

УДК 539.375

ОБЪЕДИНЕННЫЕ МОДЕЛИ В МЕХАНИКЕ РАЗРУШЕНИЯ¹

БОЛОТИН В. В.

Одно из направлений в механике разрушения связано, как известно, с разработкой моделей накопления в твердых телах рассеянных повреждений при длительно действующих и (или) циклических нагрузках, второе направление — механика тел с трещинами, включающая в себя как теорию равновесных трещин, так и различные подходы к описанию процессов распространения трещин. Между тем накопление повреждений, зарождение и рост макроскопических магистральных трещин тесно связаны между собой. Во-первых, накопление рассеянных повреждений предшествует образованию магистральных трещин, которые, как правило, представляют собой результат объединения микротрещин и микроповреждений в некоторой слабой или наиболее напряженной части тела. Во-вторых, магистральные трещины распространяются в поврежденном материале на фоне продолжающегося процесса накопления повреждений. Более того, накопление повреждений на фронтах трещин, по-видимому, является основным механизмом, определяющим скорость квазиравновесного роста магистральных трещин. Поэтому совместное рассмотрение механизмов накопления повреждений и роста трещин представляет интерес.

Исследования по двум направлениям механики разрушения начались примерно в одно и то же время, развивались параллельно и практически независимо.

Указания на первые предложения по объединенным моделям разрушения применительно к оценке долговечности при циклических нагрузках приведены в [1].

На основе феноменологической теории накопления повреждений в [2] предложена модель, позволяющая оценивать время или число циклов до зарождения первой макроскопической трещины. Зарождение трещин есть результат накопления повреждений, рассеянных в значительном объеме материала, поэтому имеет четко выраженный стохастический характер, а также обнаруживает масштабный эффект (зависимость вероятности зарождения трещины от объема или площади поверхности напряженной части тела). В [2] было принято, что зародыши макроскопических трещин образуют пуассоновский ансамбль, а математическое ожидание числа зародышей в заданной области тела есть некоторая функция от величины меры повреждения. На основе этой модели были получены распределения времен до образования первой макроскопической трещины, что позволило сформулировать стохастические начальные условия для стадии квазиравновесного роста этой трещины.

В [3] концепция взаимодействия двух механизмов разрушения использована для получения уравнений, описывающих квазиравновесный рост макроскопических трещин при циклических нагрузках. В отличие от зарождения трещин распространение уже имеющихся макроскопических трещин связано главным образом с повреждением в окрестности фронта. Была высказана гипотеза о том, что квазиравновесные усталостные трещины растут так, что при максимальных напряжениях каждого цикла они близки к равновесным по Гриффитсу с учетом того, что удельная работа разрушения вычислена с учетом повреждений, накопленных на фронте трещины за предшествующую историю нагружения.

Теория [3] разработана применительно к общему случаю многопараметрической системы трещин в теле, нагруженном многопараметрическими циклическими и (или) длительно действующими нагрузками.

В публикуемой работе на примере однопараметрической трещины и однопараметрической нагрузки дается развитие в следующих направлениях: детальный анализ взаимодействия механизмов накопления рассеянных повреждений и роста усталостных трещин; качественное описание различий в поведении усталостных трещин, связанных с тем, является ли соответствующая равновесная статическая трещина устойчивой по Гриффитсу или нет; исследование условий устойчивости усталостных трещин с учетом накопленных на их фронте повреждений; описание явлений, наблюдаемых при нестационарных процессах нагружения; качественный анализ механизмов развития трещин при силовом и кинематическом процессах нагружения.

¹ Доклад, прочитанный на Объединенном научном семинаре, посвященном 70-летию со дня рождения акад. А. Ю. Ишлинского (Москва, 7 сентября 1983 г.).

1. Рассмотрим трещину, размер которой задан с точностью до одного параметра l . Трещина представляет собой математический разрез в твердом теле, а условие необратимости трещины имеет вид $dl \geq 0$. Тело подвержено действию нагрузок, заданных с точностью до одного параметра s . Будем приписывать этому параметру смысл номинального напряжения и называть его в дальнейшем просто напряжением. Процесс нагружения $s(t)$ является циклическим. Каждый цикл будем характеризовать максимальным напряжением $s_{\max}(n)$, минимальным напряжением $s_{\min}(n)$, а также размахом $\Delta s(n) = s_{\max}(n) - s_{\min}(n)$. Здесь n — номер цикла нагружения.

