

УДК 539.374

## О ВЛИЯНИИ ВРАЩЕНИЯ КРУГЛЫХ БАЛОК НА ПРОЦЕСС ИХ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ ПРИ ИЗГИБЕ

БРОВМАН М. Я.

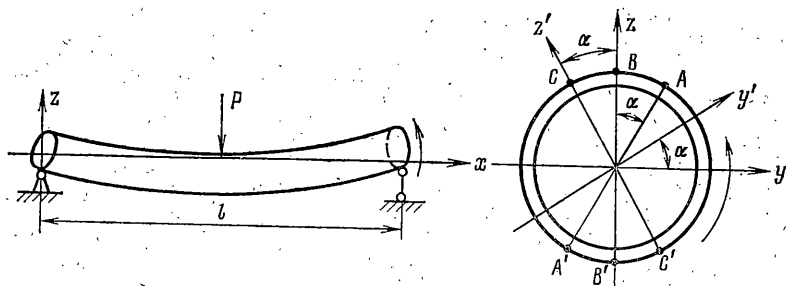
Рассматривается задача об упругопластическом изгибе круглых балок с учетом их вращения в процессе изгиба. В таких условиях нагружения находятся шпиндели станков, валы редукторов, прокатные валки, образцы в машинах для испытания на усталость, а также трубы при правке в роликовых правильных машинах.

Приводятся дифференциальные уравнения изгиба и их решения для сосредоточенных нагрузок. Определено отклонение направления изгиба от направления нагрузки, зависящее от величины изгибающего момента в каждом сечении. Проведено экспериментальное исследование изгиба вращающихся балок.

1. Рассматривается упругопластическая деформация балок круглого сечения при малых деформациях и углах поворота без учета искривления сечений балки и касательных напряжений. Не учитываются также упрочнение и эффект Баушингера.

Упругопластический изгиб балок рассмотрен в [1—4]. На примере тонкостенной трубы, показанной на фиг. 1, видно различие деформации изгиба между неподвижной и вращающейся балками.

Если нагрузки действуют в плоскости  $xz$ , то для неподвижной балки пластические зоны  $ABC$  и  $A'B'C'$  симметричны относительно оси  $z$ . Но



Фиг. 1

при вращении трубы и постоянных нагрузках (направление вращения показано на фиг. 1) пластические деформации возможны только вдоль дуг  $AB$  и  $A'B'$ , а после достижения максимальной (в точке  $B$ ) и минимальной (в точке  $B'$ ) деформаций происходит разгрузка на участках  $BC$  и  $B'C'$ .

Однако, если пластические деформации имеют место только при нагрузке вдоль  $AB$  и  $A'B'$ , то изгибающий момент  $M_z \neq 0$ , поскольку пластические зоны несимметричны относительно оси  $z$ . Это противоречит условию задачи, поскольку внешние нагрузки действуют только в плоскости  $xz$ .

Для вращающейся трубы условие  $M_z = 0$  может быть выполнено только в том случае, если изгиб происходит не в плоскости  $xz$ , а в другой плоскости  $xz'$ , т. е. направление прогиба параллельно оси  $z'$  (фиг. 1) и состав-

ляет угол  $\alpha$  с осью  $z$ . Тогда максимальная деформация достигается в точке  $C$ , минимальная — в  $C'$  и в этих точках начинается разгрузка. Нейтральная ось также повернута на угол  $\alpha$  относительно  $y$ .

Обозначив, через  $\varphi$  переменный угол, определим напряжения изгиба:  $\sigma = \sigma_T$  при  $\pi/2 - \alpha < \varphi \leq \pi/2 + \alpha$  (в  $ABC$ );  $\sigma = \sigma_T - Ew''r[1 - \sin(\varphi - \alpha)]$  при  $\pi/2 + \alpha < \varphi \leq 3/2\pi - \alpha$  (в зоне  $CA'$ );  $\sigma = -\sigma_T$  при  $3/2\pi - \alpha < \varphi \leq 3/2\pi + \alpha$  (в зоне  $A'B'C'$ );  $\sigma = -\sigma_T + Ew''r[1 + \sin(\varphi - \alpha)]$  при  $3/2\pi + \alpha < \varphi \leq 0$  и при  $0 < \varphi \leq \pi/2 - \alpha$  (в зоне  $C'A$ ).

