

УДК 624.07:534.1

ОКОЛОКРИТИЧЕСКАЯ ДЕФОРМАЦИЯ
СЛАБОИСКРИВЛЕННОГО СТЕРЖНЯ

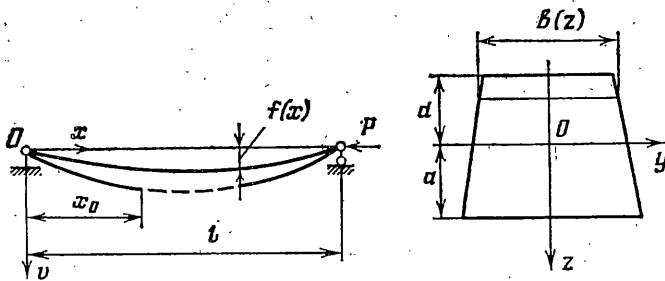
ГОЛЬДЕНШЛЮГЕР С. В., ЛЕОНОВ М. Я.

Исследуется деформация слабоискривленного стержня, когда среднее напряжение по сечению мало отличается от предела текучести. При этом считается, что касательный модуль не меняется.

В зависимости от длины стержень деформируется качественно по-разному. Показано, что изгиб длинного стержня описывается обыкновенным нелинейным дифференциальным уравнением второго порядка. Короткие стержни могут деформироваться через стадию полной пластичности, которая реализуется в весьма малом диапазоне изменения продольной силы и заканчивается прежде, чем сила достигнет критического значения по Шенли. Происходящий затем изгиб с разгрузкой описывается нелинейным дифференциальным уравнением третьего порядка в частных производных. Получено асимптотическое решение этого уравнения.

Исследуются напряжения в области разгрузки; показано, что действительная эшора этих напряжений по высоте сечения будет нелинейной, несмотря на применение гипотезы плоских сечений и постоянство касательного модуля.

1. Деформация длинного слабоискривленного стержня. Рассмотрим шарнирно-опертый стержень произвольного, симметричного относительно плоскости изгиба поперечного сечения, сжатый продольной силой P



Фиг. 1

(фиг. 1). Положим, что ось недеформированного стержня имеет достаточно малую начальную кривизну.

Вначале рассмотрим случай, когда нагрузка не достигает предельного значения по Карману, т. е. длина стержня l удовлетворяет условию $l > \pi(E_k I)^{1/2} / (\sigma_T F)^{1/2}$, где E_k — модуль Кармана [1], I — момент инерции сечения, F — площадь сечения, σ_T — предел текучести материала стержня на сжатие.

Пусть начальный прогиб описывается полуволной синусоиды $f(x) = A \sin \pi x / l$. Максимальный начальный прогиб A может быть экспериментально определен методом Саусвелла [2]. В реальных стержнях можно ожидать $A \sim 10^{-3} l$ [3].

В пределах упругости уравнение изгиба стержня имеет решение [4]:

$$v(x, P) = \frac{AP/P_*}{1 - P/P_*} \sin \frac{\pi x}{l}, \quad P_* = \pi^2 EI / l^2 \quad (1.1)$$

где v — прогиб, P_* — критическая сила по Эйлеру, E — модуль Юнга.

При некотором значении силы (P_0) напряжение в крайнем сжатом волокне (при $x=l/2$) достигнет предела текучести. При этом должно выполняться соотношение

$$FA/[W_1(1-P_0/P_*)]=\sigma_T F/P_0-1, \quad W_1=l/d \quad (1.2)$$

где d — расстояние от центральной оси до наиболее удаленного волокна (фиг. 1).

Составим уравнение изгиба после возникновения пластической деформации. В пределах упругопластического участка напряжение (σ_x) по поперечному сечению определяется выражением

$$\sigma_x = \begin{cases} \sigma_T(1-E'/E)+E'(z_0-z)v'' & (z < z_1) \\ E(z_0-z)v'' & (z \geq z_1) \end{cases} \quad (1.3)$$

где E' — касательный модуль ($E'=\text{const}$), z_0 — координата нейтральной линии, z_1 — координата волокна, в котором напряжение равно пределу текучести.