В основу положим аксиоматику энергетического подхода Гриффитса. Дадим размеру трещины малое приращение δl и вычислим величину δI высвободившейся энергии, принимая, что время, заданные силы и заданные смещения не варьируются, приток тепла к телу отсутствует, а в каждой точке тела, кроме, быть может, малой окрестности фронта трещины, выполнены условия равновесия и совместности:

$$\delta I = -\delta U + \delta A - \delta \Phi - \delta A_T \quad (1.1)$$

Здесь δU — вариация по Гриффитсу от потенциальной энергии деформации тела, δA и $\delta \Phi$ — соответственно элементарная работа заданных сил и элементарная диссипация, δA_T — работа, идущая на образование новой поверхности, т. е.

$$\delta A_T = 2 \int_s \gamma |d\sigma \times \delta \lambda| \quad (1.2)$$

Удельная работа разрушения γ , вообще, может зависеть от l . В формуле (1.2) $d\sigma$ — элемент длины контура невозмущенной трещины, $d\lambda$ — приращение размера трещины, соответствующее приращению δl параметра l .

Поскольку варьирование по Гриффитсу является изохронным, то δI пропорционально δl . Представим выражение для δI в виде

$$\delta I = (G - \Gamma) \delta l \quad (1.3)$$

где G — обобщенная сила, продвигающая трещину, Γ — обобщенная сила сопротивления. Для определенности условимся, что первые три члена в правой части (1.1) включены в выражение $G\delta l$, а $\delta A_T = \Gamma\delta l$. Назовем трещину субравновесной, если $\delta I < 0$, т. е. $G < \Gamma$. Очевидно, субравновесная трещина устойчива. Назовем трещину равновесной (по Гриффитсу), если $\delta I = 0$, т. е. $G = \Gamma$. Равновесная трещина устойчива при $\delta^2 I < 0$ и не-

Трещины			
субравновесные	равновесные		неравновесные
$\delta I < 0$	$\delta I = 0$		$\delta I > 0$
	$\delta^2 I < 0$	$\delta^2 I > 0$	
устойчивые		неустойчивые	

устойчива при $\delta^2 I > 0$. Здесь $\delta^2 I = \delta(\delta I)$ — вторая вариация по Гриффитсу от взятой с обратным знаком полной энергии системы. Назовем трещину неравновесной, если $\delta I > 0$; неравновесные трещины неустойчивы. Введенная терминология несколько отличается от общепринятой в механике разрушения: вместо понятий «докритических» (субкритических) и «кри-

тических» трещин введены соответственно понятия «субравновесных» и «равновесных» трещин. Преимущество новой терминологии состоит в том, что она не связывает условие равновесности по Гриффитсу с соображениями устойчивости. Как увидим в дальнейшем, усталостные трещины, как правило, равновесны по Гриффитсу, но устойчивы. Ни в каком смысле слова «критическими» они не являются. Сводная классификация трещин приведена в таблице.

Сформулируем основную гипотезу о закономерностях квазиравновесного (устойчивого) роста усталостных трещин: трещины растут так, что при максимальных напряжениях цикла они будут близки к равновесным при условии, что обобщенные силы G и Γ вычислены с учетом повреждений, накопленных на фронте трещины. Если при этом условии трещина субравновесная, то она не растет. В [3] эта гипотеза была формализована путем замены обобщенных сил в соотношении $G=\Gamma$ функциями параметров, характеризующих историю нагружения и роста трещины. При переходе к непрерывным процессам нагружения обобщенные силы заменены соответствующими наследственными функционалами.

В публикуемой работе история нагружения и роста трещины учитывается при помощи некоторой феноменологической меры повреждения. Значение этой меры на фронте трещины, положение которого задано функцией $l(n)$, обозначим через $\psi(n)$. Поскольку фронт трещины является весьма сильным концентратором, будем пренебрегать влиянием повреждений, накопленных в областях, которые удалены от фронта трещины. Условие равновесности трещины принимает вид

$$G[l(n), s_{\max}(n), \psi(n)] = \Gamma[l(n), \psi(n)] \quad (1.4)$$

Уравнение (1.4) должно быть дополнено соотношениями, описывающими процесс накопления повреждений на фронте трещины. Функция $l(n)$ задает положение фронта трещины в конце n -го цикла нагружения. Введем функцию $\varphi(\lambda, \nu)$, равную значению меры повреждения в конце ν -го цикла в малой окрестности точки, соответствующей размеру трещины λ . При этом $l_0 \leq \lambda \leq l(n)$, где l_0 — начальный размер трещины. Приращение меры повреждения в течение ν -го цикла зависит от экстремальных напряжений цикла, расстояния от рассматриваемой точки до фронта трещины, например от разности $\lambda - l(\nu)$, а также, вообще говоря, от величины меры повреждения, достигнутой к данному циклу. Таким образом приходим к уравнению накопления повреждений

