

УДК 539.3:534.1

УСТОЙЧИВОСТЬ КРИВОЛИНЕЙНОГО ТРУБОПРОВОДА ПРИ ДЕТЕРМИНИСТИЧЕСКОМ И СЛУЧАЙНОМ ВОЗДЕЙСТВИИ

БАБИН О. А., БЕККЕР О., СМЕРНОВ А. И.

Систематическое изложение теории параметрических систем дано в [1]. Различные аспекты поведения трубопроводов с жидкостью исследованы в [2-7]. Несмотря на значительное количество публикаций, большинство из которых затрагивает вопросы динамики прямолинейных участков трубопроводов при детерминистических воздействиях, некоторые количественные и качественные стороны явления нуждаются в дальнейшем изучении.

В публикуемой работе на примере криволинейного участка трубопровода, несущего пульсирующую жидкость, исследуются некоторые вопросы устойчивости при периодическом и случайном изменении скорости потока жидкости. Анализ поведения системы проводится численными методами [8, 9]. В пространстве параметров системы построены области устойчивости, показана возможность стабилизации динамически неустойчивой системы.

1. Рассмотрим участок криволинейного трубопровода, нейтральная ось которого является дугой окружности радиуса R . Предположим, что трубопровод имеет постоянное по длине l сечение с изгибной жесткостью EI , погонную массу m , площадь поперечного сечения F , центральный угол φ . Пусть размеры трубопровода таковы, что оболочечными формами колебаний можно пренебречь по сравнению с балочными. Процесс колебаний в этом случае распадается на два независимых колебания в плоскости изгиба и из плоскости.

Жидкость считаем несжимаемой, поток одномерным. Закон изменения скорости и давления берем в виде

$$V(s, t) = v_0 [1 + \mu \Phi(t)] \quad (1.1)$$

$$p(s, t) = p_0 + \frac{m_0}{F} \left(\mu v_0 \frac{d\Phi(t)}{dt} + \frac{\lambda}{r} V^2 \right) (l-s)$$

где v_0 — средняя по течению скорость, $\Phi(t)$ — произвольная функция времени, p_0 — давление в сечении истечения жидкости из трубопровода, m_0 — масса жидкости на единицу длины, λ — коэффициент сопротивления трению, r — гидравлический радиус, μ — параметр возбуждения, s — координата, отсчитываемая вдоль оси трубопровода.

Пренебрегая деформациями растяжения оси трубопровода и его закручиванием, запишем вариационное уравнение принципа Даламбера — Лагранжа:

$$-\int_0^l EI \left[\left(\psi_2 + \varepsilon_2 \frac{\partial \psi_2}{\partial t} \right) \delta \psi_2 + \left(\psi_3 + \varepsilon_3 \frac{\partial \psi_3}{\partial t} \right) \delta \psi_3 \right] ds + \\ + \sum_{j=1}^3 \int_0^l \left[p_j - (m + m_0) \frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} \right] \delta u_j ds = 0 \quad (1.2)$$

Здесь $u_j(s, t)$ — смещения по касательной к оси, по направлениям главной нормали и бинормали соответственно, $\psi_j(s, t)$ — приращения кривизн, ε_2 — коэффициент внутреннего трения. Остальные обозначения имеют следующий смысл:

$$\begin{aligned} p_1(s, t) &= -\varepsilon_1 \frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{m_0 \lambda}{r} V^2 \\ p_2(s, t) &= -\varepsilon_1 \frac{\partial u_2}{\partial t} - 2m_0 V \frac{\partial \alpha_3}{\partial t} - (pF + m_0 V^2) \left(\frac{1}{R} + \psi_3 \right) \\ p_3(s, t) &= -\varepsilon_1 \frac{\partial u_3}{\partial t} + 2m_0 V \frac{\partial \alpha_2}{\partial t} + (pF + m_0 V^2) \psi_2 \end{aligned} \quad (1.3)$$

При этом ε_1 — коэффициент внешнего трения

$$\begin{aligned} \psi_1 &= \partial \alpha_1 / \partial s + \partial u_3 / R \partial s = 0, \quad \psi_2 = \partial \alpha_2 / \partial s + \alpha_1 / R, \quad \psi_3 = \partial \alpha_3 / \partial s \\ \alpha_2 &= -\partial u_3 / \partial s, \quad \alpha_3 = \partial u_3 / \partial s + u_1 / R, \quad \partial u_1 / \partial s - u_2 / R = 0 \end{aligned} \quad (1.4)$$