Здесь  $E$  — модуль упругости,  $\sigma_T$  — предел текучести,  $w''(x) = d^2w/dx^2$ ,  $w(x)$  — прогиб трубы с радиусом  $r$  и толщиной  $h$ .

При  $\varphi = \pi/2 - \alpha$  напряжения  $\sigma_T = -\sigma_T + Ew''r[1 + \sin(\pi/2 - 2\alpha)]$  или  $2\sigma_T/(Er) = w''(1 + \cos 2\alpha)$ ; откуда получаем

$$w''l/a = 1/\cos^2 \alpha, \quad a = \sigma_T l / (Er) \quad (1.1)$$

Изгибающий момент относительно оси  $y$  равен

$$M_y(x) = \int_0^{2\pi} \sigma(\varphi) r^2 h \sin \varphi d\varphi$$

В результате расчетов с учетом (1.1) получаем нелинейное уравнение изгиба

$$M_y(x) = \pi \sigma_T r^2 h f(\alpha), \quad f(\alpha) = (\pi - 2\alpha + \sin 2\alpha) / (\pi \cos \alpha) \quad (1.2)$$

Для трубы длиной  $l$ , нагруженной сосредоточенной силой  $P$  (фиг. 1), момент  $M_y(x) = 0,5Px$ . Обозначив  $m = Pl / (4\pi \sigma_T r^2 h)$ , получим в зоне упругопластической деформации ( $x_1 = 1/2 l / m$ ):

$$2mx/l = f(\alpha) \quad \text{при } x_1 < x \leq 0,5l \quad (1.3)$$

а в упругой зоне

$$w''(x) = 2amx/l^2 \quad \text{при } 0 \leq x \leq x_1 \quad (1.4)$$

Если  $m \leq 1,0$ , то деформации всюду упругие и  $\alpha = 0$ .

Поскольку из (1.1) следует, что  $\operatorname{tg} \alpha = (w''l/a - 1)^{1/2}$ , то, выразив в (1.2)  $\alpha$  через  $w''$ , получим вместо (1.3) уравнение

$$x = lm^{-1} \psi(w''l/a) \quad (1.5)$$

$$\psi\left(\frac{w''l}{a}\right) = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{w''l}{a}} \left[ \pi + 2 \sqrt{\frac{a}{w''l} \left(1 - \frac{a}{w''l}\right)} - 2 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{w''l}{a} - 1} \right]$$

где  $\psi$  — дифференцируемая функция  $w''$ . В большинстве случаев нелинейное уравнение (1.2) и (1.5) нельзя решить в явном виде относительно  $w''$ , но для многих, важных для практики задач уравнение (1.2) можно решить относительно  $x$  аналогично (1.5). Тогда можно определить  $w(x)$  в параметрическом виде в функции параметра  $t$ :

$$x = l\psi(t)/(2m) \quad (x_1 < x \leq 0,5l) \quad (1.6)$$

$$w'(x) = C_1 + \frac{a}{2m} \int_1^t t \frac{d\psi}{dt} dt, \quad w(x) = C_2 + C_1 x + \frac{al}{4m^2} \int_1^t \frac{d\psi(t)}{dt} \left[ \int_1^t t \frac{d\psi}{dt} dt \right] dt$$

где  $C_1, C_2$  — постоянные интегрирования.

Параметр  $t$  далее подставляется в функцию  $\psi$  вместо величины  $w''l/a$ . Выбор в качестве нижнего предела в интегралах формулы (1.6) величины  $t=1$  соответствует границе упругопластической и упругой зон ( $w''l/a = 1,0$  при  $x=x_1$ ). В упругой зоне решение линейного уравнения (1.4) при условии  $w=0$  при  $x=0$  имеет вид

$$w(x) = C_3 x + 1/3 amx^3/l^2 \quad (0 \leq x \leq x_1) \quad (1.7)$$

Из условий непрерывности  $w(x)$  и  $w'(x)$ , а также  $w'=0$  при  $x=0,5l$  определяем постоянные

$$C_1 = -\frac{a}{2m} \int_1^{t_m} t \frac{d\psi(t)}{dt} dt, \quad C_2 = -\frac{al}{12m^2}, \quad C_3 = C_1 - \frac{a}{4m}$$

где  $t_m$  — наибольшая величина параметра  $t$  при  $x=0,5l$ .