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda, \nu) &= \varphi(\lambda, \nu-1) + f[\lambda, l(\nu), s_{\max}(\nu), s_{\min}(\nu), \varphi(\lambda, \nu-1)] \\ \nu &= 0, 1, \dots, n, \quad \psi(n) = \varphi[l(n), n] \end{aligned} \quad (1.5)$$

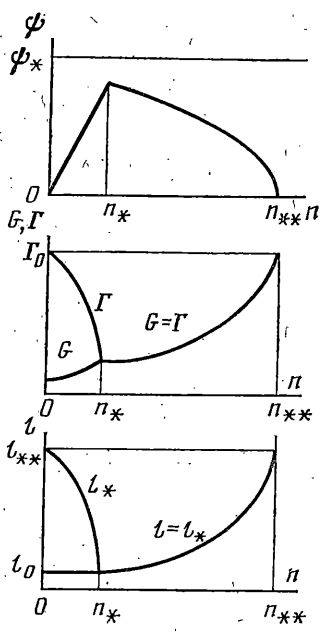
в правой части которого стоит неотрицательная функция $f[\dots]$.

Начальное значение меры повреждения $\varphi(\lambda, 0)$, где $\lambda \geq l_0$, считаем заданным. Естественно принято, что $\varphi(\lambda, 0) = 0$.

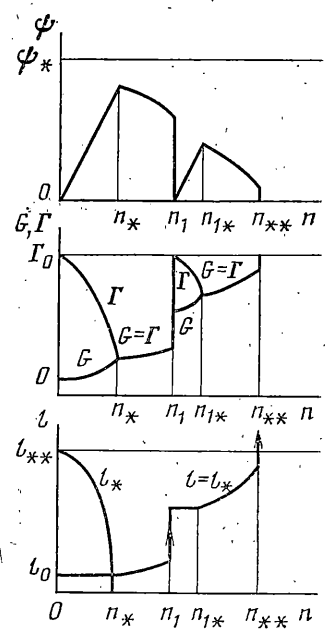
В приложениях число циклов до достижения трещиной опасных размеров обычно весьма велико, а $l(n)$ и $\psi(n)$ — медленно меняющиеся функции n . Если параметры нагружения $s_{\max}(n)$ и $s_{\min}(n)$ также являются медленно меняющимися функциями, то целесообразно перейти к дифференциальному уравнению относительно функции непрерывных аргументов λ и ν :

$$\begin{aligned} \partial \varphi(\lambda, \nu) / \partial \nu &= f[\lambda, l(\nu), s_{\max}(\nu), s_{\min}(\nu), \varphi(\lambda, \nu)] \\ 0 \leq \nu \leq n, \quad \psi(n) &= \varphi[l(n), n] \end{aligned} \quad (1.6)$$

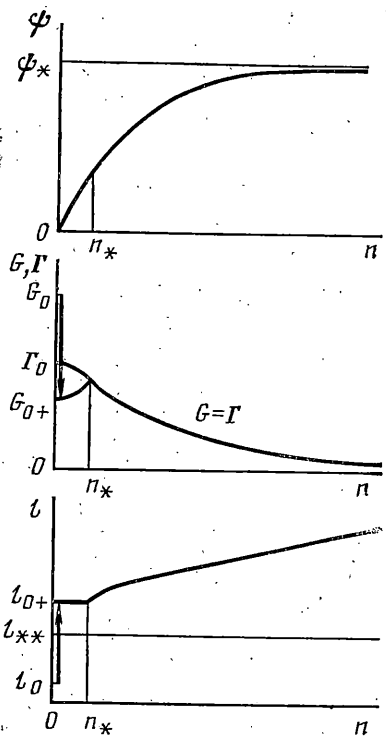
2. Физический смысл явления, описываемого уравнениями (1.4) и (1.5) или (1.4) и (1.6), состоит в следующем: размер трещины остается неизменным, пока на ее фронте не будет накоплено повреждение, при котором будет выполнено условие равновесности (1.4). Это позволяет опи-