Введем безразмерные величины $\xi = s/l$, $\tau = kt$, $v = v_0 l [m_0 / (EI)]^{1/2}$, $\beta = (1 + m/m_0)^{-1/2}$, $\nu = \theta / \omega_0$, $p_* = p_0 F l^2 / (EI)$, $\xi = \lambda l / r$, $\eta = k \varepsilon_2$, $\gamma = \varepsilon_1 k^{-1} (m + m_0)^{-1}$, где θ — частота пульсации скорости потока жидкости, ω_0 — основная собственная частота колебаний прямолинейного трубопровода без жидкости $k = [EI / (m + m_0)]^{1/2} l^{-2}$.

С учетом (1.3), (1.4) и безразмерных параметров вместо уравнения (1.2) получим

$$\int_0^1 \{ [y_2'' + \varphi y_1' + \eta (y_2'' + \varphi y_1')] (\delta y_2'' + \varphi \delta y_1') - p_1^0 \delta y_1 - p_2 \delta y_2 \} d\xi = 0 \quad (1.5)$$

$$\int_0^1 \{ [y_3'' - \varphi y_4 + \eta (y_3'' - \varphi y_4')] (\delta y_3'' - \varphi \delta y_4) - p_3^0 \delta y_3 \} d\xi = 0 \quad (1.6)$$

$$\begin{aligned} p_1^0 &= -y_1'' - \gamma y_1' + \xi v^2 [1 + \mu \Phi(\tau)]^2 \\ p_2^0 &= -y_2'' - \gamma y_2' - 2v\beta [1 + \mu \Phi(\tau)] (y_2' + \varphi y_1') - (p_* + v_2 [1 + (1 - \xi)\xi] [1 + \mu \Phi(\tau)]^2 + (1 - \xi)v\beta \mu \Phi'(\tau)) (\varphi + y_2'' + \varphi y_1') \\ p_3^0 &= -y_3'' - \gamma y_3' - 2v\beta [1 + \mu \Phi(\tau)] y_3' - \{ p_* + [1 + (1 - \xi)\xi] v^2 [1 + \mu \Phi(\tau)]^2 + (1 - \xi)v\beta \mu \Phi'(\tau) \} (y_3'' - \varphi y_4) \\ y_1' - \varphi y_2 &= 0, \quad y_4' + \varphi y_3 = 0, \quad y_j = u_j / l, \quad y_4 = \alpha_1 \quad (j=1, 2, 3) \end{aligned}$$

Здесь и далее штрихом обозначено дифференцирование по координате, точкой — по времени. Уравнение (1.5) описывает колебания трубопровода в плоскости, а уравнение (1.6) — из плоскости.

2. Представим смещение и угол закручивания трубопровода в виде ряда

$$y_j(\xi, \tau) = \sum_{k=1}^n f_{jk}(\xi) q_k(\tau) \quad (j=1, 2, 3, 4) \quad (2.1)$$

$$f_{1j}(\xi) = \varphi \left[\int f_{2j}(\xi) d\xi + A_j \right], \quad f_{4j}(\xi) = -\varphi [f_{3j}(\xi) + B_j]$$

где $q_k(\tau)$ — неизвестные обобщенные координаты, $f_{jk}(\xi)$ — элементы системы базисных функций, которые описывают смещение по касательной, изгиб в плоскости и из плоскости и угол закручивания трубопровода соответственно. Функции f_{2j} , f_{3j} и постоянные A_j , B_j определяются из граничных условий.

