МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 3 • 1984

УДК 624.074+539.376:678.5.06

# УСТОЙЧИВОСТЬ ВЯЗКОУПРУГИХ КОНСТРУКЦИЙ ПРИ ДЕЙСТВИИ СТАЦИОНАРНЫХ СЛУЧАЙНЫХ СЖИМАЮЩИХ НАГРУЗОК

ПОТАПОВ В. Д.

В [1] на примере вязкоупругого стержня, расположенного в сплошной вязкоупругой среде, исследовалась устойчивость элементов конструкций, находящихся под действием сжимающих нагрузок, являющихся стационарным процессом. Движение стержня интерпретировалось как некоторый многомерный марковский процесс. Публикуемая статья посвящена применению метода усреднения [2, 3] для анализа устойчивости стохастических вязкоупругих конструкций.

1. Допустим, что обобщенное перемещение $f$ указанной конструкции определяется решением уравнения

$$f^{\cdot\cdot}+(1-\alpha)\omega_0^2 f-\omega_0^2 f_0+\varepsilon^2\omega_0^2\mathbf{\Gamma}(f-f_0)-\varepsilon\omega_0^2\eta f=0 \tag{1.1}$$

$$\mathbf{\Gamma} f=\int_{-\infty}^{t} G(t-\tau)f(\tau)\,d\tau$$

Здесь $\omega_0$ — частота собственных колебаний системы при $\mathbf{\Gamma} f=0$, $\varepsilon$ — малый параметр, $\alpha$ — безразмерный параметр, постоянный во времени и характеризующий значение математического ожидания нагрузки ($\alpha<1$), $\eta(t)$ — стационарный случайный процесс с математическим ожиданием, равным нулю, $f_0$ — значение обобщенного перемещения в исходном состоянии конструкции, $G(t-\tau)$ — ядро релаксации, удовлетворяющее условию $0<\int G(\tau)\,d\tau<1$ ($\tau$ меняется от 0 до $\infty$); точкой обозначена производная по времени.

Воспользуемся подстановкой $f=y+f_0/(1-\alpha)$; тогда уравнение (1.1) примет вид

$$y^{\cdot\cdot}+(1-\alpha)\omega_0^2 y-\omega_0^2\mathbf{\Gamma}\left(y+\frac{\alpha}{1-\alpha}f_0\right)-\omega_0^2\eta\left(y+\frac{f_0}{1-\alpha}\right)=0 \tag{1.2}$$

Здесь и в дальнейшем малый параметр $\varepsilon$ опускается, но учитывается малость соответствующих слагаемых.

Представим решение уравнения (1.2) в форме синусоиды [2]: $y=A\sin\theta$ $(\theta=\omega t+\varphi,\ \omega^2=(1-\alpha)\omega_0^2)$ с медленно меняющимися во времени амплитудой $A$ и фазой $\varphi$. После обычной процедуры, применяемой в асимптотическом методе, перейдем от уравнения (1.2) к уравнениям

$$A^{\cdot}=\frac{\omega_0^2}{\omega}\cos\theta\mathbf{\Gamma}\left(A\sin\theta+\frac{\alpha}{1-\alpha}f_0\right)+$$
$$+\omega_0^2\eta\cos\theta\left(A\sin\theta+\frac{f_0}{1-\alpha}\right) \tag{1.3}$$

$$\varphi^{\cdot}=-\frac{\omega_0^2}{\omega A}\sin\theta\Gamma\left(A\sin\theta+\frac{\alpha}{1-\alpha}f_0\right)-\frac{\omega_0^2}{\omega A}\eta\sin\theta\left(A\sin\theta+\frac{f_0}{1-\alpha}\right)$$

Усредним сначала нефлуктуационные члены в уравнениях (1.3), как это делается в стохастических дифференциальных уравнениях [4, 5] по формулам [3]:

$$F_1(A,\varphi)=\frac{1}{T}\int_0^T\cos(\omega t+\varphi)\int_{-\infty}^{t}G(t-\tau)A\sin(\omega\tau+\varphi)\,d\tau\,dt$$

$$F_2(A,\varphi)=\frac{1}{T}\int_0^T\sin(\omega t+\varphi)\int_{-\infty}^{t}G(t-\tau)A\sin(\omega\tau+\varphi)\,d\tau\,dt;\quad T=\frac{2\pi}{\omega}$$

где $A$, $\varphi$ считаются независящими от $\tau$, $t$.

