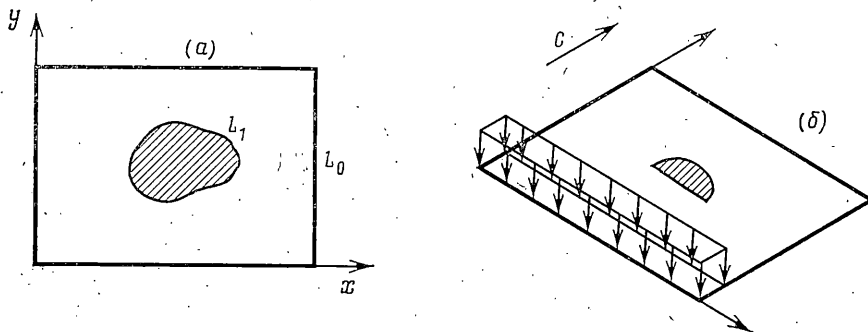


## РЕАКЦИЯ ПЛАСТИНЫ С ОТВЕРСТИЕМ НА ДЕЙСТВИЕ ДИНАМИЧЕСКОЙ НАГРУЗКИ

ЛЕВИЦКИЙ И. А., НАГОРНЫЙ Ю. И.

Собственные колебания пластин с круговыми отверстиями изучались в [1-3]; концентрации напряжений в пластинах и оболочках с трещинами под действием стационарных динамических нагрузок рассматривались в [4].

В публикуемой работе предлагается методика расчета динамической реакции пластины с отверстием произвольной формы. Задача решается методом граничных интегральных уравнений с использованием метода функций Грина и преобразования Лапласа. Получена система интегральных уравнений, которая решается численно



Фиг. 1

на ЭВМ. В качестве примера рассчитано поле перемещений при действии подвижной нагрузки.

1. Рассматривается реакция прямоугольной пластины с отверстием произвольной формы (фиг. 1) на действие динамической поперечной нагрузки. Движение такой пластины описывается уравнением

$$\frac{D}{h} \nabla_1^4 w_1 + \rho_1 \frac{\partial^2 w_1}{\partial t_1^2} + \frac{\gamma_1}{h} \frac{\partial w_1}{\partial t_1} = \frac{f_1(x_1 y_1 t_1)}{h} \quad (1.1)$$

$$\nabla_1^2 w_1 = \partial^2 w_1 / \partial x_1^2 + \partial^2 w_1 / \partial y_1^2$$

$$D = E h^3 / [12(1 - \nu^2)]$$

где  $\rho_1$  — плотность,  $\gamma_1$  — коэффициент демпфирования.

Рассмотрим следующие граничные условия: на контуре  $L_0$  шарнирное опирание

$$\text{при } x_1 = 0; a_1, w_1 = 0, \nabla_1^2 w_1 = 0, \text{ при } y_1 = 0; b_1, w_1 = 0, \nabla_1^2 w_1 = 0 \quad (1.2)$$

на контуре  $L_1$  жесткое закрепление

$$w_1 = 0, \quad \partial w_1 / \partial n = 0 \quad (1.3)$$

Начальные условия задачи примем в форме

$$w_1(x_1, y_1, 0) = 0, \quad \partial w_1(x_1, y_1, 0) / \partial t_1 = 0 \quad (1.4)$$

Запишем уравнение (1.1) и условия (1.2) — (1.4) в безразмерном виде

$$\nabla^4 w + 12 \partial^2 w / \partial t^2 + 12 \gamma \partial w / \partial t = f(x, y, t) \quad (1.5)$$

Здесь введены безразмерные параметры

$$\{x, y, a, b, w\} = \{x_1, y_1, a_1, b_1, w_1\} h^{-1}, \quad t = t_1 h^{-1} \{E / [\rho_1 (1 - \nu^2)]\}^{1/2}$$

$$\gamma = \gamma_1 [(1 - \nu^2) / (E \rho_1)]^{1/2}, \quad \nabla^4 w = h^3 \nabla_1^4 w_1, \quad f(x, y, t) = f_1(x_1, y_1, t_1) D^{-1}$$