Подставляя (2.1) в (1.5) и (1.6), приходим к системам обыкновенных дифференциальных уравнений относительно обобщенных координат

$$A\ddot{\mathbf{q}} + B\dot{\mathbf{q}} + C\mathbf{q} = D \quad (2.2)$$

Здесь $\mathbf{q}(\tau) = \{q_1(\tau), q_2(\tau), \dots, q_n(\tau)\}$ — вектор-функция обобщенных координат, A, B, C — матрицы размерности $n \times n$, D — вектор правых частей, элементы которых при колебаниях в плоскости и из плоскости определяются выражениями

$$\begin{aligned} a_{jk} &= \int_0^1 (f_{1j}f_{1k} + f_{2j}f_{2k}) d\xi \quad (j, k=1, 2, \dots, n) \\ b_{jk} &= \int_0^1 \{ \gamma (f_{1j}f_{1k} + f_{2j}f_{2k}) + \eta [f_{2j}^{IV}f_{2k} + \varphi (f_{1j}'''f_{2k} - f_{2j}'''f_{1k}) - \varphi^2 f_{1j}''f_{1k}] + \\ &\quad + 2v\beta [1 + \mu\Phi(\tau)] (f_{2j}'f_{2k} + \varphi f_{1j}f_{2k}) \} d\xi \\ c_{jk} &= \int_0^1 \{ \langle f_{2j}^{IV}f_{2k} + \varphi (f_{1j}'''f_{2k} - f_{2j}'''f_{1k}) - \varphi^2 f_{1j}''f_{1k} + \\ &\quad + (f_{2j}''f_{2k} + \varphi f_{1j}'f_{2k}) \{ p_* + v^2 [1 + (1-\xi)\xi] [1 + \mu\Phi(\tau)]^2 + (1-\xi)v\beta\mu\Phi'(\tau) \} \rangle d\xi \\ d_h &= \int_0^1 \{ \langle p_* + v^2 [1 + (1-\xi)\xi] [1 + \mu\Phi(\tau)]^2 + (1-\xi)v\beta\mu\Phi'(\tau) \} \varphi f_{2k} - \\ &\quad - \xi v^2 [1 + \mu\Phi(\tau)]^2 f_{1k} \rangle d\xi, \quad a_{jh} = \int_0^1 f_{3j}f_{3h} d\xi, \quad d_h = 0 \\ b_{jh} &= \int_0^1 \{ \gamma f_{3j}f_{3h} + \eta [f_{3j}^{IV}f_{3h} - \varphi (f_{4j}'''f_{3h} + f_{3j}'''f_{4h}) + \varphi^2 f_{4j}f_{4h}] + \\ &\quad + 2v\beta [1 + \mu\Phi(\tau)] f_{3j}'f_{3h} \} d\xi \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$c_{jh} = \int_0^1 \{ \langle f_{3j}^{IV}f_{3h} - \varphi (f_{4j}'''f_{3h} + f_{3j}'''f_{4h}) + \varphi^2 f_{4j}f_{4h} +$$

$$+ (f_{3j}'' - \varphi f_{4j}) \{ p_* - v^2 [1 + (1-\xi)\xi] [1 + \mu\Phi(\tau)]^2 + (1-\xi)v\beta\mu\Phi'(\tau) \} \rangle f_{3h} \} d\xi$$

Вводя фазовое пространство с переменными $x_j = q_j$, $x_{j+n} = dq_j/d\tau$ ($j=1, 2, \dots, n$), приведем системы (2.2) при $D=0$ к нормальной форме Коши

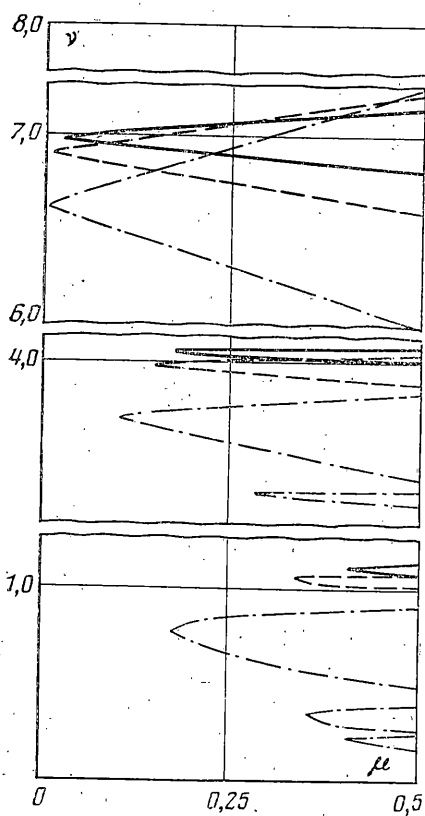
$$\frac{d\mathbf{x}}{d\tau} = G\mathbf{x}, \quad G = \begin{Bmatrix} 0 & E \\ -A^{-1}C & -A^{-1}B \end{Bmatrix} \quad (2.5)$$

где G — действительная матрица размерности $2n \times 2n$.