После несложных преобразований получим

$$\begin{aligned}A^{\cdot}&=\frac{\omega_0^2}{\omega}zA+\frac{\omega_0^2}{\omega}\eta\cos\theta\left(A\sin\theta+\frac{f_0}{1-\alpha}\right)=\frac{\omega_0^2}{\omega}zA+g_{11}\eta\\ \varphi^{\cdot}&=-\frac{\omega_0^2}{\omega}x-\frac{\omega_0^2}{\omega A}\eta\sin\theta\left(A\sin\theta+\frac{f_0}{1-\alpha}\right)=-\frac{\omega_0^2}{\omega}x+g_{21}\eta\end{aligned}\tag{1.4}$$

$$z=-\frac{1}{2}\int_0^\infty G(\tau)\sin\omega\tau\,d\tau,\quad x=\frac{1}{2}\int_0^\infty G(\tau)\cos\omega\tau\,d\tau$$

Итак, процедура усреднения позволила совершить переход от интегро-дифференциального уравнения (1.2) к дифференциальным уравнениям (1.4).

Далее проведем усреднение флуктуационных членов. В результате усреднения случайные процессы, описываемые уравнениями (1.4), представляются диффузионными марковскими процессами, которым соответствуют уравнения

$$A^{\cdot}=a_1+b_1\xi,\quad \varphi^{\cdot}=a_2+b_2\xi\tag{1.5}$$

Здесь $\xi(t)$ — эквивалентный стационарный «белый шум» с равным нулю математическим ожиданием и корреляционной функцией $K_\xi(\tau)=\delta(\tau)$, $\delta(\tau)$ — дельта-функция.

Найдем функции $a_1$, $b_1$ так, как это предлагается в [4, 6]:

$$\begin{aligned}a_1&=\frac{\omega_0^2}{\omega}zA+\frac{1}{T}\int_0^T dt\int_{-\infty}^0\left[\frac{\partial g_{11}(t)}{\partial A}g_{11}(t+\tau)+\frac{\partial g_{11}(t)}{\partial\varphi}g_{21}(t+\tau)\right]K_\eta(\tau)\,d\tau=\\ &=\frac{\omega_0^2}{\omega}zA+\frac{\omega_0^4}{\omega^2}\left[\frac{3}{8}A\int_0^\infty\cos 2\omega\tau K_\eta(\tau)\,d\tau+\right.\\ &\left.+\frac{1}{2A}\left(\frac{f_0}{1-\alpha}\right)^2\int_0^\infty\cos\omega\tau K_\eta(\tau)\,d\tau\right]\end{aligned}$$

$$b_1^2=\frac{1}{T}\int_0^T dt\int_{-\infty}^\infty g_{11}(t)g_{11}(\tau)K_\eta(\tau-t)\,d\tau=$$

$$=\frac{\omega_0^4}{\omega^2}\left[\frac{A^2}{8}\int_{-\infty}^\infty\cos 2\omega\tau K_\eta(\tau)\,d\tau+\frac{1}{2}\left(\frac{f_0}{1-\alpha}\right)^2\int_{-\infty}^\infty\cos\omega\tau K_\eta(\tau)\,d\tau\right]$$

Видно, что амплитуда $A$ определяется независимо от фазы $\varphi$. В дальнейшем ограничимся рассмотрением только уравнения (1.5).

2. Остановимся сначала на исследовании устойчивости идеальной конструкции, в которой $f_0=0$.

