1 T_2 + T_2^2 = \sigma_*^2 h^2 \quad (2)$$

где  $\sigma_*$  — допустимое напряжение для материала оболочки.

Используя зависимости (1), (2), получаем выражение для толщины оболочки в виде  $h = \frac{1}{2} p R_2 (3 - 3R_2/R_1 + R_2^2/R_1^2)^{1/2} / \sigma_*$ . Тогда масса оболочки с точностью до постоянного множителя дается функционалом

$$M \propto \int_0^{\pi/2} r R_2 (3R_1^2 - 3R_1 R_2 + R_2^2)^{1/2} \, d\theta \quad (3)$$

Форма оболочки описывается уравнениями

$$r' = R_1 \cos \theta, \quad y' = -R_1 \sin \theta \quad (4)$$

где  $y(\theta)$  — координата, отсчитываемая по оси вращения (фиг. 1); штрихом обозначено дифференцирование по  $\theta$ .

Граничные условия имеют вид  $r(0)=0$ ,  $r(\pi/2)=a$ ,  $y(\pi/2)=0$ .

Задача заключается в выборе такой формы меридиана, характеризуемой функцией  $R_1(\theta)$ , которая минимизирует функционал (3) при наличии первого условия в (4) и при заданном значении функционала  $V$ .

Указанная изопериметрическая задача с неголономной связью приводится к задаче безусловного экстремума для функционала [2]:

$$J = \int_0^{\pi/2} H(r, r', R_1, \theta) d\theta \quad H = rR_2(3R_1^2 - 3R_1R_2 + R_2^2)^{1/2} + \lambda(R_1 \cos \theta - r') + \mu r^2 R_1 \sin \theta$$

где  $\lambda(\theta)$  и  $\mu$  — множители Лагранжа.

Функции  $R_1(\theta)$  и  $r(\theta)$  должны удовлетворять уравнениям Эйлера и первому уравнению связи в (4):

$$\partial H / \partial R_1 = 0, \quad (d/d\theta)(\partial H / \partial r') - \partial H / \partial r = 0 \quad (5)$$

Первое уравнение (5) приводит к зависимости

$$^{3/2}rR_2(2R_1 - R_2)(3R_1^2 - 3R_1R_2 + R_2^2)^{-1/2} + \lambda \cos \theta + \mu r^2 \sin \theta = 0 \quad (6)$$

Обозначив

$$z = (\lambda \cos \theta + \mu r^2 \sin \theta) / (rR_2) \quad (7)$$

из уравнения (6) найдем

$$R_1 = ^{1/6}R_2 [3 + z\sqrt{3(3-z^2)}] \quad (8)$$

Двойной знак перед радикалом опущен, так как может быть отнесен к знакам множителей  $\lambda$  и  $\mu$  в формуле (7).

Второе уравнение (5) с учетом соотношения (8) приводится к виду

$$\lambda' = (12R_1^2 - 15R_1R_2 + 6R_2^2)(1 - ^{1/3}z^2)^{1/2} - 2\mu r R_1 \sin \theta \quad (9)$$

Дифференциальные уравнения  $r' = R_1 \cos \theta$  и (9) вместе с алгебраическими соотношениями (7), (8) и граничными условиями  $r(0)=0$ ,  $r(\pi/2)=a$  определяют краевую задачу.

Выясним значения переменных в полюсе ( $\theta=0$ ). Так как в этой точке  $R_1=R_2$ , то из соотношения (8) имеем  $z(0)=1,5$ . Из выражения (7) следует, что для того, чтобы величина  $z(0)$  была конечной, необходимо принять  $\lambda(0)=0$ . Таким образом, переходим от краевой задачи к задаче с начальными условиями.

$\theta^\circ$	$r/a$	$y/a$	$T_1/(pa)$	$T_2/(pa)$	$h\sigma_*/[pa]$
0	0	0,774	0,621	0,621	0,621
15	0,316	0,733	0,611	0,591	0,601
30	0,586	0,622	0,586	0,512	0,552
45	0,785	0,470	0,555	0,408	0,498
60	0,913	0,305	0,527	0,295	0,458
75	0,980	0,143	0,508	0,170	0,447
90	1,000	0	0,500	0	0,500

Контур оболочки строится в результате численного интегрирования дифференциальных уравнений (4), (9) при начальных условиях  $r(0)=y(0)=\lambda(0)=0$ ,  $z(0)=1,5$ . При этом величина  $R_0=R_1(0)=R_2(0)$  определяет масштаб построения и может быть принята произвольной. После интегрирования контур перестраивается так, чтобы выполнялись условия  $r(\pi/2)=a$ ,  $y(\pi/2)=0$ .