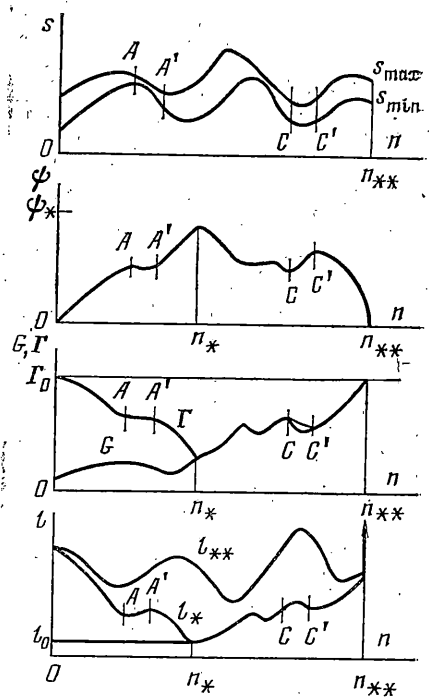
Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

сать начальную задержку роста искусственно инициированной субравновесной трещины, временные остановки роста в процессе нагружения, а также переход устойчивого роста усталостных трещин к неустойчивому (динамическому) развитию. Качественная картина роста трещин и сопровождающего их процесса накопления повреждений существенно зависит от условий устойчивости соответствующей равновесной трещины.

Поясним различие на простейшем случае однородного процесса нагружения при $s_{\max}(n) = \text{const}$, $s_{\min}(n) = \text{const}$.

Фиг. 1 относится к случаю, когда равновесная трещина в теле из неповрежденного материала неустойчива. Примером служит большинство задач линейной механики разрушения, начиная с классической задачи Гриффитса. На отрезке $[0, n_*)$ происходит процесс накопления повреждений на фронте неподвижной трещины с заданным начальным размером l_0 . При этом $G(l_0, s_{\max}, \psi) < \Gamma(l_0, \psi)$, а обобщенная сила сопротивления $\Gamma(l_0, \psi)$ уменьшается с ростом числа циклов. Вместе с ней уменьшается равновесный размер l_* , вычисленный с учетом накопленных повреждений, т. е. корень уравнения $G(l, s_{\max}, \psi) = \Gamma(l, \psi)$. При $n = n_*$ впервые достигается равенство $G(l_0, s_{\max}, \psi) = \Gamma(l_0, \psi)$, так что начальный размер l_0 становится равновесным. Далее начинается рост усталостной трещины. При этом мера повреждения ψ монотонно уменьшается, а скорость роста трещины dl/dn увеличивается. При числе циклов $n = n_{**}$ размер трещины l достигает равновесного значения l_{**} для неповрежденного материала, равно корню уравнения $G(l, s_{\max}, 0) = \Gamma(l, 0)$, а мера повреждения обращается в нуль. Это соответствует тому, что дальнейшее распространение трещины не требует накопления повреждений на ее фронте. Усталостная трещина становится неустойчивой.

Устойчивость усталостной трещины, удовлетворяющей условию равновесности, обеспечивается наличием концентрации напряжений у фронта трещины и вытекающей отсюда существенной неоднородности распределения повреждений на продолжении фронта трещины. Если размеру равновесной усталостной трещины дать малое приращение, то фронт попадает в область, где уровень повреждений значительно меньше. При этом трещина станет субравновесной, так что ее развитие задержится, пока повреждения на фронте достигнут необходимой величины. В рамках бесструктурных моделей сплошной среды это приводит к непрерывной квазимоноотонной зависимости размера трещины от непрерывного аргумента — сглаженного числа циклов n (фиг. 1). Однако предположенная теория позволяет описать также и скачкообразный рост, сопровождаемый перемежающимися явлениями устойчивости и неустойчивости.

Рассмотрим усталостную трещину, удовлетворяющую условию $G(l, s_{\max}, \psi) = \Gamma(l, \psi)$. Эта трещина устойчива, если выполнено условие $\delta^2 I < 0$. С учетом соотношения (1.3) это условие принимает вид

$$\frac{\partial G}{\partial l} \delta l < \frac{\partial \Gamma}{\partial l} \delta l + \frac{\partial \Gamma}{\partial \psi} \delta \psi \quad (2.1)$$