Согласно первому из уравнений (1.6), получаем  $\psi(t_m) = m$ . Подставив в уравнения (1.6) постоянные и интегрируя по частям двойной интеграл с учетом  $\psi(t_m) = m$ , определяем максимальный прогиб  $w_m$  при  $x=0,5l$ :

$$w_m = \frac{al}{12m^2} \left[ 1 + 3 \int_1^{t_m} t \psi(t) \frac{d\psi(t)}{dt} dt \right], \quad \psi(t) = \sqrt{t} + \frac{2}{\pi} \sqrt{t-1} - \frac{2\sqrt{t}}{\pi} \arctg \sqrt{t-1} \quad (1.8)$$

Заменой переменной  $t$  на  $v(t)$ , где  $v$  — параметр, аналогичный  $\alpha$  и равный  $v = \arctg(t-1)^{1/2}$ , получим

$$w_m = \frac{al}{12m^2} \left\{ 1 + \frac{3}{\pi^2} \int_0^{\alpha_m} \frac{1}{\cos^5 v} [(\pi-2v)^2 + \sin^2 v] \sin v dv \right\}$$

где  $\alpha_m$  — максимальная величина угла  $\alpha$  при  $x=0,5l$ .

Вычислив интеграл, определим максимальный прогиб

$$w_m = \frac{al}{12m^2} \left[ \frac{1}{4} + \frac{3(\pi-2\alpha_m)^2}{4\pi^3 \cos^4 \alpha_m} + \frac{3}{\pi^2} (\pi-2\alpha_m) \left( \operatorname{tg} \alpha_m + \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 \alpha_m \right) - \frac{5}{\pi^2} \operatorname{tg}^2 \alpha_m - \frac{16}{\pi^2} \ln \cos \alpha_m \right]$$

где величина  $\alpha_m$  определяется из уравнения

$$f(\alpha_m) = \pi - 2\alpha_m + \sin 2\alpha_m / (\pi \cos \alpha_m) = m \quad (1.9)$$

Параметр  $\alpha_m$  равен максимальному углу между направлениями силы и прогиба (в середине длины балки).

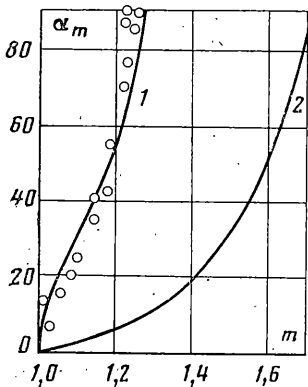
Кривая  $\alpha_m(m)$ , полученная численным решением уравнения (1.9), приведена на фиг. 2 (кривая 1). С увеличением  $m$  параметр  $\alpha_m$  возрастает и, когда  $m$  приближается к предельной величине  $m_0 = 1,275$ , параметр  $\alpha_m = 90^\circ$ , т. е. направление прогиба при распространении пластической деформации на все сечение, все более отклоняется от направления внешней силы и приближается к направлению, составляющему с силой прямой угол.

На фиг. 3 показано изменение величины  $w_m/(al) = w^\circ$  (кривая 1) и ее проекций на оси  $z$  (кривая 2) и  $y$  (кривая 3).

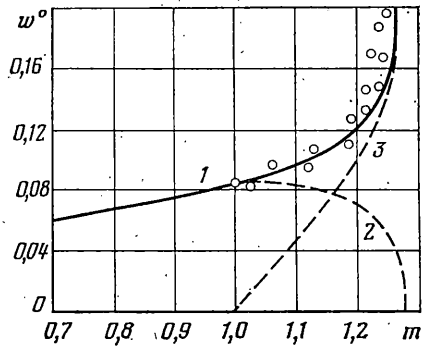
Видно, что составляющая прогиба по направлению силы  $P$  (вдоль оси  $z$ ) с началом пластической деформации и увеличением силы не возрастает, а убывает. При  $m = 1,16$  параметр  $\alpha_m = 45^\circ$  и проекции прогиба на оси  $z$  и  $y$  равны. При упругой деформации, когда напряжения полностью определены деформациями, вращение не оказывает влияния на изгиб балки, но при упругопластической деформации, когда напряжения зависят от истории нагружения, вращение балки существенно изменяет процесс изгиба, приводя к боковому смещению и отклонению прогиба от плоскости действия силы. Поскольку угол  $\alpha$  зависит от изгибающего момента и координаты  $x$ , ось балки является не плоской, а пространственной кривой.