Понимая белый шум $\xi(t)$ в смысле Стратоновича [7], найдем коэффициент сноса $a_*$ и диффузии $b_*$, соответствующие диффузионному процессу $A(t)$:

$$a_*=aA,\quad b_*=b_1^2=bA^2$$

$$a=\frac{\omega_0^2}{\omega}z+\frac{3\omega_0^4}{8\omega^2}\int_{-\infty}^{0}\cos 2\omega\tau K_\eta(\tau)\,d\tau+\frac{1}{2}b=\frac{\omega_0^2}{\omega}z+2b$$

$$b=\frac{\omega_0^4}{8\omega^2}\int_{-\infty}^{\infty}\cos 2\omega\tau K_\eta(\tau)\,d\tau \tag{2.1}$$

Плотность распределения вероятностей значений $A$, определяемая из уравнения Фоккера — Планка — Колмогорова, имеет вид

$$p(t,A)=\frac{1}{\sqrt{2\pi bt}}\exp[(b-a)t]\exp\left\{-\frac{[\ln A/A_0+(1{,}5b-a)]^2}{2bt}\right\}$$

где $A_0$ — значение амплитуды $A$ в начальный момент времени.

Оценим устойчивость конструкции по отношению к моментам функции $A(t)$ $n$-го порядка [7], которые определяются выражением $\langle(A/A_0)^n\rangle=\exp[(a+{}^1/_2(n-1)b)nt]$. Угловыми скобками обозначена операция математического ожидания.

Итак, невозмущенное движение вязкоупругой конструкции асимптотически $n$-устойчиво, если выполняется неравенство

$$a+{}^1/_2(n-1)b<0 \tag{2.2}$$

Подставив зависимость (2.1) в это неравенство, получим

$$z+\frac{(n+3)\omega_0^2}{8\omega}\int_{0}^{\infty}\cos 2\omega\tau K_\eta(\tau)\,d\tau<0 \tag{2.3}$$

Допустим, что ($\sigma^2$ — дисперсия случайного процесса $\eta(t)$):

$$G(\tau)=\gamma K\exp[-\gamma(1+K)\tau],\quad K_\eta(\tau)=\sigma^2\exp(-\delta|\tau|) \tag{2.4}$$

При таком ядре и корреляционной функции соотношение (2.3) принимает вид

$$\frac{n+3}{4K}\frac{\sigma^2\omega_0^2\delta}{\gamma(\delta^2+4\omega^2)}\left[1+\frac{\gamma^2}{\omega^2}(1+K)^2\right]<1 \tag{2.5}$$

$$z=-\frac{\gamma K}{2\omega}\left[1+\frac{\gamma^2}{\omega^2}(1+K)^2\right]^{-1},\qquad \int_{0}^{\infty}\cos 2\omega\tau K_\eta(\tau)\,d\tau=\frac{\sigma^2\delta}{\delta^2+4\omega^2}$$

Предположим, что $\gamma/\omega$ достаточно мало. Тогда

$${}^1/_4(n+3)(\sigma^2\delta/\gamma)/K<\delta^2/\omega_0^2+4(1-\alpha) \tag{2.6}$$

Если $\gamma\sim\delta$, а $\delta/\omega_0$ мало, то неравенство (2.5) запишется следующим образом:

$$\alpha<1-{}^1/_{16}(n+3)\sigma^2\delta/(K\gamma) \tag{2.7}$$

Отсюда видно, что увеличение дисперсии случайной составляющей нагрузки и уменьшение масштаба ее корреляции (отношение $1/\delta$) снижает степень устойчивости, в то время как увеличение меры ползучести материала (величины $K$) и уменьшение времени релаксации его (отношения $1/\gamma$) повышает степень устойчивости вязкоупругой конструкции.

Для сравнения запишем условия $n$-устойчивости, если белый шум $\xi(t)$ понимается в смысле Ито. Коэффициенты сноса и диффузии процесса $A(t)$ в этом случае равны $a_*=(\omega_0^2 z/\omega+1{,}5b)A$, $b_*=bA^2$. Неравенствам (2.3), (2.5), (2.7) соответствуют следующие неравенства:

$$z+\frac{(n+2)\,\omega_0^2}{8\omega}\int_0^\infty \cos 2\omega\tau K_\eta(\tau)\,d\tau<0$$

$$\frac{(n+2)\,\sigma^2\omega_0^2\delta}{4K\gamma\,(\delta^2+4\omega^2)}\left[1+\frac{\gamma^2}{\omega^2}(1+K)^2\right]<1$$

$$\alpha<1-(n+2)\,\delta\sigma^2/(16K\gamma)$$

Как видно, эти условия устойчивости являются менее жесткими, нежели условия (2.3), (2.5), (2.7).

