МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 3 • 1984

УДК 531.391.5

АБСОЛЮТНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ДВИЖЕНИЙ ОСЕСИММЕТРИЧНОГО ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ЛЕТАТЕЛЬНОГО АППАРАТА

СКОРОДИНСКИЙ В. И.

Рассматривается задача об устойчивости движения осесимметричного вращающегося оперенного летательного аппарата в воздухе. Учитывается нестационарность обтекания аппарата, а также эффекты типа эффекта Магнуса [1], обусловленные наличием оперения и вращением вокруг оси симметрии. Задача решается методами теории абсолютной устойчивости [2, 3] на основании подхода, предложенного в [4]. Показано, что полученное в [5] условие устойчивости стационарных движений аппарата является не только необходимым, но и достаточным условием абсолютной устойчивости нестационарных движений, т. е. в данном случае проблема Айзермана [6] имеет положительное решение. Построенная полная область абсолютной устойчивости оказывается шире области абсолютной устойчивости, найденной в [4] при помощи критерия Якубовича [7].

1. Рассмотрим близкое к прямолинейному горизонтальному полету движение осесимметричного вращающегося оперенного летательного аппарата в воздухе. Будем считать летательный аппарат абсолютно жестким телом, массу и момент инерции аппарата постоянными, а центральный эллипсоид инерции — эллипсоидом вращения. Сила тяги предполагается направленной по оси симметрии. Вращение аппарата вокруг собственной оси симметрии происходит за счет косопоставленных хвостовых стабилизаторов. Предполагается также, что в диапазонах изменения вводимых далее переменных аэродинамические коэффициенты остаются постоянными.

Уравнения движения вокруг центра масс запишем в проекциях на оси x, y, z полусвязанной системы координат, которая колеблется вместе с осью симметрии аппарата, но не участвует во вращении вокруг оси симметрии. Начало этой системы координат совпадает с центром масс аппарата. В указанных предположениях уравнения малых колебаний оси симметрии летательного аппарата, которые можно получить на основе общепринятой методики [8—11], имеют вид [4, 5]:

$$
\begin{aligned}
\alpha' &= \omega_z - c_\alpha\alpha + c_{\alpha M}\omega_x\beta + c_\delta\delta_y + Lg/V^2 \\
\omega_z' &= I\omega_x\omega_y + m_\alpha\alpha + m_{\alpha M}\omega_x\beta - m_\omega\omega_z - m_\delta\delta_y \\
\beta' &= \omega_y - c_\alpha\beta - c_{\alpha M}\omega_x\alpha + c_\delta\delta_z \\
\omega_y' &= -I\omega_x\omega_z + m_\alpha\beta - m_{\alpha M}\omega_x\alpha - m_\omega\omega_y - m_\delta\delta_z
\end{aligned}
\tag{1.1}
$$

Здесь α, β — углы атаки и скольжения, ω_z, ω_y — безразмерные угловые скорости поперечных колебаний оси симметрии, ω_x — безразмерная угловая скорость вращения вокруг оси симметрии, V — скорость центра масс аппарата, L — длина аппарата, $I=I_x/I_y$ — отношение осевого и поперечного (экваториального) моментов инерции, c_α, $c_{\alpha M}$ — приведенные аэродинамические коэффициенты подъемной силы и силы Магнуса, m_α, m_ω, $m_{\alpha M}$ — приведенные аэродинамические коэффициенты восстанавливающего момента, демпфирующего момента и момента силы Магнуса, δ_y, δ_z — относительные управляющие команды в каналах тангажа и курса, c_δ; m_δ — приведенные аэродинамические коэффициенты управляющей силы и управляющего момента. Дифференцирование производится по безразмерному времени τ, связанному с действительным временем t дифференциальным соотношением $d\tau=Vdt/L$. К силам Магнуса, которые учитываются в уравнениях (1.1), относятся также эффекты [1], вызванные наличием оперения у вращающегося аппарата.