Рассмотренная задача близка к рассмотренной в [5]. В данном случае вектор изгибающего момента вращается вокруг оси трубы и с той же скоростью вращается направление прогиба (со сдвигом по фазе на угол  $\alpha$ ).

Дадим оценку диапазона параметров изгиба, в котором допустимо пренебречь касательными напряжениями кручения  $\tau$ . Приняв, что за каждый оборот трубы на пластическую деформацию единицы объема затрачивает-



Фиг. 2



Фиг. 3

ся работа, равная  $4\sigma_T^2(w''l/a-1)/E$ , и объем трубы длиной  $(l-2x_1)$  весь подвергается пластической деформации, получим завышенную оценку пластической работы

$$A = \frac{8\sigma_T^2}{E} \pi r l h \left(1 - \frac{1}{m}\right) \left(\frac{w''l}{a} - 1\right) = 4\pi \tau r^2 h$$

В результате будем иметь  $\tau/\sigma_T = (2a/\pi)(1-1/m)(w''l/a-1)$ . Приняв максимальное значение  $m_0 = 1,275$ , получим  $\tau/\sigma_T = 0,137a(w''l/a-1) = 0,137a \operatorname{tg}^2 \alpha_m$ .

Если необходимо обеспечить условие  $\tau/\sigma_T < 0,05$ , то для этого достаточно, чтобы при  $x = 0,5l$  имели место соотношения  $w''l < 0,362 - a$ ,  $\operatorname{tg} \alpha_m < (0,362/a)^{1/2}$ . Например, при  $\sigma_T = 240$  МПа,  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа,  $l/r = 10$ ,  $a = 1,2 \cdot 10^2$ ,  $\operatorname{tg} \alpha_m < 5,5$ ,  $\alpha_m < 79,5^\circ$ , т. е. формулы применимы вплоть до больших величин  $\alpha_m$ . Отметим, что приближенно для трубы можно учесть влияние касательных напряжений, подставив в формулы вместо  $\sigma_T$  величину  $\sigma_1 = (\sigma_T^2 - 3\tau^2)^{1/2}$ .

Для многих других схем нагружения уравнение (1.2) легко решается относительно  $x$  и уравнения (1.6), (1.7),  $\psi(t_m) = m$  верны, если определить соответствующую функцию  $\psi(t)$ . Например, для консольной трубы длиной  $l$ , нагруженной силой  $P$

$$\psi(t) = 2 \left[ m - \sqrt{t} - \frac{2}{\pi} \sqrt{1 - \frac{1}{t}} - \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \sqrt{t-1} \right], \quad m = \frac{Pl}{\pi \sigma_T r^2 h}$$

Для трубы на двух опорах, нагруженной постоянной распределенной нагрузкой интенсивности  $p$ , имеем при  $m = pl^2/(8\pi \sigma_T r^2 h)$ :

$$\psi(t) = m + \left\{ m \left[ m - \sqrt{t} - \frac{2}{\pi} \sqrt{1 - \frac{1}{t}} - \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \sqrt{t-1} \right] \right\}^{1/2}$$

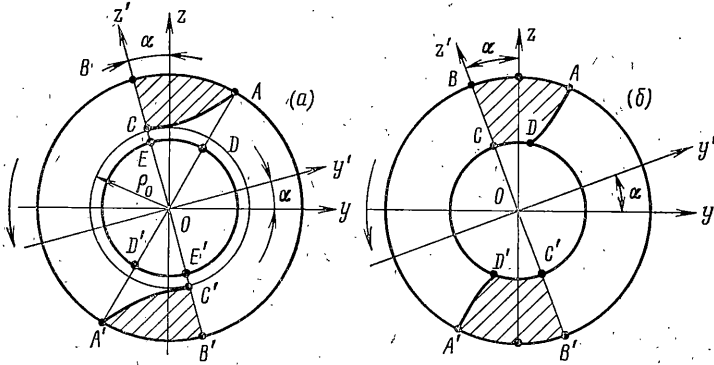
Многие, имеющие важное значение для практики задачи приводят к таким уравнениям (1.2), которые при сложной зависимости от  $w''$  просто решаются относительно  $x$  в форме, аналогичной (1.3), и тогда уравнения (1.6) определяют при известных величинах  $m$  и  $\psi(t)$  решение. Это показывает преимущества использованного параметрического метода для решения задач об упругопластическом изгибе.