3. Далее остановимся на анализе поведения вязкоупругой конструкции, имеющей начальное искривление ($f_0=0$).

Ограничимся рассмотрением стационарного решения уравнения Фоккера — Планка — Колмогорова, понимая белый шум в смысле Ито

$$-\frac{\partial}{\partial A}(a_*p)+\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial A^2}(b_*p)=0 \tag{3.1}$$

Плотность распределения вероятностей равна

$$p(A)=\frac{c}{b_*}\exp\left(2\int_{A_*}^{A}\frac{a_*}{b_*}\,dA\right)$$

$$a_*=\left[\frac{\omega_0^2}{\omega}z+\frac{3\omega_0^4}{8\omega^2}\int_0^\infty \cos 2\omega\tau K_\eta(\tau)\,d\tau\right]A+$$

$$+\frac{\omega_0^4}{2\omega^2}\left(\frac{f_0}{1-\alpha}\right)^2\int_0^\infty \cos\omega\tau K_\eta(\tau)\,d\tau\,\frac{1}{A}=aA+\frac{g}{A}$$

$$b_*=bA^2+\frac{\omega_0^4}{\omega^2}\left(\frac{f_0}{1-\alpha}\right)^2\int_0^\infty \cos\omega\tau K_\eta(\tau)\,d\tau=bA^2+d$$

где $c$, $A_*$ — произвольные константы. Постоянная $c$ находится из условия нормировки $\int p(A)\,dA=1$ ($A$ меняется в пределах от 0 до $\infty$). Оказывается, что стационарное решение уравнения (3.1) возможно только при условии $m=(a/b-0{,}5)<0$. После всех преобразований получим $p(A)=(b-2a)A\,(1+ba^2/d)^m/d$. Найдем статистические моменты $n$-го порядка случайной величины $A$

$$\langle A^n\rangle=\left(0{,}5-\frac{a}{b}\right)\left(\frac{d}{b}\right)^{n/2}B\left(\frac{n+2}{2}\;\frac{1-n}{2}-\frac{a}{b}\right)$$

где $B(\ldots)$ — бэта-функция, аргументы которой положительны, поэтому должно соблюдаться неравенство

$$a+{}^1/_2(n-1)\,b<0 \tag{3.2}$$

Сопоставляя неравенства (3.2), (2.2), видим, что условие существования моментов $n$-го порядка стационарного решения совпадает с условием устойчивости невозмущенного движения вязкоупругой конструкции по отношению к моментам $n$-го порядка обобщенного перемещения $A$.

4. Известно, что при анализе работы детерминированных систем часто оказывается не достаточно исследования устойчивости их на временной полуоси. Дело в том, что помимо требования устойчивости конструкции по Ляпунову накладываются другие требования и ограничения на значения параметров системы, которые претерпевают изменение во времени. Например, перемещения $f$ в течение всего срока службы конструкции не должны превышать некоторое наперед заданное значение. В связи с этим возникает новая постановка задачи устойчивости — устойчивости невозмущенного движения на конечном промежутке времени.

Аналогичная ситуация складывается и в стохастических системах, в которых вторая постановка оказывается даже более актуальной, чем в детерминированных системах.

Чтобы решить подобную задачу для вязкоупругой конструкции, перенесем начало отсчета времени $t$ из $-\infty$ в 0. Тогда интегральный оператор $\Gamma$ запишется $\Gamma f = \int G(t-\tau) f(\tau)\,d\tau$ ($\tau$ меняется в пределах от 0 до $t$).

Для усреднения уравнений (1.3) воспользуемся формулой

$$F(A,\varphi) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \Phi(A,\varphi,t)\,dt \tag{4.1}$$

что применительно к нефлуктуационным членам дает

$$F_1(A,\varphi) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \cos(\omega t+\varphi) \times$$

$$\times \int_0^t G(t-\tau) A \sin(\omega\tau+\varphi)\,d\tau\,dt, \ldots$$

Усреднение флуктуационных слагаемых по формуле (4.1) совпадает с усреднением за один период $2\pi/\omega$, которое осуществлялось ранее.