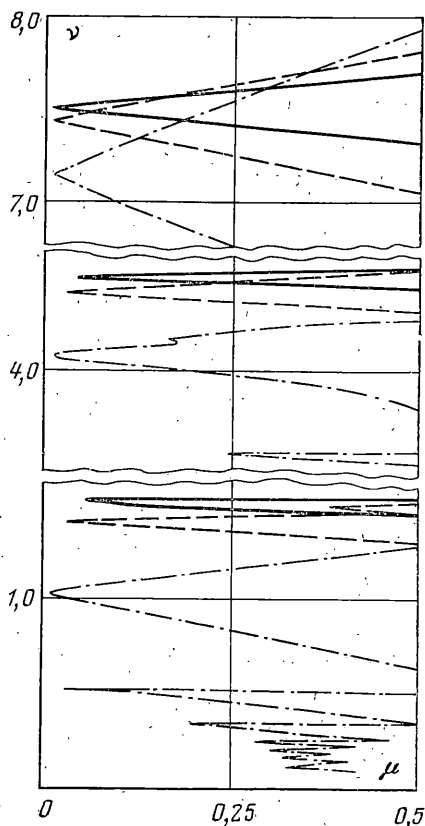
Дальнейший анализ устойчивости нулевого решения системы (2.5) с периодическими или постоянными коэффициентами проводился численными методами, изложенными в [8].

3. Численные исследования проводились для шарнирно-опертого трубопровода ($\xi=0$ — шарнир неподвижен, $\xi=1$ — допускается перемещение по касательной к оси трубопровода). При этом функции $f_{jk}(\xi)$ имеют вид

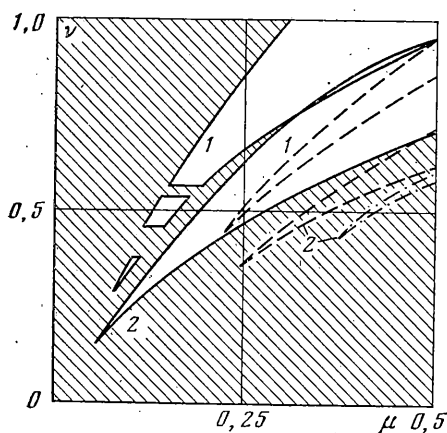
$$\begin{aligned} f_{1j}(\xi) &= \varphi(1 - \cos \pi j \xi) / (j\pi), \quad f_{2j}(\xi) = \sin j\pi \xi \\ f_{3j}(\xi) &= \sin j\pi \xi, \quad f_{4j}(\xi) = -\varphi \sin j\pi \xi \end{aligned} \quad (3.1)$$



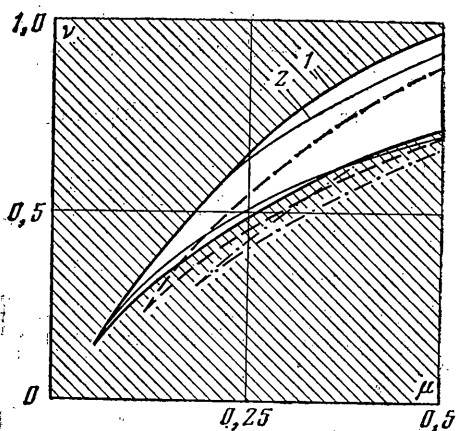
Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

При вычислениях в разложении (2.1) удерживались первые два члена ряда, величина p_* принималась равной нулю, а $\Phi(\tau) = \cos \nu \tau$. Вычисления выполнялись для различных значений коэффициентов γ и η , характеризующих демпфирование в системе, скорости потока жидкости ν , отношений масс жидкости и трубопровода β , коэффициента ξ , характеризующего трение жидкости о стенки трубопровода и угла раствора трубы ϕ . Области неустойчивости строились на плоскости параметров (μ, ν) при $\mu \in [0; 0,5]$.