Из условий статической устойчивости летательного аппарата следует

$$m_\alpha<0,\ c_\alpha>0,\ m_\omega>0 \tag{1.2}$$

Для правильности полета аппарата [8, 9] необходима устойчивость вынужденного движения $\alpha(\tau)$, $\omega_z(\tau)$, $\beta(\tau)$, $\omega_y(\tau)$, соответствующего управляющим воздействиям $\delta_y(\tau)$, $\delta_z(\tau)$. Среди возможных режимов движения аппарата существует стационарный режим, называемый балансировочным [8, 11]. При этом режиме центр масс аппарата перемещается прямолинейно, его скорость и угловая скорость крена постоянны, ось симметрии сохраняет постоянную ориентацию, т. е.

$$V=V^\circ,\ \omega_x=\omega_x^\circ,\ \alpha=\alpha^\circ,\ \beta=\beta^\circ,\ \omega_x=\omega_y=0 \tag{1.3}$$

при некоторых управлениях $\delta_y=\delta_y^\circ$, $\delta_z=\delta_z^\circ$.

Устойчивость балансировочного режима (1.3) исследовалась в [5], где было показано, что это движение асимптотически устойчиво в том и только в том случае, если неравенство

$$\begin{gathered}(\omega_x^+)^2[m_{\alpha M}{}^2+m_{\alpha M}(c_\alpha-m_\omega)(I-c_{\alpha M})-\\-c_\alpha m_\omega(I-c_{\alpha M})^2]+(c_\alpha+m_\omega)^2(m_\alpha-c_\alpha m_\omega)<0\end{gathered} \tag{1.4}$$

выполнено при $\omega_x^+=\omega_x^\circ$.

В условиях реального полета скорость центра масс $V(\tau)$ и угловая скорость крена $\omega_x(\tau)$ не постоянны. Кроме того, как отмечено в [4], скорость $V(\tau)$ зависит от ряда неучитываемых факторов (нестационарность силы тяги, случайные порывы ветра и т. д.), а момент крена M_x, определяющий функцию $\omega_x(\tau)$, не имеет достаточно хорошего описания из-за сложности явлений, происходящих при аэродинамическом взаимодействии управляющих поверхностей или газовых рулей с оперением, обеспечивающим вращение аппарата вокруг оси симметрии. Поэтому, следуя [4], будем считать, что известны лишь диапазоны изменения функций $V(\tau)$ и $\omega_x(\tau)$:

$$V_1\leqslant V(\tau)\leqslant V_2 \tag{1.5}$$

$$\omega_x^-\leqslant\omega_x(\tau)\leqslant\omega_x^+\quad(|\omega_x^-|\leqslant|\omega_x^+|) \tag{1.6}$$

Таким образом, вынужденное движение $\alpha(\tau)$, $\omega_z(\tau)$, $\beta(\tau)$, $\omega_y(\tau)$, соответствующее в силу системы (1.1) управляющим воздействиям $\delta_y(\tau)$, $\delta_z(\tau)$, должно быть устойчивым при любых функциях $V(\tau)$ и $\omega_x(\tau)$, удовлетворяющих неравенствам (1.5), (1.6).

Для исследования устойчивости вынужденного движения рассмотрим уравнения в отклонениях, соответствующие системе (1.1). Эти уравнения имеют вид [4]:

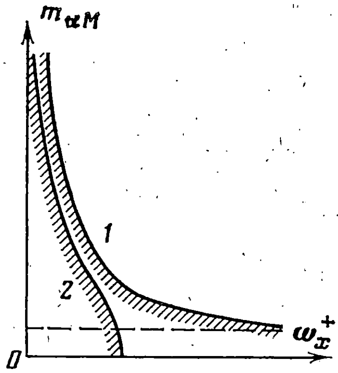
$$\mathbf{X}'=[A+\omega_x(\tau)A_1]\mathbf{X} \tag{1.7}$$

$$X=\begin{Vmatrix}\alpha\\ \omega_z\\ \beta\\ \omega_y\end{Vmatrix},\quad A=\begin{Vmatrix}-c_\alpha & 1 & 0 & 0\\ m_\alpha & -m_\omega & 0 & 0\\ 0 & 0 & -c_\alpha & 1\\ 0 & 0 & m_\alpha & -m_\omega\end{Vmatrix},\quad A_1=\begin{Vmatrix}0 & 0 & c_{\alpha M} & 0\\ 0 & 0 & m_{\alpha M} & I\\ -c_{\alpha M} & 0 & 0 & 0\\ -m_{\alpha M} & -I & 0 & 0\end{Vmatrix}$$

Класс функций $\omega_x(\tau)$, удовлетворяющих неравенствам (1.6), а также условиям существования непрерывного решения системы (1.7), обозначим через N.