В результате усреднения вновь получим уравнения (1.5), в которых $z$ и $x$ определяются следующими выражениями:

$$z = -\frac{1}{2} \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \int_0^t G(\tau) \sin \omega\tau\,d\tau,$$

$$x = \frac{1}{2} \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \int_0^t G(\tau) \cos \omega\tau\,d\tau$$

Допустим, что $f_0=0$ и амплитуда перемещения $A$ не должна превышать значение $\Delta$. Плотность распределения вероятностей $p(t,A)$ события, заключающегося в том, что по истечении конечного промежутка времени $t$ величина $A$ впервые достигнет границы области допустимых значений $\Delta$, находится, как известно [8], из уравнения Фоккера — Планка — Колмогорова, причем его решение должно удовлетворять начальному и граничным условиям $p(0,A)=\delta(A-A_0)$, $p(t,0)=p(t,\Delta)=0$, $0<A_0<\Delta$.

Можно показать, что указанная плотность равна

$$p(t,A) = \frac{1}{\sqrt{2\pi bt}} A^{\psi-1} A_0^{-\psi} \exp\left(-\psi^2 \frac{bt}{2}\right) \left\{ \exp\left[-\left(\ln\frac{A}{A_0}\right)^2 \Big/ (2bt)\right] - \right.$$

$$\left. - \exp\left[-\left(\ln\frac{\Delta^2}{AA_0}\right)^2 \Big/ (2bt)\right]\right\}, \quad \psi = \frac{a}{b} - 0{,}5$$

Вероятность $P(t)$ недостижения случайным процессом $A(t)$ границы области $\Delta$ определяется интегралом $P(t)=\int p(t,A)\,dA$ (в пределах от 0 до $\Delta$), который сводится к двум интегралам ошибок [9]:

$$P(t)=\frac{1}{2}\left\{[1+\Phi(\mu-\zeta)]-\left(\frac{\Delta}{A_0}\right)^{2\psi}[1-\Phi(\mu+\zeta)]\right\} \qquad (4.2)$$

$$\Phi(\Omega)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\Omega e^{-t^2}dt,\quad \mu=\left(\ln\frac{\Delta}{A_0}\right)\Big/\sqrt{2bt},\quad \zeta=\psi\sqrt{\frac{bt}{2}}$$

Вероятность $P(t)$, принимающая значение, равное единице при $t=0$, по-разному ведет себя при увеличении времени в зависимости от величины $\psi$.

При $\psi\geqslant0$ $\lim P(t)=0$ $(t\to\infty)$, а при $\psi<0$ $\lim P(t)=1-(A_0/\Delta)^{-2\psi}$ $(t\to\infty)$.

Таким образом, во втором случае за счет выбора начального значения перемещения $A_0$ вероятность $P(t)$ может быть сделана как угодно близкой к единице, т. е. при $\psi<0$ вязкоупругая конструкция устойчива по вероятности [7].

Условие $\psi<0$ эквивалентно следующему (понимая белый шум $\xi(t)$ в смысле Стратоновича): $\omega_0^2z/(\omega b)+1{,}5<0$.

Если справедливы выражения (2.4), это неравенство принимает вид

$$\frac{3}{4}\frac{\sigma^2\delta\omega_0^2}{(\delta^2+4\omega^2)\gamma K}\left[1+\frac{\gamma^2}{\omega^2}(1+K)^2\right]<1 \qquad (4.3)$$

При малом отношении $\gamma/\omega$ отсюда следует

$$^3/_4\sigma^2\delta/(\gamma K)<\delta^2/\omega_0^2+4(1-\alpha) \qquad (4.4)$$

Наконец, если $\delta\sim\gamma$, а $\delta/\omega_0$ мало, то

$$\alpha<1-{}^3/_{16}\sigma^2\delta/(\gamma K) \qquad (4.5)$$

Заметим, что условия (4.3)—(4.5) совпадают с условиями (2.5)—(2.7) при $n=0$, т. е. устойчивость вязкоупругой конструкции по вероятности эквивалентна ее устойчивости по отношению к моменту нулевого порядка.