Результаты анализа колебаний трубопровода при детерминистическом воздействии представлены на фиг. 1–5. Фиг. 1, 2 относятся к случаю докритических скоро-

стей ($v < v_*$), где, следуя [1], критическая скорость может быть приближенно оценена по формуле $v_* = \pi[1 - (\varphi/\pi)^2]^{1/2}$ при $\varphi \leq \pi/2$, для колебаний трубопровода в плоскости и из плоскости соответственно.

На фигурах сплошной линии соответствует значение параметра скорости $v = 0,5$, штриховой — $v = 1,0$ и штрихпунктирной — $v = 2,0$. Остальные параметры имеют значения $\beta = 0,4$, $v_* = 2,71$, $\xi = 0,025$, $\gamma = 10^{-3}$, $\eta = 10^{-4}$, $\varphi = 90^\circ$. Клинью, примыкающие к частотам $v = 2\omega_1$, $v = 2\omega_2$, соответствуют главным параметрическим резонансам, остальные клинья — комбинационным резонансам суммарного типа $v = \omega_1 + \omega_2$, где ω_1 и ω_2 — собственные частоты системы.

С увеличением v области неустойчивости расширяются и смещаются вдоль оси частот; появляются дополнительные резонансы в рассматриваемой области изменения параметров μ и v . Так, например, главные параметрические резонансы при $v = 1,05$ и $v = 6,90$ для $v = 1,0$ смещаются соответственно к частотам $v = 0,75$ и $v = 6,61$ при $v = 2,0$ и появляются клинья вблизи частот $v = 3,30$, $v = 0,37$ и $v = 0,22$, соответствующие побочным параметрическим резонансам второго и третьего порядка по отношению к частотам ω_1 и ω_2 . Некоторые аналогичные результаты были получены в [5–7] для прямой трубы.

При $v > v_*$ структура областей неустойчивости существенно изменяется. В этом случае система является динамически неустойчивой при отсутствии параметрического возмущения. Однако при определенных значениях скорости v поток жидкости оказывает стабилизирующее воздействие. Области стабилизации системы представлены на фиг. 3. Кривые 1 соответствуют колебаниям трубопровода из плоскости, а 2 — в плоскости. Области неустойчивости заштрихованы. Сплошные линии на фигуре соответствуют параметру скорости $v = 2,8$, штриховые — $v = 3,0$, штрихпунктирные — $v = 3,2$. При дальнейшем увеличении v области стабилизации уменьшаются и смещаются в сторону больших значений параметра возбуждения μ .

Увеличение коэффициентов демпфирования γ и η приводит к сглаживанию и расширению границ областей устойчивости системы. При этом, как и следовало ожидать, изменение коэффициента η существеннее сказывается на поведении областей неустойчивости, чем γ . Области стабилизации практически не изменяются при варьировании коэффициентов демпфирования в пределах от 10^{-4} до 10^{-1} .

Как и для прямолинейного трубопровода [4], с ростом отношения масс жидкости и трубопровода β при скоростях меньше критических ($v < v_*$) области неустойчивости расширяются.

Увеличение коэффициента трения жидкости о стенки трубопровода ξ также приводит к расширению областей неустойчивости и смещению их в область низших частот. Результаты исследований влияния коэффициентов β и ξ на устойчивость трубопровода при сверхкритических скоростях потока жидкости представлены на фиг. 4 для $v = 2,8$. Сплошные линии соответствуют значениям параметров $\beta = 0,4$ (кривая 1) и $\beta = 0,2$ (кривая 2) при $\xi = 0,025$, штриховая и штрихпунктирная линии — соответственно параметрам $\xi = 0,1$ и $\xi = 0,25$ при $\beta = 0,4$. Как следует из графиков, увеличение параметра ξ и уменьшение β приводит к уменьшению областей стабилизации.

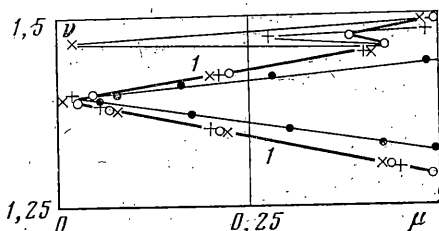
Исследование влияния угла раствора φ на области неустойчивости трубопровода при колебаниях в плоскости и из плоскости показывает, что с увеличением φ области неустойчивости сужаются и смещаются в сторону низших частот в связи с уменьшением собственных частот системы.