Требуется найти условия асимптотической устойчивости тривиального решения системы (1.7) при произвольной функции $\omega_x(\tau)$ из N, т. е. условия абсолютной устойчивости системы (1.7) в классе N.

2. Задача об абсолютной устойчивости системы (1.7) в классе функций N исследовалась при помощи критерия Якубовича [7] в [4], где показана качественная картина взаимного расположения областей устойчивости в неотрицательном квадранте плоскости параметров $(\omega_x^+, m_{\alpha M})$ при фиксированных значениях остальных параметров (фигура). Кривая *1* задается неравенством (1.4). Эта кривая ограничивает область устойчивости стационарных режимов $\omega_x(\tau)\equiv\omega_x^+$, т. е. область, где матрица $A+\omega_x^+A_1$ гурвицева. Кривая *2* ограничивает область абсолютной устойчивости системы (1.7), выделяемую критерием Якубовича [7]. Так как этот критерий является достаточным, но не необходимым условием абсолютной устойчивости, то кривая *2* выделяет лишь часть полной области абсолютной устойчивости системы (1.7).



Покажем, что полная область абсолютной устойчивости системы (1.7) задается неравенством (1.4) и совпадает с областью, ограниченной кривой *1* (фигура) [1]. Тем самым будет показано, что для системы (1.7) проблема Айзермана [6] об абсолютной устойчивости в области, где матрица правой части системы гурвицева, имеет положительное решение.

Перейдем к доказательству сформулированного утверждения. Неравенство (1.4), задающее область, где матрица $A+\omega_x^+A_1$ гурвицева, является необходимым условием абсолютной устойчивости системы (1.7) в классе N. Чтобы доказать достаточность условия (1.4), покажем, что если справедливы неравенства (1.2) и (1.4), то существует квадратичная форма $v(\mathbf{X})=\mathbf{X}^TL\mathbf{X}$ $(L=L^T)$ с отрицательно-определенной производной в силу системы (1.7) при любых $\omega_x(\tau)$ из N.

Как следует из результатов [3] [2], производная функции $v(\mathbf{X})$ в силу системы (1.7) отрицательно определена при всех $\omega_x(\tau)$ из N в том и только в том случае, если выполнены матричные неравенства [3]

$$W_1\equiv(A+\omega_x^-A_1)^TL+L(A+\omega_x^-A_1)<0 \tag{2.1}$$

$$W_2\equiv(A+\omega_x^+A_1)^TL+L(A+\omega_x^+A_1)<0 \tag{2.2}$$

Рассмотрим блочные матрицы L вида

$$L=\begin{Vmatrix} L_1 & 0 \\ 0 & L_1 \end{Vmatrix},\quad L_1=\begin{Vmatrix} l_1 & l_3 \\ l_3 & l_2 \end{Vmatrix} \tag{2.3}$$

и покажем, что существуют числа l_1, l_2, l_3, удовлетворяющие неравенствам (2.1), (2.2).

Для справедливости неравенства (2.2) необходимо и достаточно, чтобы главные диагональные миноры матрицы W_2 удовлетворяли следующим условиям [12]:

$$W_2\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\equiv2(-c_\alpha l_1+m_\alpha l_3)<0,\qquad W_2\begin{pmatrix}1 & 2\\1 & 2\end{pmatrix}\equiv y>0$$

---

[1] Впервые этот факт удалось установить при построении области абсолютной устойчивости на ЭВМ при помощи численных методов, предложенных в [3].

[2] В [3] рассматривались матрицы A_1 специального вида ($A_1=\mathbf{b}_1\mathbf{c}_1^T$, где $\mathbf{b}_1$ и $\mathbf{c}_1$ — векторы). Однако приводимое утверждение справедливо и для произвольных матриц A_1.