Форма записи (1.2) — (1.4) граничных и начальных условий сохраняется. Применим к уравнению (1.5) и условиям (1.2) — (1.4) интегральное преобразование Лапласа

$$\nabla^4 w_* + 12 \gamma p w_* + 12 p^2 w_* = f_*(x, y, p) \quad (1.6)$$

$w_* = 0, \nabla^2 w_* = 0$  — условия на  $L_0$ ;  $w_* = 0, \partial w_* / \partial n = 0$  — условия на  $L_1$

Пусть  $G(x, y, \xi, \eta, t)$  — функция Грина для рассматриваемой задачи (1.5), (1.2). Ее изображение  $G_*(x, y, \xi, \eta, p)$  определим как решение уравнения

$$\nabla^4 G_* + 12\gamma p G_* + 12p^2 G_* = \delta(x-\xi)\delta(y-\eta)e^{-p\tau_0} \quad (1.7)$$

Решение для  $G$  будем искать в виде ряда

$$G_* = \sum_{m,n=1}^{\infty} G_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \sin \frac{m\pi \xi}{a} \sin \frac{n\pi \eta}{b}, \quad (1.8)$$

Раскладывая функцию  $\delta(x-\xi)\delta(y-\eta)$  в аналогичный (1.8) тригонометрический ряд

$$\delta(x-\xi)\delta(y-\eta) = \frac{4}{ab} \sum_{m,n=1}^{\infty} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \sin \frac{m\pi \xi}{a} \sin \frac{n\pi \eta}{b} \quad (1.9)$$

и подставляя затем ряды (1.8) и (1.9) в уравнение (1.7), получим выражение для функции Грина в виде

$$G_* = \sum_{m,n=1}^{\infty} G_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \sin \frac{m\pi \xi}{a} \sin \frac{n\pi \eta}{b} \quad (1.10)$$

$$G_{mn} = e^{-p\tau_0} / \{3ab[(p+\gamma/2)^2 + k^2]\}$$

$$k^2 = \alpha^2/12 - \gamma^2/4, \quad \alpha = (m\pi/a)^2 + (n\pi/b)^2$$

Применяя принцип взаимности работ с учетом уравнения (1.6), можно записать

$$\iint_{\Omega} (G_* \nabla^4 w_* - w_* \nabla^4 G_*) d\Omega = \iint_{\Omega} (f_* G_* - \delta(x-\xi)\delta(y-\eta) w_*) d\Omega \quad (1.11)$$

Левую часть равенства (1.11) преобразуем по формуле Грина

$$\begin{aligned} & \iint_{\Omega} (G_* \nabla^4 w_* - w_* \nabla^4 G_*) d\Omega = \\ & = \int_{L_0 + L_1} \left( G_* \frac{\partial \nabla^2 w_*}{\partial n} - \nabla^2 w_* \frac{\partial G_*}{\partial n} - w_* \frac{\partial \nabla^2 G_*}{\partial n} + \nabla^2 w_* \frac{\partial G_*}{\partial n} \right) dL \end{aligned} \quad (1.12)$$

Используя граничное условие для  $L_0$ , равенство (1.12) запишем в форме

$$\iint_{\Omega} (G_* \nabla^4 w_* - w_* \nabla^4 G_*) d\Omega = \int_{L_1} \left( G_* \frac{\partial \nabla^2 w_*}{\partial n} - \nabla^2 w_* \frac{\partial G_*}{\partial n} \right) dL \quad (1.13)$$