Из анализа полученных численных результатов следует, что в заданной области изменения параметров системы для приближенной оценки областей неустойчивости некоторыми параметрами можно пренебречь. На фиг. 5 показана главная область неустойчивости при колебаниях из плоскости для скоростей меньших критических и пренебрежении трением жидкости о стенки $\xi = 0$ (светлые точки), малом отношении масс жидкости и трубопровода $\beta = 10^{-3}$ (темные точки), без учета демпфирования $\eta = 0$ (косые кресты), $\gamma = 0$ (прямые кресты). Жирная сплошная линия 1 соответствует $\beta = 0,4$, $\xi = 0,025$, $\gamma = 10^{-3}$, $\eta = 10^{-4}$.

4. Рассмотрим колебания системы, описываемые линеаризованными матричными уравнениями (2.2), когда функция времени в (1.1) является стационарным случайным процессом со скрытой периодичностью и корреляционной функцией

$$K_\Phi(\tau) = \sigma_\Phi^2 e^{-\rho|\tau|} [\cos v_\rho \tau + (\rho/v_\rho) \sin v_\rho |\tau|] \quad (4.1)$$

где σ_Φ^2 — дисперсия процесса $\Phi(\tau)$, v_ρ — характерная частота возбуждения, ρ — параметр корреляции, а элементы матриц A , B , C определяются соотношениями (2.3) и (2.4) ($D = 0$).



Фиг. 5

Процесс $\Phi(\tau)$ можно получить, если стационарный гауссовский белый шум $\xi(\tau)$ с математическим ожиданием, равным нулю, пропустить через фильтр второго порядка

$$d^2\Phi(\tau)/d\tau^2 + 2\rho d\Phi(\tau)/d\tau + \nu^2\Phi(\tau) = \xi(\tau) \quad (4.2)$$

где $\nu^2 = \nu_p^2 + \rho^2$; интенсивность белого шума должна быть выбрана следующим образом: $S^0 = 4\rho\nu^2\sigma_\Phi^2$.

Введем матрицы $K = -A^{-1}B$, $Q = -A^{-1}C$ и представим их в виде

$$K = K^{(0)} + \mu\Phi(\tau)K^{(1)} \quad (4.3)$$

$$Q = Q^{(0)} + \mu\Phi(\tau)Q^{(1)} + \mu\Phi^*(\tau)Q^{(2)} + \mu^2\Phi^2(\tau)Q^{(3)}$$

С учетом (4.3) и обозначений $x_j = q_j$, $x_{j+n} = q_j^*$, $x_{2n+1} = \Phi^*(\tau)$, $x_{2n+2} = \Phi(\tau)$ запишем уравнения (2.2) в виде системы стохастических дифференциальных уравнений Ито

$$\begin{aligned} dx_i = \sum_{j=1}^n (k_{ij}^{(0)} x_j + q_{ij}^{(0)} x_{n+j} + k_{ij}^{(1)} \mu x_j x_{2n+2} + q_{ij}^{(1)} \mu x_{n+j} x_{2n+2} + \\ + q_{ij}^{(2)} \mu x_{n+j} x_{2n+1} + q_{ij}^{(3)} \mu^2 x_{n+j} x_{2n+2}) d\tau, \quad dx_{n+i} = x_i d\tau \\ dx_{2n+1} = -(2\rho x_{2n+1} + \nu^2 x_{2n+2}) d\tau + dw, \quad dx_{2n+2} = x_{2n+1} d\tau \end{aligned} \quad (4.4)$$

где k_{ij} , q_{ij} — элементы матриц K и Q , $w(\tau)$ — одномерный винеровский процесс.