Производная от функции $P(t)$ равна $dP(t)/dt=-p_1(t)$, $p_1(t_*)=$ $=p_1(t)|_{t=t_*}$, где $p_1(t_*)$ представляет собой плотность распределения вероятностей времени $t_*$ пребывания амплитуды случайного процесса в области допустимых значений. Располагая этой плотностью, можно найти числовые характеристики указанного времени, в частности его математическое ожидание и дисперсию.

После несложных преобразований получим $\langle t_*\rangle=(1/(\psi b))\ln(\Delta/A_0)$. Отсюда видно, что математическое ожидание времени пребывания амплитуды $A$ в области $(0,\Delta)$ имеет конечное значение только при $\psi\geqslant0$. В противном случае оно не существует.

Дисперсия времени $t_*$ равна $\langle(t_*-\langle t_*\rangle)^2\rangle=\psi^{-3}b^{-2}\ln(\Delta/A_0)$.

Рассмотрим, как ведут себя математическое ожидание и дисперсия времени $t_*$, если имеют место зависимости (2.4). Выражение $\psi b$ равно

$$\psi b=\frac{\omega_0^2}{\omega}z+1{,}5b=\frac{3\sigma^2\delta}{8(1-\alpha)}\left[4(1-\alpha)+\frac{\delta^2}{\omega_0^2}\right]^{-1}-$$
$$-\frac{\gamma K}{2(1-\alpha)}\left[1+\frac{\gamma^2}{\omega^2}(1+K)^2\right]^{-1}.$$

Если $\gamma/\omega$, $\delta/\omega_0$ достаточно малы, тогда $\psi b=[{}^3/_{32}\sigma^2\delta/(1-\alpha)-\gamma K/2]/$ $/(1-\alpha)$.

Таким образом, увеличение постоянной составляющей, дисперсии случайной составляющей и уменьшение масштаба корреляции нагрузки приводит к уменьшению математического ожидания и дисперсии времени $t_*$, а увеличение меры ползучести и параметра $\gamma$ приводит к увеличению тех же характеристик.

Для сравнения запишем результаты, к которым приводит рассмотрение в уравнениях (1.5) белого шума $\xi(t)$ по Ито.

Вместо неравенства (4.5) имеем $\alpha<1-\sigma^2\delta/(8\gamma\dot{K})$, а произведение $\psi b$ равно

$$\psi b=[{}^1/_{16}\sigma^2\delta/(1-\alpha)-\gamma K/2]/(1-\alpha)$$

Таким образом, использование белого шума по Ито дает, так же как и в $n$-устойчивости, менее ограничительные условия устойчивости по вероятности. Значения математического ожидания и дисперсии времени пребывания амплитуды прогиба в заданных пределах оказываются больше, чем при рассмотрении в уравнениях (1.5) белого шума по Стратоновичу.

## ЛИТЕРАТУРА


1. *Потапов В. Д.* Устойчивость элементов конструкций, находящихся под действием стационарных нагрузок.– ПМТФ, 1981, № 4, с. 151–155.
2. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Физматгиз, 1963. 410 с.
3. *Филатов А. Н.* Методы усреднения в дифференциальных и интегродифференциальных уравнениях. Ташкент: Фан, 1971. 279 с.
4. *Стратонович Р. Л.* Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике. М.: Сов. радио, 1961. 558 с.
5. *Митропольский Ю. А.* Метод усреднения в нелинейной механике. Киев: Наук. думка, 1971. 440 с.
6. *Хасьминский Р. З.* О случайных процессах, определяемых дифференциальными уравнениями с малым параметром.– Теория вероятностей и ее применение, 1966, т. 11, № 2, с. 240–259.
7. *Хасьминский Р. З.* Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров. М.: Наука, 1969. 367 с.
8. *Свешников А. А.* Прикладные методы теории случайных функций. М.: Наука, 1968. 463 с.
9. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971. 1108 с.


Москва


Поступила в редакцию
17.II.1982