Суммируя моменты внутренних и внешних сил относительно центральной оси (oy), с учетом предыдущей формулы приходим к уравнению, описывающему прогибы упругопластического участка

$$D(z_0, z_1)v'' + Pv = -PA \sin \frac{\pi x}{l} - \sigma_T \left(1 - \frac{E'}{E}\right) \int_{-d}^{-z_1} zb(z) dz \quad (1.4)$$

$$D(z_0, z_1) = EI + (E' - E) \int_{-d}^{-z_1} (z_0 - z)zb(z) dz \quad (1.5)$$

где $b(z)$ — переменная ширина сечения. В области, где пластические деформации отсутствуют, уравнение изгиба имеет вид

$$EIv'' + Pv = -PA \sin \pi x/l \quad (1.6)$$

Величина z_0 определяется из условия равновесия всех сил в проекции на ось стержня

$$G(z_0, z_1) = - \left[P + \sigma_T \left(1 - \frac{E'}{E}\right) \int_{-d}^{-z_1} b(z) dz \right] / v'' \quad (1.7)$$

$$G(z_0, z_1) = Ez_0F + (E - E') \int_{-d}^{-z_1} (z_0 - z)b(z) dz$$

Используя (1.3), получаем формулу для z_1 :

$$z_1 = z_0 - \sigma_T / (Ev'') \quad (1.8)$$

Оператор $D(z_0, z_1)$ можно в явном виде выразить через v'' , если принять, что, по крайней мере в области, где имеют место пластические деформации, ширина сечения постоянна, т. е. можно представить $D(z_0, z_1) = \varphi(v'')$, где $\varphi(v'')$ — в принципе известная функция от кривизны.

Уравнение (1.4) примет вид

$$\varphi(v'')v'' + Pv = -PA \sin \pi x/l \quad (1.9)$$

Для начальной стадии упругопластического изгиба в пределах упругопластического участка с точностью до малых высшего порядка малости $\sin \pi x/l \approx 1$ ($x \approx l/2$). Тогда последняя формула дает $v'' = f(v)$, где $f(v)$ — определенная функция от v .

Это уравнение, как известно, интегрируется в квадратурах [5].

2. Изгиб в стадии полной пластичности. Перейдем к рассмотрению случая, когда

$$\pi(E'I)^{1/2}/(\sigma_T F)^{1/2} \leq l < \pi(E_h I)^{1/2}/(\sigma_T F)^{1/2}$$

Если начальная кривизна достаточно мала, то при некотором значении силы, которую обозначим P' , весь стержень охватится пластическими деформациями от сжатия. Из формулы (1.7) получаем

$$z_0(P') = -[P' + \sigma_T(1 - E'/E)F]/(E'Fv'')$$

Подставляя этот результат в (1.5), имеем $D(z_0, z_1) = E'I$, а уравнение (1.4) при $P = P'$ примет вид

$$E'Iv'' + P'v = -P'A \sin \pi x/l \quad (2.1)$$

Назовем критическим по Шенли то значение силы, которое дает наименьшее собственное число соответствующего однородного уравнения: $P^* = \pi^2 E'I/l^2$. Решение уравнения (2.1) запишется так:

$$v(x, P') = \frac{AP'/P^*}{1 - P'/P^*} \sin \frac{\pi x}{l}$$

Когда весь стержень охватится пластическими деформациями, напряжение в волокне $z = a$ (фиг. 1) в среднем сечении стержня достигнет предела текучести. Имеем

$$P'/F + E'a\pi^2 AP'/[P^* l^2 (1 - P'/P^*)] = \sigma_T \quad (2.2)$$

Если при $P > P'$ приращение напряжения от сжатия (P/F) превосходит приращение растягивающего напряжения от изгиба, то разгрузка в стержне не возникает. Эту стадию деформирования будем называть чисто пластической. Тогда должно быть

$$W_2 dP > d\{P[v(1/2l, P) + A]\}F, \quad W_2 = I/a \quad (2.3)$$

Уравнение изгиба при этом условии имеет вид

$$E'Iv'' + Pv = -PA \sin \pi x/l \quad (2.4)$$

Его решение будет определяться формулой

$$v(x, P) = \frac{AP/P^*}{1 - P/P^*} \sin \frac{\pi x}{l}, \quad P > P' \quad (2.5)$$

Стадия чисто пластического изгиба заканчивается в тот момент, когда (2.3) обращается в равенство. Соответствующее значение силы (P^{**}) подлежит определению из уравнения

$$\frac{W^2}{F} = P^{**}U + v\left(\frac{l}{2}, P^{**}\right) + A, \quad U = \frac{\partial v}{\partial P} \Big|_{x=l/2}^{P=P^{**}} \quad (2.6)$$

где $v(1/2l, P^{**})$ определяется согласно (2.5).