В пространстве параметров, характеризующих систему и случайное воздействие, требуется выделить области, в которых нулевое решение системы (4.4) устойчиво в некотором стохастическом смысле. Для анализа поведения системы применим метод моментных функций и исследуем устойчивость решения $x(\tau) = 0$ по отношению к моментным функциям порядка r [9]:

$$m_{jhl\dots}(\tau) = \langle x_j(\tau) x_h(\tau) x_l(\tau) \dots \rangle \quad (j, h, l, \dots = 1, 2, \dots, 6) \quad (4.5)$$

Уравнение Колмогорова для переходной плотности вероятности $p(x, \tau)$ диффузионного марковского процесса $x(\tau) = (x_1, \dots, x_j, x_{j+1}, \dots, x_{j+n}, x_{2n+1}, x_{2n+2})$ имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial \tau} = (2\rho - k_{11}^{(0)} - k_{11}^{(1)} \mu x_6 - k_{22}^{(0)} - k_{22}^{(1)} \mu x_6) p - \\ - \frac{\partial p}{\partial x_1} (k_{11}^{(0)} x_1 + k_{12}^{(0)} x_2 + q_{11}^{(0)} x_3 + q_{12}^{(0)} x_4 + k_{11}^{(1)} \mu x_1 x_6 + k_{12}^{(1)} \mu x_2 x_6 + \\ + q_{11}^{(1)} \mu x_3 x_6 + q_{12}^{(1)} \mu x_4 x_6 + q_{11}^{(2)} \mu x_3 x_6 + q_{12}^{(2)} \mu x_4 x_5 + \\ + q_{11}^{(3)} \mu^2 x_3 x_6^2 + q_{12}^{(3)} \mu^2 x_4 x_6^2) - \frac{\partial p}{\partial x_2} (k_{21}^{(0)} x_1 + k_{22}^{(0)} x_2 + \\ + q_{21}^{(0)} x_3 + q_{22}^{(0)} x_4 + k_{21}^{(1)} \mu x_1 x_6 + k_{22}^{(1)} \mu x_2 x_6 + q_{21}^{(1)} \mu x_3 x_6 + \\ + q_{22}^{(1)} \mu x_4 x_6 + q_{21}^{(2)} \mu x_3 x_5 + q_{22}^{(2)} \mu x_4 x_5 + q_{21}^{(3)} \mu^2 x_3 x_6^2 + \\ + q_{22}^{(3)} \mu^2 x_4 x_6^2 - x_1 \frac{\partial p}{\partial x_3} - x_2 \frac{\partial p}{\partial x_4} - \frac{\partial p}{\partial x_5} (2\rho x_5 + \nu^2 x_6) - x_5 \frac{\partial p}{\partial x_6} + \frac{1}{2} S^0 \frac{\partial^2 p}{\partial x_5^2} \end{aligned} \quad (4.6)$$

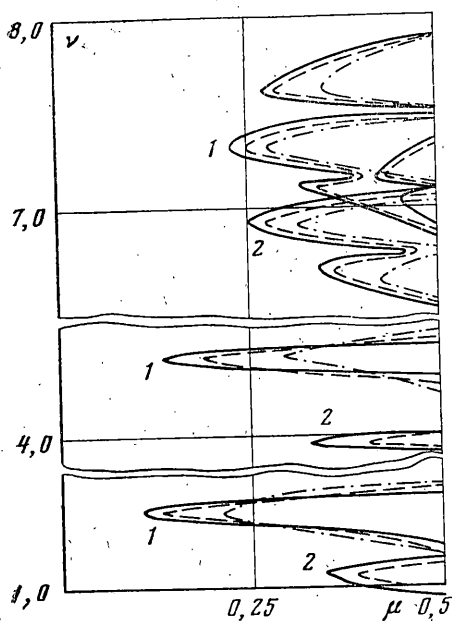
Структура уравнений (4.6) такова, что относительно моментных функций получим бесконечную нелинейную систему уравнений. После применения гипотезы квазигауссовости для замыкания системы и линеаризации приходим к дифференциальным уравнениям первого порядка с постоян-