Объем оболочки при заданном значении радиуса экватора зависит от величины множителя  $\mu$ . Из формул (7), (8) при  $\theta=\pi/2$  получаем  $z=\mu$ ,  $R_1(\pi/2)=^{1/6}a\{3+\mu[3/(3-\mu^2)]^{1/2}\}$ . Отсюда при  $\mu \rightarrow 3^{1/2}$  имеем  $R_1(\pi/2) \rightarrow \infty$  при  $\mu \rightarrow -1,5 - R_1(\pi/2) \rightarrow 0$ . Этим

значениям  $\mu$  соответствуют предельные формы оболочек. Контур, у которого  $R_1(\pi/2)=0$ , является предельным контуром, ограничивающим объем оболочки снизу. При  $\mu \rightarrow 3^{1/2}$  значения радиусов кривизны на экваторе оболочки совпадают со значениями радиусов кривизны цилиндрической оболочки.

Равенство  $\mu=0$  равносильно отсутствию ограничения на внутренний объем оболочки. Координаты образующей такой оболочки, значения меридиональных и окружных усилий, а также толщина оболочки в зависимости от угла  $\theta$  приведены в таблице.

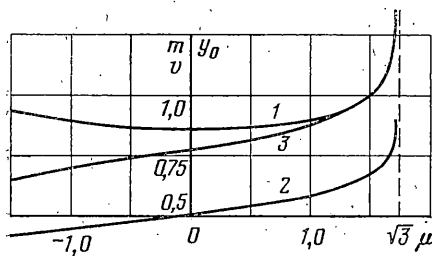
Вес этой оболочки на 15%, внутренний объем на 23,7%, а высота на 22,6% меньше, чем у сферической оболочки радиуса  $a$  с постоянной толщиной, удовлетворяющей условию прочности (2).

Отметим, что при  $\mu < 0$  в районе экватора оболочки имеют место сжимающие окружные напряжения.

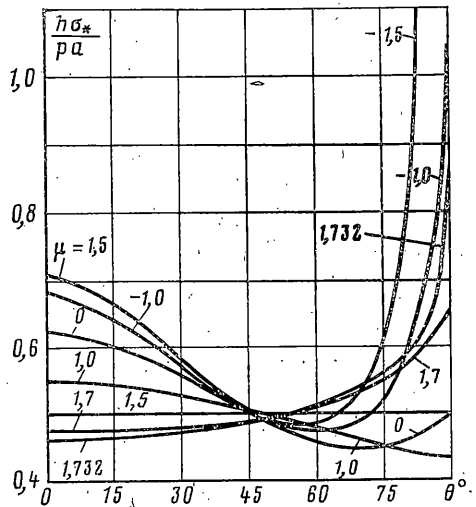
На фиг. 1 показаны формы оболочек при различных значениях  $\mu$ . Значению  $\mu=1,5$  соответствует сферическая форма оболочки. Во всех остальных случаях оболочка не является равнонапряженной.

На фиг. 2 приведены в зависимости от  $\mu$  безразмерные значения массы, внутреннего объема и высоты оболочки, определяемые выражениями  $m=M\sigma_*/(\pi r a^3)$  (кривая 1),  $v=V/(\pi a^3)$  (кривая 2);  $y_0=y(0)/a$  (кривая 3).

Минимум массы оболочки соответствует значению  $\mu=0$ . Для сферической формы отношение внутреннего объема оболочки к ее массе является максимальным.



Фиг. 2



Фиг. 3

Используя приведенные зависимости, можно выбрать величину  $\mu$ , соответствующую заданному значению внутреннего объема или высоты оболочки, и построить ее контур.

Изменение толщины оболочки при различных значениях  $\mu$  в зависимости от угла  $\theta$  показано на фиг. 3.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Геккелер И. В. Статика упругого тела. Л.—М.: Гостехтеоретиздат, 1934. 287 с.
2. Смирнов В. И., Крылов В. И., Канторович Л. В. Вариационное исчисление. Л.: КУБУЧ, 1933. 204 с.

Москва

Поступила в редакцию  
31.X.1983