Для квадратного поперечного сечения ($h \times h$) при $l/h = 10$, $A = 10^{-2} l$ уравнение (1.2) дает $P_0/P^* = 0,41$. Ниже для этих данных приведены значения силы P' , при которой весь стержень охватывается пластическими деформациями, и силы P^{**} , при которой начинается разгрузка для некоторых значений E'/E :

E'/E	0,10	0,50	0,90
P'/P^*	0,81	0,83	0,91
P^{**}/P^*	0,84	0,87	0,95

Как показывают вычисления, стадия чисто пластического изгиба реализуется в весьма малом диапазоне изменения продольной силы и заканчивается прежде, чем сила достигнет критического значения по Шенли. В дальнейшем стержень деформируется с разгрузкой.

Экспериментально измерить критическую силу по Шенли невозможно. На опыте под критической силой понимают предельную нагрузку. Вследствие неизбежных несовершенств для реальных стержней она снижается и становится близкой к критической силе по Шенли, что, по-видимому, является поводом для придания последней некоторого физического смысла.

3. Уравнения изгиба с разгрузкой. Приращение относительного удлинения ε_x , согласно гипотезе плоских сечений, имеет вид

$$d\varepsilon_x = (z_0 - z) (\partial^3 v / \partial x^2 \partial P) dP \quad (3.1)$$

Здесь, в отличие от (1.3), z_0 — координата волокна, в котором приращение деформации в данный момент отсутствует.

Соответствующее приращение напряжения

$$d\sigma_x = E' d\varepsilon_x \quad (z \leq z_0); \quad d\sigma_x = E d\varepsilon_x \quad (z > z_0) \quad (3.2)$$

Приращение момента внутренних сил относительно оси $z=a$ с учетом (3.1) и (3.2) имеет вид

$$dM = D(z_0) (\partial^3 v / \partial x^2 \partial P) dP \quad (3.3)$$

$$D(z_0) = E' (I + az_0 F) + (E - E') \int_{z_0}^a (a - z) (z_0 - z) b(z) dz \quad (3.4)$$

Момент внешних сил получит приращение

$$dM = P dv + v dP + \Phi(x) dP, \quad \Phi(x) = a + f(x) + v(x, P^{**}) \quad (3.5)$$

Следовательно, в области пластических деформаций с разгрузкой прогибы описываются уравнением

$$D(z_0) \partial^3 v / \partial x^2 \partial P + P \partial v / \partial P + v = -\Phi(x) \quad (3.6)$$

В части стержня, где разгрузка отсутствует, имеем

$$E' I v'' + P v = -P \Phi(x) \quad (3.7)$$

На границе зон догрузки и разгрузки должны выполняться условия непрерывности кривой прогиба, а также следующее соотношение, следующее из равенства нулю приращения напряжения:

$$W_2 dP = d[Pv(x, P) + P\Phi(x)] F|_{x=x_0} \quad (3.8)$$

где x_0 — координата начала зоны разгрузки (фиг. 1). Решение уравнения (3.7) с учетом граничного условия $v(0, P) = 0$ имеет вид

$$v(x, P) = C_1 \sin \sqrt{\frac{P}{E'I}} x - \sqrt{\frac{P}{E'I}} \int_0^x \Phi(\xi) \sin \sqrt{\frac{P}{E'I}} (x - \xi) d\xi \quad (3.9)$$

где постоянная C_1 определяется из уравнения (3.8). Условие равновесия в проекции на ось стержня дает уравнение относительно z_0 :

$$(\partial^3 v / \partial x^2 \partial P)^{-1} = -H(z_0) \quad (3.10)$$

$$H(z_0) = E' z_0 F + (E - E') \int_{z_0}^a (z_0 - z) b(z) dz$$

4. Асимптотическое решение уравнения (3.6). Рассмотрим класс стержней, для которых ширина сечения, по крайней мере в области, где имеет место разгрузка, постоянна. В этот класс, например, входят поперечные сечения в виде креста, тавра, двутавра и т. д.