где в соответствии с определением вариации по Гриффитсу значение n принято постоянным. В частности, величина $\delta \psi$ представляет собой малое приращение меры повреждения при изохронном переходе от рассматриваемого фронта трещины к соседней точке, лежащей на продолжении этого фронта. Для вычисления этой величины используем уравнение (1.6). Пусть $dl/dn \neq 0$, $\partial \varphi(l, n)/\partial n \neq 0$. Тогда изохронная вариация $\delta \varphi(l, n) = \varphi(l + \delta l, n) - \varphi(l, n)$. Но $\varphi(l + \delta l, n) = \varphi[l, n - (dl/dn)^{-1} \delta l] + O(\delta l^2)$. С учетом (1.6) находим, что $\delta \psi = -f(l, n) (dl/dn)^{-1} \delta l$, где через $f(l, n)$ обозначена правая часть уравнения (1.6) при $\lambda = l$, $\nu = n$. Вместо (2.1) получаем

$$\frac{\partial G}{\partial l} < \frac{\partial \Gamma}{\partial l} - \frac{\partial \Gamma}{\partial \psi} \left(\frac{dl}{dn} \right)^{-1} f(l, n) \quad (2.2)$$

Левая часть неравенства положительна и растет с увеличением s_{\max} (например, в линейной механике разрушения, как s_{\max}^2). Первый член в правой части может быть положительным, отрицательным или равным нулю. Стабилизация роста трещины обеспечивается за счет того, что положительны второй член. Действительно, всегда $\partial \Gamma / \partial \psi < 0$, а остальные множители положительны. Величина $f(l, n)$ равна скорости накопления повреждений на фронте трещины и, следовательно, растет с увеличением размаха напряжений. Из этого можно сделать вывод о влиянии отдельных факторов на устойчивость подрастания усталостной трещины. Во всяком случае, скачкообразный рост трещины следует ожидать лишь при достаточно больших напряжениях $s_{\max}(n)$.

Для расчета процесса скачкообразного роста трещин необходимо использовать уравнения (1.4) и (1.6), проверяя на каждом шаге выполнение условия устойчивости (2.2). Если при $n=n_i$, $l(n_i)=l_-$ это условие нарушается, то необходимо найти размер трещины l_+ после скачка. В [3] было предложено определить этот размер из энергетических соображений. Учитывая при расчете баланса энергии только те составляющие, которые входят в соотношение (1.1), приходим к уравнению

$$\int_{l_-}^{l_+} G(\lambda, s_{\max}, \psi) d\lambda = \int_{l_-}^{l_+} \Gamma(\lambda, \psi) d\lambda \quad (2.3)$$

Если вновь найденный размер окажется неравновесным, т. е. $G(l_+, s_{\max}, n) > \Gamma(l_+, \psi)$, то на этом устойчивое развитие усталостной трещины завершается. Если же $G(l_+, s_{\max}, \psi) < \Gamma(l_+, \psi)$, то это означает, что трещина после скачка становится субравновесной. Вначале рост трещины временно приостанавливается; затем, после достижения определенного уровня повреждений на фронте, начинается этап устойчивого роста. Для дальнейшего расчета нужно вновь рассмотреть уравнения (1.4) и (1.6), решая их до следующего нарушения условия устойчивости (2.2).

Качественная картина накопления повреждений и роста трещины представлена на фиг. 2, где второй скачок приводит к финальной неустойчивости. Многократное скачкообразное подрастание усталостной трещины, сходное с автоколебательными явлениями, более типично для существенно неоднородных материалов, а также для нестационарных процессов нагружения, когда трещина становится неустойчивой при отдельных выбросах нагрузки.

Фиг. 3 иллюстрирует накопление повреждений и рост усталостной трещины в случае, когда соответствующая равновесная трещина в теле из неповрежденного материала устойчива. Примером служит задача о разрывании трещины двумя сосредоточенными силами, приложенными к ее берегам. Большое число задач, в которых равновесная трещина устойчива, возникает в связи с анализом дефектов типа расщелиний в слоистых материалах [3, 4]. Как и ранее, будем обозначать равновесный размер трещины в теле из неповрежденного материала через l_{**} . Если $l_0 < l_{**}$, то начальная трещина неустойчива по Гриффитсу, так что в пределах первого цикла размер трещины должен скачкообразно подрасти до субравновесного размера $l_{0+} > l_{**}$. Величину l_{0+} найдем из уравнения (2.3) при $n=0$, $l_0=l_0$, $\psi=\psi_0$. Этот размер трещины остается неизменным до числа циклов n_* , когда впервые достигается равенство $G(l_{0+}, s_{\max}, \psi) = \Gamma(l_{0+}, \psi)$. Далее обобщенные силы G и Γ , оставаясь равными, монотонно уменьшаются, а мера повреждения ψ монотонно возрастает. В теле достаточно больших размеров при больших n может возникнуть такая ситуация, что дальнейший устойчивый рост усталостной трещины будет происходить при уровне повреждения на фронте, близком к предельному, например при $\psi_* \approx 1$.