Выше рассматривалась деформация свободной трубы. Если плоскость прогиба жестко зафиксирована в плоскости  $xz$ , то  $\alpha=0$ . Это можно обеспечить жесткими гладкими линейками, удерживающими балку по всей длине от боковых смещений. В таком случае

$$M_y(x) = \sigma_T r^2 h (2\pi - 2\alpha_1 + \sin 2\alpha_1) / (1 + \cos \alpha_1)$$

$$M_z(x) = 4\pi \sigma_T r^2 h (1 - a/w''l), \quad \alpha_1 = \arccos(2a-1)$$

Линейки создают давление на трубу, обеспечивающее данную величину  $M_z(x)$ . В этом случае с увеличением силы  $P$  момент  $M_y$  возрастает до максимума при  $\alpha_1=57^\circ$ ,  $m_0=1,075$ , а затем убывает, в то время как момент  $M_z$  монотонно возрастает. Таким образом, предельная максимальная на-



Фиг. 4

грузка определена не величиной  $m_0=1,275$ , а  $m_0=1,075$ , т. е. снижена на 18% по сравнению со свободной балкой.

2. Рассмотрим изгиб толстостенных круглых балок с наружным и внутренним радиусами  $r$  и  $r_1$ . Возможны два случая, которые показаны на фиг. 4. В первом из них пластическая деформация не проникает на всю толщину балки и при  $\rho \leq \rho_0$  деформации упругие (фиг. 4, а). При  $\rho \leq \rho_0$  напряжения  $\sigma = Ew''\rho \sin(\varphi - \alpha)$ . Изгиб происходит в направлении оси  $z'$ , а на нейтральной оси  $y'$  деформация равна нулю. Пластические зоны  $ABC$  и  $A'B'C'$  на фиг. 4 заштрихованы.

Уравнение линии  $AC$  имеет вид  $\rho_1 = 2ar / [w''l[1 + \sin(\varphi - \alpha)]]$ , а уравнение линии  $A'C'$  будет  $\rho_2 = 2ar / [w''l[1 - \sin(\varphi - \alpha)]]$ . При  $\varphi = \pi/2 + \alpha$  (точка  $C$ ) и  $\varphi = 3\pi/2 + \alpha$  (точка  $C'$ )  $\rho_1 = \rho_2 = \rho_0 = ur$ ,  $u = a / (w''l)$ .

Схема, приведенная на фиг. 4, а, имеет место при  $\rho_0 \geq r_1$  или  $u \geq 2u_1$ ,  $u_1 = 1/2r/r_1$ . В зонах  $BSCA'C'$  и  $B'C'CA$  имеет место разгрузка. Изгибающие моменты относительно осей  $y$  и  $z$  равны

$$M_y(x) = \iint \sigma(\rho, \varphi) \rho^2 \sin \varphi \, d\rho \, d\varphi, \quad M_z(x) = \iint \sigma(\rho, \varphi) \rho^2 \cos \varphi \, d\rho \, d\varphi$$

где интегралы вычисляются по всему контуру сечения. В результате расчетов получаем

$$M_y(x) = \sigma_T r^3 [f_1(u) \sin \alpha + f_2(u) \cos \alpha],$$

$$M_z(x) = \sigma_T r^3 [f_3(u) \sin \alpha + f_4(u) \cos \alpha] \quad (2.1)$$

$$f_1(u) = f_4(u) = \frac{4}{3} - 2u + \frac{2}{3}u^3, \quad f_2(u) = -f_3(u) = \frac{\pi}{8u} + \quad (2.2)$$

$$+ \frac{1}{4u} \arcsin(2u-1) - \frac{4\pi u^4}{u} + \sqrt{u(1-u)} \left( \frac{9}{5} - \frac{1}{2u} - \frac{4}{15}u - \frac{8}{15}u^2 \right)$$