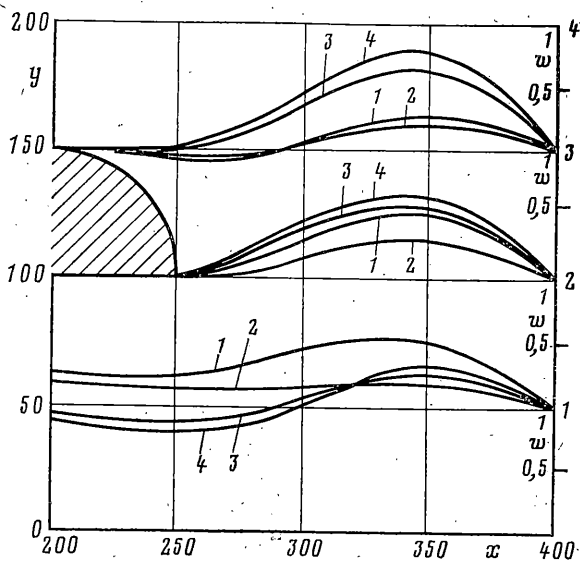
Обозначая в (1.13) неизвестные  $\partial \nabla^2 w_* / \partial n = \mu_1(x, y, p) - \nabla^2 w_* = \mu_2(x, y, p)$  и учитывая свойство дельта-функции, из равенства (1.11) получим решение

$$w_*(\xi, \eta, p) = \iint_{\Omega} f_* G_* d\Omega + \int_{L_1} \left( G_* \mu_1 + \mu_2 \frac{\partial G_*}{\partial n} \right) dL \quad (1.14)$$

которое удовлетворяет условиям на контуре  $L_0$ . Подчиняя решение (1.14) условиям на контуре  $L_1$ , получим систему интегральных уравнений

$$\begin{aligned} & \int_{L_1} \left( G_* \mu_1 + \frac{\partial G_*}{\partial n(x, y)} \mu_2 \right) dL_{xy} = - \iint_{\Omega} f_* G_* d\Omega \\ & \int_{L_1} \left( \frac{\partial G_*}{\partial n(\xi, \eta)} \mu_1 + \frac{\partial^2 G_*}{\partial n(x, y) \partial n(\xi, \eta)} \mu_2 \right) dL_{xy} = - \iint_{\Omega} f_* \frac{\partial G_*}{\partial n(\xi, \eta)} d\Omega \end{aligned} \quad (1.15)$$

Следует отметить, что фундаментальное решение (1.10), т. е. функция Грина, полученная в данной задаче, имеет особенность  $r^2 \ln r$ , которая интегрируема вместе с производными до второго порядка включительно. В связи с тем, что под знаком интеграла в системе (1.15) наибольший порядок производной от функции Грина равен двум, указанная особенность интегрируема. Практически это выражается в том, что ряд (1.10) после двукратного дифференцирования остается абсолютно сходящимся. При численном решении уравнений (1.15) контур интегрирования  $L_1$  разбивался на конечное число частей, причем в пределах каждой  $i$ -й части искомые плотности  $\mu_{1i}$  и  $\mu_{2i}$  считались постоянными и определялись решением системы алгебраических уравнений. Затем найденные плотности были использованы для вы-



Фиг. 2

числения изображений прогибов пластины на основе дискретного аналога формулы (1.14). Оригиналы прогибов рассчитывались по стандартной программе обратного преобразования Лапласа.

Правильность работы программы проверялась контрольным вариантом, который состоял в подборе функции прогибов пластины с отверстием, удовлетворяющей условиям на границах пластины. В частности, для кругового отверстия радиуса  $R$ , расположенного в центре пластины со сторонами  $a$  и  $b$ , такая функция была принята в виде

$$w = [xy(x-a)(y-b)]^3 [R^2 - (x-a/2)^2 - (y-b/2)^2]^2 t^2 \quad (1.16)$$

Далее на основе уравнения движения пластины (1.5) была найдена внешняя нагрузка, соответствующая выбранной функции, по которой с помощью программы рассчитывались прогибы пластины и сравнивались с (1.16). Указанный контрольный вариант был использован для настройки программы на заданную точность путем подбора количества членов ряда в функции Грина (1.10), количества точек в области и по границе отверстия. Например, было найдено, что точности  $\sim 10\%$  соответствует 10 членов ряда (1.10), 80 точек области и 12 точек по окружности. Учитывая, что функция прогибов при данной схеме нагружения имеет значительно меньшую кривизну, чем функция в контрольном варианте, можно ожидать повышение точности расчета прогибов пластины при одних и тех же параметрах расчета.