Пусть ширина сечения в области разгрузки равна b_m . Уравнение (3.10) при этом удается разрешить в явном виде относительно z_0 :

$$z_0 = A_1 - \left(A_2 + \frac{A_3}{\partial^3 v / \partial x^2 \partial P} \right)^{1/2}, \quad A_1 = a + \frac{E' F}{b_m (E - E')} \quad (4.1)$$

$$A_2 = \frac{(E' F)^2}{b_m^2 (E - E')^2} + \frac{2a E' F}{b_m (E - E')}, \quad A_3 = \frac{2}{b_m (E - E')}$$

Полагая в формуле (3.4) $b(z) = b_m$, получим

$$D(z_0) = E' (I + a z_0 F)^{-1/6} (E - E') b_m (a - z_0)^3 \quad (4.2)$$

Используя здесь (4.1) и подставляя результат в (3.6), приходим к уравнению

$$\left[B_1 + B_2 \sqrt{A_2 + \frac{A_3}{\partial^3 v / \partial x^2 \partial P}} + B_3 \left(B_4 - \sqrt{A_2 + \frac{A_3}{\partial^3 v / \partial x^2 \partial P}} \right)^3 \right] \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial P} + P \frac{\partial v}{\partial P} + v = -\Phi(x) \quad (4.3)$$

$$B_1 = E' (I + a A_1 F), \quad B_2 = -E' a F, \quad B_3 = -^{1/6} (E - E') b_m, \quad B_4 = a - A_1$$

Ограничиваясь для начальной стадии изгиба малыми первого порядка малости в разложениях функций $v(x, P)$ и $\Phi(x)$ по координате x вблизи $x = l/2$, можно считать, что в пределах области, где происходит разгрузка, $v(x, P) \approx v(l/2, P) = v_m(P)$, $\Phi(x) \approx \Phi(l/2) = \Phi_m$.

Обозначая $\psi(x, P) = \partial v / \partial P$, уравнению (4.3) можно придать вид

$$\left[B_1 + B_2 \sqrt{A_2 + \frac{A_3}{d^2 \psi / dx^2}} + B_3 \left(B_4 - \sqrt{A_2 + \frac{A_3}{d^2 \psi / dx^2}} \right)^3 \right] \frac{d^2 \psi}{dx^2} + P \psi = C, \quad C = -\Phi_m - v_m. \quad (4.4)$$

Выражая ψ'' через ψ , можно записать

$$\psi'' = f(\psi, C) \quad (4.5)$$

где $f(\psi, C)$ — известная функция от ψ и C .

Перепишем последнее уравнение так: $^{1/2} d(\psi')^2 = f(\psi, C) d\psi$. Интегрируя в пределах от x_0 до x , будем иметь

$$\frac{1}{2} (\psi')^2 - \frac{1}{2} (\psi')^2 \Big|_{x=x_0} = \int_{\psi(x_0, P)}^{\psi(x, P)} f(\psi, C) d\psi \quad (4.6)$$

Введем функцию

$$S(\psi, C) = \left[2 \int_{\psi(x_0, P)}^{\psi(x, P)} f(\psi, C) d\psi - (\psi')^2 \Big|_{x=x_0} \right]^{-1/2}$$

Тогда уравнение (4.6) сводится к виду $dx = S(\psi, C) d\psi$, откуда имеем

$$x - x_0 = \int_{\psi(x_0, P)}^{\psi(x, P)} S(\psi, C) d\psi \quad (4.7)$$

Эта формула определяет зависимость $\psi(x, P)$ от C .

Неизвестная координата начала зоны разгрузки находится из уравнения

$$x_0 = \frac{l}{2} - \int_{\psi(x_0, P)}^{\psi(l/2, P)} S(\psi, C) d\psi \quad (4.8)$$

если $\psi(l/2, P)$ удовлетворяет условию

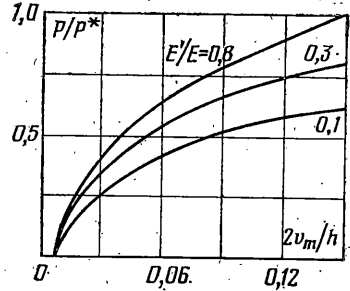
$$(\psi')^2|_{x=x_0} = -2 \int_{\psi(x_0, P)}^{\psi(l/2, P)} f(\psi, C) d\psi \quad (4.9)$$

причем, здесь учтено, что вследствие симметрии кривой прогиба $\psi' = 0$ при $x = l/2$.