[3] Неравенство $W_i<0$ означает, что матрица W_i является отрицательно-определенной.

$$W_2\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}\equiv 2(-c_\alpha l_1+m_\alpha l_3)\,[y-(\omega_x^+)^2z^2]<0 \tag{2.4}$$

$$W_2\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 1 & 2 & 3 & 4\end{pmatrix}\equiv [y-(\omega_x^+)^2z^2]^2>0$$

$$y=4(-c_\alpha l_1+m_\alpha l_3)(-m_\omega l_2+l_3)-[l_1+m_\alpha l_2-(c_\alpha+m_\omega)l_3]^2$$

$$z=m_{\alpha M}l_2-(I-c_{\alpha M})\,l_3$$

Система неравенств (2.4) эквивалентна двум неравенствам

$$Q_1(\mathrm{l})\equiv c_\alpha l_1-m_\alpha l_3>0 \tag{2.5}$$

$$Q_2(\mathrm{l})\equiv y-(\omega_x^+)^2z^2>0 \tag{2.6}$$

где $\mathrm{l}=\|l_i\|_1^3$. Функцию $Q_2(\mathrm{l})$ будем рассматривать как квадратичную форму от переменных l_1, l_2, l_3, т. е. $Q_2(\mathrm{l})=\mathrm{l}^TQ\mathrm{l}$. Матрица этой квадратичной формы имеет вид

$$Q=\begin{Vmatrix} -1 & 2c_\alpha m_\omega-m_\alpha & m_\omega-c_\alpha \\ 2c_\alpha m_\omega-m_\alpha & -m_\alpha^2-(\omega_x^+)^2m_{\alpha M}^2 & m_\alpha(c_\alpha-m_\omega)+(\omega_x^+)^2m_{\alpha M}(I-c_{\alpha M}) \\ m_\omega-c_\alpha & m_\alpha(c_\alpha-m_\omega)+(\omega_x^+)^2m_{\alpha M}(I-c_{\alpha M}) & 4m_\alpha-(c_\alpha+m_\omega)^2-(\omega_x^+)^2(I-c_{\alpha M})^2 \end{Vmatrix}$$

Так как определитель матрицы Q равен

$$\det Q=4(m_\alpha-c_\alpha m_\omega)\{(\omega_x^+)^2[m_{\alpha M}^2+m_{\alpha M}(c_\alpha-m_\omega)(I-c_{\alpha M})-$$
$$-c_\alpha m_\omega(I-c_{\alpha M})^2]+(c_\alpha+m_\omega)^2(m_\alpha-c_\alpha m_\omega)\}$$

то из неравенств (1.2) и (1.4) следует $\det Q>0$. Поэтому квадратичная форма $Q_2(\mathrm{l})$ не является неположительной [12] и существует такой вектор l°, что $Q_2(\mathrm{l}^\circ)>0$, т. е. имеет место неравенство (2.6).

Так как неравенство (2.6) строгое, то можно считать выполненным соотношением $Q_1(\mathrm{l}^\circ)\neq 0$. Из линейности функции $Q_1(\mathrm{l})$ и квадратичности функции $Q_2(\mathrm{l})$ следуют равенства $Q_1(\mathrm{l})=-Q_1(-\mathrm{l})$, $Q_2(\mathrm{l})=Q_2(-\mathrm{l})$. Поэтому неравенства (2.5) и (2.6) выполнены одновременно либо при $\mathrm{l}=\mathrm{l}^\circ$, либо при $\mathrm{l}=-\mathrm{l}^\circ$. Следовательно, существует матрица L вида (2.3), удовлетворяющая неравенству (2.2).

Условия на главные диагональные миноры матрицы W_1 из (2.1) имеют вид (2.4), если в неравенствах (2.4) заменить ω_x^+ на ω_x^-. В силу предположения о том, что $|\omega_x^-|\leqslant|\omega_x^+|$, при такой замене неравенства (2.4) остаются справедливыми. Поэтому неравенство (2.1) выполнено при тех же L вида (2.3), что и неравенство (2.2).