ными коэффициентами

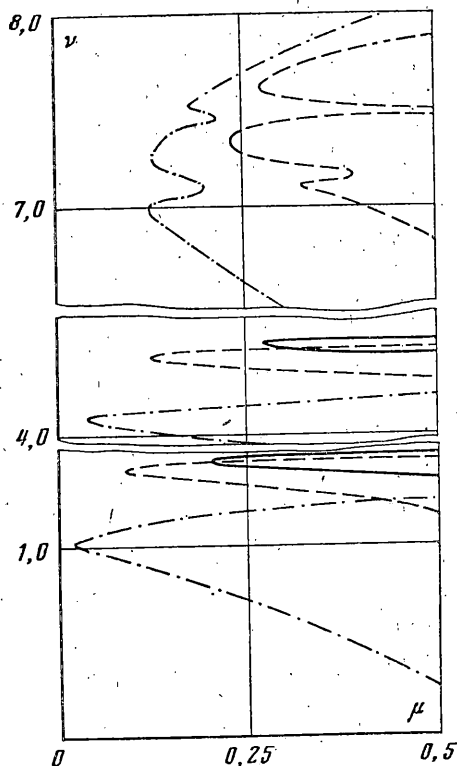
$$dm/d\tau = Mm, \quad m = \{m_1, m_2, \dots, m_4, m_{11}, m_{12}, \dots, m_{46}\} \quad (4.7)$$

где M — матрица размерности 22×22 . Дальнейший анализ устойчивости сводится к решению стандартной проблемы Рауса — Гурвица для системы (4.7).

На фиг. 6 показано влияние параметра широкополосности случайного воздействия $\Phi(\tau)$ на границы областей неустойчивости. Сплошной линии соответствует $\rho = 0,02$, штриховой — $\rho = 0,1$, штрихпунктирной — $\rho = 0,5$. При вычислении принято



Фиг. 6



Фиг. 7

$\sigma_\phi^2 = 1$, остальные значения параметров системы, соответствуют детерминистической постановке задачи и равны $\beta = 0,4$, $v = 1,0$, $\xi = 0,025$, $\gamma = 10^{-3}$, $\eta = 10^{-4}$, $\phi = 90^\circ$. Кривые 1 соответствуют колебаниям из плоскости, а кривые 2 — в плоскости.

С увеличением ρ границы областей неустойчивости смещаются в сторону больших значений параметра возбуждения μ и наблюдается сглаживание избирательного характера стохастической неустойчивости. Аналогичные результаты получены при увеличении коэффициентов η и γ , а также уменьшении отношения масс жидкости и трубопровода β .

На фиг. 7 представлены области неустойчивости для различных значений параметра v скорости потока при рассмотрении колебаний из плоскости трубопровода. Сплошная линия соответствует $v = 0,5$, штриховая $v = 1,0$ и штрихпунктирная $v = 2,0$. Параметр широкополосности ρ принимался равным 0,02. Как и в случае детерминистического воздействия, увеличение скорости потока вызывает расширение областей неустойчивости и смещение резонансных клиньев в сторону низших частот. Поведение областей неустойчивости при изменении угла раствора ϕ аналогично случаю $\Phi(\tau) = \cos vt$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Болотин В. В.* Динамическая устойчивость упругих систем. М.: Гостехиздат, 1956. 600 с.
2. *Светлицкий В. А.* Малые колебания пространственно-криволинейных трубопроводов.— Прикл. механика, 1978, т. 14, № 8, с. 70–78.
3. *Доценко П. Д.* Об уравнениях малых колебаний криволинейного трубопровода.— Изв. АН СССР. МТТ, 1974, № 5, с. 104–112.
4. *Singh K., Mallik A. K.* Parametric instabilities of a periodically supported pipe conveying fluid.— J. Sound and Vibration, 1979, v. 62, No. 3, p. 379–397.
5. *Bohn M. P., Herrmann G.* The dynamic behavior of articulated pipes conveying fluid with periodic flow rate.— Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech., 1974, v. 41, No. 1, p. 55–62.
6. *Paidoussis M. P., Issid N. T., Tsui M.* Parametric resonance oscillations of flexible slender cylinders in harmonically perturbed axial flow.— Trans. ASME Ser. E. J. Appl. Mech., 1980, v. 47, No. 4, p. 709–714.
7. *Paidoussis M. P., Sundararajan C.* Parametric and combination resonances of a pipe conveying pulsating fluid.— Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech., 1975, v. 42, No. 4, p. 780–784.
8. *Болотин В. В.* Численный анализ устойчивости линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами.— В кн.: Избранные проблемы прикладной механики. М.: ВИНТИ, 1974, с. 155–166.
9. *Болотин В. В.* Случайные колебания упругих систем. М.: Наука, 1979. 335 с.

Москва, Циттау (ГДР)

Поступила в редакцию
25.VI.1982