2. По изложенной методике составлена программа расчета поля перемещений для прямоугольной области с отверстием в виде полукруга (фиг. 1, е). Были вычислены перемещения пластины, вызываемые действием подвижной нагрузки  $f(x, y, t) = F_0 H(ct - y)$ , где  $F_0$  — интенсивность нагрузки,  $H(ct - y)$  — функция Хэвисайда,  $c$  — скорость движения нагрузки ( $F_0 = 0,1 \cdot 10^{-4}$ ;  $c = 0,3 \cdot 10^{-3}$ ).

Картины перемещений пластины в разные моменты времени показаны на фиг. 2. Для каждого положения фронта нагрузки 1, 2, 3, 4 приведены соответствующие кривые. Перемещения пластины вычислялись на трех координатных линиях:  $y = 50$ ; 100; 150.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Гузь А. Н., Чернышенко И. С., Чехов Вал. Н., Чехов Вик. Н., Шнеренко К. И. Методы расчета оболочек. Т. 1. Теория тонких оболочек, ослабленных отверстием. Киев: Наук. думка, 1980. 635 с.
2. Hegarty R. F., Ariman T. Elasto-dynamic analysis of rectangular plates with circular holes.— Internat. J. Solids and Structures, 1975, v. 11, No. 7/8, p. 895–906.
3. Takahashi S. Vibration of rectangular plates with circular holes.— Bull. JSME, 1958, v. 1, No. 4, p. 380–385.
4. Ariman T., Hegarty R. F. Seismic analysis of cracked reactor vessels.— Nuc. Eng. Design, 1974, v. 29, No. 1, p. 89–109.

Запорожье

Поступила в редакцию  
3.V.1983

УДК 539.3

### О ФОРМЕ БЕЗМОМЕНТНОЙ РАВНОПРОЧНОЙ ОБОЛОЧКИ МИНИМАЛЬНОЙ МАССЫ

ТИМОНИН А. М.

Рассматривается задача минимизации массы замкнутой в вершине безмоментной равнопрочной оболочки вращения, имеющей заданный внутренний объем при заданном диаметре экватора. Получены необходимые условия оптимальности. Решение задачи оптимизации сводится к численному интегрированию системы дифференциальных уравнений. Проведен анализ полученных результатов.

Рассмотрим замкнутую в вершине безмоментную оболочку вращения, нагруженную внутренним давлением  $p$ . Выражения для меридиональных и окружных усилий имеют вид [1]:

$$T_1 = pR_2/2, \quad T_2 = T_1(2 - R_2/R_1) \quad (1)$$

Здесь  $R_1, R_2 = r/\sin \theta$  — радиусы кривизны срединной поверхности,  $r(\theta)$  — радиус параллельного круга,  $\theta$  — угол между нормалью к срединной поверхности и осью вращения оболочки.

Масса  $M$  и внутренний объем оболочки  $V$  определяются выражениями

$$M = 2\pi\rho \int_0^{\pi/2} rR_1 h \, d\theta, \quad V = \pi \int_0^{\pi/2} r^2 R_1 \sin \theta \, d\theta$$

где  $h(\theta)$  — толщина оболочки,  $\rho$  — плотность материала.

Определим форму оболочки, имеющей минимальную массу  $M$  при заданных значениях внутреннего объема  $V$  и радиуса экватора  $a$ , в любой точке которой выполняется условие прочности в форме Мизеса

$$T_1^2 - T_1 T_2 + T_2^2 = \sigma_*^2 h^2 \quad (2)$$

где  $\sigma_*$  — допустимое напряжение для материала оболочки.

Используя зависимости (1), (2), получаем выражение для толщины оболочки в виде  $h = \frac{1}{2} p R_2 (3 - 3R_2/R_1 + R_2^2/R_1^2)^{1/2} / \sigma_*$ . Тогда масса оболочки с точностью до постоянного множителя дается функционалом

$$M \propto \int_0^{\pi/2} r R_2 (3R_1^2 - 3R_1 R_2 + R_2^2)^{1/2} \, d\theta \quad (3)$$

Форма оболочки описывается уравнениями

$$r' = R_1 \cos \theta, \quad y' = -R_1 \sin \theta \quad (4)$$