Таким образом, если выполнено условие (1.4), то существует квадратичная форма $v(\mathrm{X})$, производная которой в силу системы (1.7) отрицательно определена при любых $\omega_x(\tau)$ из N. Так как из условия (1.4) следует, что матрица $A+\omega_x^+A_1$ гурвицева, то в силу неравенства (2.2) квадратичная форма $v(\mathrm{X})$ является положительно-определенной и система (1.7) абсолютно устойчива в классе N.

Следовательно, чтобы система вида (1.7), удовлетворяющая условиям (1.2), была абсолютно устойчивой в классе функций N, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство (1.4). Полная область абсолютной устойчивости такой системы в плоскости параметров (ω_x^+, $m_{\alpha M}$) совпадает с областью, где матрица $A+\omega_x^+A_1$ гурвицева. Эта область, ограниченная на фигуре кривой *1*, качественно отличается от области, выделяемой кривой *2*, так как при достаточно малых значениях $m_{\alpha M}$ ей принадлежат точки со сколь угодно большими значениями ω_x^+.

Проведенное исследование показывает, что в рамках принятой математической модели (1.1) предположение о нестационарности обтекания не оказывает влияния на устойчивость рассмотренного класса вынужденных движений осесимметричного вращающегося летательного аппарата.

Это означает, что для исследования асимптотической устойчивости всего класса нестационарных движений, которым соответствуют функции $\omega_x(\tau)$ из N, необходимо и достаточно рассмотреть только стационарные движения из этого класса.

В приведенных рассуждениях относительно величины ω_x^- предполагалось лишь, что $|\omega_x^-| \leqslant |\omega_x^+|$. Поэтому условие (1.4) гарантирует абсолютную устойчивость системы (1.7) в классе функций $M = \{\omega_x(\tau) : |\omega_x(\tau)| \leqslant |\omega_x^+|\}$, для которого справедливо соотношение $N \subseteq M$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Benton E. R.* Sypersonic Magnus effect on a finned missile.— AIAA Journal, 1964, v. 2, No. 1, p. 153—155.— Рус. перев.: Ракетная техника и космонавтика, 1964, № 1, с. 197—199.
2. *Пятницкий Е. С.* Новые исследования по абсолютной устойчивости систем автоматического регулирования (обзор).— Автоматика и телемеханика, 1968, № 6, с. 5—36.
3. *Pyatnitskiy Ye. S., Skorodinskiy V. I.* Numerical methods of Lyapunov function construction and their application to the absolute stability problem.— Systems and Control Letters, 1982, v. 2, No. 2, p. 130—135.
4. *Жермоленко В. Н., Локшин Б. Я.* Об устойчивости нестационарных движений осесимметричного вращающегося летательного аппарата.— Изв. АН СССР. МТТ, 1977, № 5, с. 32—39.
5. *Жермоленко В. Н., Локшин Б. Я.* Об устойчивости стационарного движения вращающейся ракеты.— Тр. Ин-та механ. МГУ, 1975, № 40, с. 117—122.
6. *Айзерман М. А.* Об одной проблеме, касающейся устойчивости «в большом» динамических систем.— Успехи матем. наук, 1949, т. 4, вып. 4, с. 187—188.
7. *Якубович В. А.* Частотные условия абсолютной устойчивости систем управления с несколькими нелинейными или линейными нестационарными блоками.— Автоматика и телемеханика, 1967, № 6, с. 5—30.
8. *Гантмахер Ф. Р., Левин Л. М.* Теория полета неуправляемых ракет. М.: Физматгиз, 1959. 360 с.
9. *Боднер В. А.* Теория автоматического управления полетом. М.: Наука, 1964. 698 с.
10. *Святодух В. К.* Динамика пространственного движения управляемых ракет. М.: Машиностроение, 1969. 270 с.
11. *Лебедев А. А., Чернобровкин Л. С.* Динамика полета беспилотных летательных аппаратов. М.: Машиностроение, 1973. 616 с.
12. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1967. 575 с.

Москва

Поступила в редакцию 23.III.1983