Определив из (4.11) зависимость $\psi(x, P)$ от C , можно записать $dv_m/dP = \psi(l/2, P, v_m)$, откуда

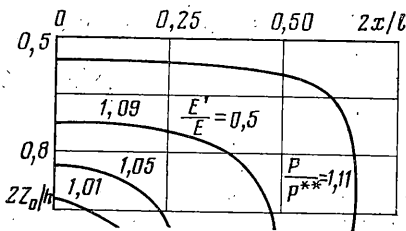
$$v_m(P) = v_m(P^{**}) + \int_{P^{**}}^P \psi(l/2, P, v_m) dP \quad (4.10)$$

Это соотношение является трансцендентным уравнением относительно $v_m(P)$. На фиг. 2 приведены графики зависимости $2v_m/h$ от P/P^* для различных отношений E'/E . Результаты расчетов по формулам (4.1) и (4.8) представлены на фиг. 3 и 4.

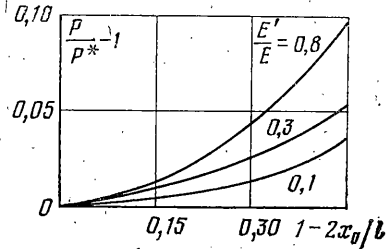


Фиг. 2

5. Определение напряжений в области разгрузки. Каждое волокно, которое в данный момент находится в области разгрузки, вначале догружается, а затем, начиная с определенного момента, разгружается, причем начало разгрузки зависит от координаты волокна. Следовательно, в области разгрузки невозможно применять конечное соотношение между напряжениями и деформациями.



Фиг. 3



Фиг. 4

Деформация волокна, согласно (3.1), определяется выражением

$$\varepsilon_x = \varepsilon_0 + \int_{P^{**}}^P z_0 \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial P} dP - z[\kappa(P) - \kappa(P^{**})], \quad \kappa(P) = v'' \quad (5.1)$$

где ε_0 — деформация при $P = P^{**}$.

В момент, когда граница области разгрузки проходит через данное волокно ($z_0 = z$), из этой формулы можно получить деформацию, которая была накоплена в волокне к окончанию догрузки. Соответствующее значение силы обозначим P_p . При $P > P_p$ волокно работает в стадии разгрузки. Суммируя соответствующие напряжения, приходим к формуле

$$\sigma_x = E(z_0 - z)v'' - E \int_{P_p}^P \frac{\partial z_0}{\partial P} v'' dP - E' \int_{P^{**}}^{P_p} \frac{\partial z_0}{\partial P} v'' dP - \frac{P^{**}}{F} \quad (5.2)$$

Полагая в уравнении (3.10) $z_0=z$, получаем

$$(\partial^3 v / \partial x^2 \partial P)^{-1} |_{P=\bar{P}} = H(z)$$
$$H(z) = E' z F + (E' - E) \left[z \int_z^a b(z) dz - \int_z^a z b(z) dz \right]$$

Поскольку из данного уравнения следует, что сила, при которой начинается разгрузка данного волокна, будет нелинейной функцией координаты последнего, то определенная согласно (5.2) эпюра напряжений по высоте сечения в зоне разгрузки будет нелинейной, несмотря на применение гипотезы плоских сечений, и в противоположность результату, получаемому по традиционной методике.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вольмир А. С. Устойчивость упругих систем. М.: Физматгиз, 1963. 879 с.
2. Алфугов Н. А. Основы расчета на устойчивость упругих систем. М.: Машиностроение, 1978. 311 с.
3. Беляев Н. М. Сопротивление материалов. М.: Наука, 1976. 607 с.
4. Тимошенко С. П. Устойчивость стержней, пластин, оболочек. М.: Наука, 1971. 808 с.
5. Леонов М. Я., Гольденшлюгер С. В. Околокритическая деформация неупругого стержня. - Изв. АН КиргССР, 1982, № 4, с. 8-16.

Фрунзе

Поступила в редакцию
9.I.1982