Если  $M_z(x)=0$ , то  $\operatorname{tg} \alpha=f_1(u)/f_2(u)$ ; исключив величину  $\alpha$  из первого уравнения (2.1), получим уравнение изгиба

$$M_y(x)/(\sigma_T r^3)=\sqrt{f_1^2(u)+f_2^2(u)}. \quad (2.3)$$

Для балки, нагруженной сосредоточенной силой  $P$ , можно применить формулу (1.6), приняв функцию  $\psi(t)$  в виде

$$\psi(t)=c\sqrt{f_1^2(1/t)+f_2^2(1/t)}, \quad c=4/[\pi(1-16u_1^4)] \quad (2.4)$$

а постоянную  $m=Pl/[\pi\sigma_T r^3(1-16u_1^4)]$ . В частном случае, при  $u_1=0$  имеем сплошной круглый вал.

В упругой зоне имеет место линейное уравнение (1.4). Максимальный прогиб определяется формулой (1.8), в которую следует подставить функцию  $\psi(t)$  согласно (2.4).

Если  $u_m=1/t_m < 2u_1$ , то имеет место схема, приведенная на фиг. 4, б, т. е. пластическая деформация распространится по всему сечению балки.

В заштрихованных участках  $ABCD$  и  $A'B'C'D'$  имеет место пластическая деформация, а в зонах  $BCD'A'$  и  $B'C'DA$  — разгрузка.

В результате расчетов, аналогично уравнениям (2.1), получаем

$$M_y(x)=\sigma_T r^3[f_5(u)\sin\alpha+f_6(u)\cos\alpha] \quad (2.5)$$

$$M_z(x)=\sigma_T r^3[f_7(u)\sin\alpha+f_8(u)\cos\alpha]$$

$$f_5(u)=f_6(u)=\frac{4}{3}-2u+8uu_1^2-\frac{32}{3}u_1^3, \quad f_6(u)=-f_7(u)=$$

$$=\frac{\pi}{8u}+\frac{1}{4u}\arcsin(2u-1)-\frac{4u_1^4}{u}\arcsin\left(\frac{u}{u_1}-1\right)-\frac{2\pi u_1^4}{u}+$$

$$+\sqrt{u(1-u)}\left(\frac{9}{5}-\frac{1}{2u}-\frac{4}{15}u-\frac{8}{15}u^2\right)+$$

$$+\sqrt{\frac{u}{u_1}\left(2-\frac{u}{u_1}\right)}\left(4\frac{u_1^4}{u}-\frac{36}{5}u_1^3+\frac{8}{15}uu_1^2\right)$$

При  $u=u_1$  из формул (2.2) и (2.5) будем иметь  $f_1(u_1)=f_5(u_1)$ ,  $f_2(u_1)=f_6(u_1)$ . В частном случае, если  $M_z=0$ , то  $\operatorname{tg} \alpha=f_5(u)/f_6(u)$ . В уравнении (1.8) вместо  $\psi(t)$  при  $0 \leq u < 2u_1$  следует подставить

$$\psi_1(t)=c[f_5^2(1/t)+f_6^2(1/t)]^{1/2} \quad (2.6)$$

При рассмотрении изгиба балки в упругой зоне при  $0 \leq x \leq x_1$  имеет место уравнение (1.4), затем при  $x_1 < x \leq x_2$  будет зона упругопластической деформации, при которой в сечении балки имеется упругое ядро (фиг. 4, а) и справедливо уравнение (2.3)  $x_2=1/2l\psi(1/u_1)/m$ .

При  $x_2 < x \leq 0,5l$  расположена зона упругопластической деформации, где пластическое течение распространяется по всей толщине (фиг. 4, б) и действительно уравнение (2.5). В результате решения уравнений изгиба найдем максимальный прогиб

$$w_m=\frac{al}{12m^2}\left[1+3\int_1^{2t_1}t\psi(t)\frac{d\psi(t)}{dt}dt+3\int_{2t_1}^{t_m}t\psi_1(t)\frac{d\psi_1(t)}{dt}dt\right], \quad t_1=\frac{1}{u_1} \quad (2.7)$$

где величина  $t_m$  определяется из уравнения  $\psi_1(t_m)=m$ . Полученные формулы следует применять, если  $0 \leq u_m < 2u_1$ ; в случае  $2u_1 \leq u_m \leq 1,0$  действительны формулы  $\psi(t_m)=m$  и (1.8), где  $\psi(t)$  определена уравнением (2.4).

На основании численных расчетов, выполненных по этим уравнениям на ЭЦВМ «Наири», были определены величины  $\alpha_m(m)$ ,  $w^0(m)$ , приведенные на фиг. 2 (кривая 2) и фиг. 5. Отметим, что зависимости  $w_m(m)$  удов-

летворительно описываются формулой  $w_m = \frac{1}{12}al[m_0 - 1/(m_0 - m)]^{1/2}$ , где предельный момент  $m_0 = 16(1 - 8u_1^3)/3\pi(1 - 16u_1^4)$ .

3. Экспериментальное исследование выполняли при изгибе медных и алюминиевых труб радиусом 0,6 и 1,0 см и толщиной 0,1 и 0,2 см. Установка была смонтирована на базе токарного станка. Трубы приводили во вращение с помощью патрона станка, а усилие прикладывали с помощью обоймы с прокладками, уменьшающими смятие трубы, через суппорт станка с упругим динамометром.

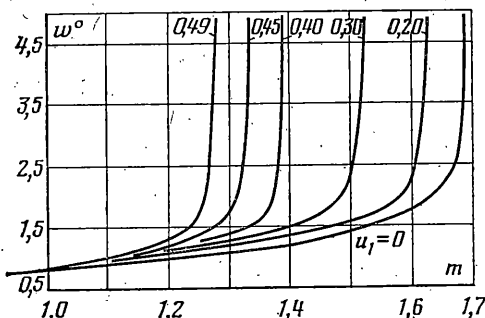
Специальные подвижные планки, прижатые к трубе пружинами, фиксировали компоненты прогиба в двух направлениях. По компонентам прогиба определяли угол  $\alpha_m$ .

Экспериментальные точки показаны на фиг. 2 и 3. При  $1,0 \leq m \leq 1,20$  экспериментальные данные удовлетворительно согласуются с расчетными; расхождения не превышают 20% как для угла  $\alpha_m$ , так и для величины прогиба. При  $m > 1,20$  расхождение расчетных и экспериментальных величин возрастает.

Видимо, с увеличением прогиба не выполняются принятые при анализе допущения о малости деформаций и углов поворота балки. Однако во всех случаях при изгибе вращающихся труб при пластической деформации происходит боковое смещение, а при потере несущей способности и резком увеличении деформации прогиб труб происходит не по направлению силы, как для неподвижных балок, а под углом  $90^\circ$  к линии действия силы.

При изменении направления вращения трубы направление ее максимального прогиба изменялось на  $180^\circ$ . Явления бокового смещения обнаруживаются при правке вращающихся труб на роликовых машинах (либо на машинах, где труба неподвижна, а вектор силы, приложенной с помощью специальной обоймы, вращается относительно трубы), что следует учитывать при выборе технологических режимов.

При вращении изгибаемой трубы и постоянстве внешних сил материал испытывает знакопеременную циклическую деформацию. При наличии пластической деформации ввиду зависимости напряжений от истории нагружения происходит нарушение симметрии относительно плоскости действия сил и характер деформации весьма значительно отличается от изгиба неподвижных труб.



Фиг. 5

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Качанов Л. М. Основы теории пластичности. М.: Наука, 1969. 420 с.
2. Шапиро Г. С. О предельном и упругопластическом состояниях конструкций.— Изв. АН СССР. Механика и машиностроение, 1963, № 4, с. 138—144.
3. Клоушников В. Д. Математическая теория пластичности. М.: Изд-во МГУ, 1979. 207 с.
4. Ивлев Д. Д. Теория идеальной пластичности. М.: Наука, 1966. 231 с.
5. Работнов Ю. Н. Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1966. 752 с.

Краматорск

Поступила в редакцию  
15.XII.1981