До сих пор рассматривался стационарный процесс нагружения, при котором экстремальные напряжения каждого цикла остаются постоянными. Типичный случай нестационарного нагружения представлен на фиг. 4. При этом принято, что соответствующая равновесная трещина в теле из неповрежденного материала неустойчива. Помимо явлений, отмеченных в случае стационарного нагружения, обнаруживаем ряд новых явлений: многократное изменение знака производной $d\psi/dn$, наличие участков, на которых $\psi = \text{const}$, а также участков, на которых $l = \text{const}$.

3. Рассмотрим усталостную трещину в классической задаче Гриффитса. Для обобщенных сил возьмем выражения

$$G(l, s) = 2\pi s^2 l (1 - \mu^2) / E, \quad \Gamma = 4\gamma_0 (1 - \psi^\alpha) \quad (3.1)$$

где s — номинальные (заданные по бесконечности) напряжения, l — половина длины трещины, E — модуль Юнга, μ — коэффициент Пуассона, γ_0 — удельная работа разрушения для неповрежденного материала, $\alpha > 0$. Уравнение (1.6) возьмем в следующем виде:

$$\frac{\partial \Phi(\lambda, \nu)}{\partial \nu} = \left\{ \frac{\Delta s(\nu) \kappa[\lambda, l(\nu)] - s_0}{s_\Phi} \right\}^m, \quad \kappa(\lambda, l) = \left(\frac{\lambda}{\lambda - l + \chi_0} \right)^{1/2} \quad (3.2)$$

Здесь s_Φ — напряжение, характеризующее сопротивление материала накоплению повреждений, s_0 — пороговая характеристика этого сопротивления, m — величина, аналогичная показателю кривых усталости. Вторая

из формул (3.2) задает величину коэффициента концентрации на продолжении фронта трещины при условии, что в рассматриваемый момент трещина имеет размер λ . В формулу входит характерный размер структуры ρ , имеющий порядок размера зерна материала, толщины межзеренной границы и т. д., и форм-фактор χ . Величину χ нужно выбрать так, чтобы коэффициент концентрации на фронте трещины был равен $(l/\chi\rho)^{1/2}$. Отметим, что при вычислении обобщенной силы $G(l, s)$ трещина трактовалась как математический разрез с особенностью поля напряжений на фронте. Однако при описании процесса накопления повреждений считаем величину раскрытия трещины конечной, хотя и весьма малой, так что $\rho \ll l$. При этом особенность типа $r^{-1/2}$ на фронте трещины заменяется псевдоособенностью с коэффициентом концентрации $(l/\chi\rho)^{1/2} \gg 1$. Уравнение (3.2) выписано для случая, когда $\Delta s(v) \times [\lambda, l(v)] \geq s_0$. Если $s_{\min}(v) < 0$, то трещина на некотором отрезке цикла может закрываться. Для таких циклов естественно принять $\Delta s(v) = s_{\max}(v)$.

Подставляя (3.1) и (3.2) в основное уравнение (1.4), получим нелинейное интегральное уравнение относительно функции $l(n)$:

$$\left[1 - \frac{s_{\max}^2(n)}{s_c^2} \frac{l(n)}{\chi\rho} \right]^{1/\alpha} = \int_0^n \left\{ \frac{\Delta s(v) \times [l(n), l(v)] - s_0}{s_\psi} \right\}^m dv + \varphi[l(n), 0] \quad (3.3)$$

где введено обозначение для напряжения s_c , характеризующего сопротивление росту трещины:

$$s_c = [2\gamma_0 E / \pi \chi \rho (1 - \mu^2)]^{1/2} \quad (3.4)$$

Штрих у интеграла означает, что при $\Delta s(v) \times [l(n), l(v)] < s_0$ подынтегральное выражение принимается равным нулю. Если в некотором интервале уравнение не имеет положительных действительных решений, это означает, что $l = \text{const}$, причем константа равна действительной величине l на нижней границе интервала. В частности, $l(n) = l_0$ при $n \in (0, n_*)$.

На участке, где $\Delta s(v) \times [l(n), l(v)] > s_0$, $dl/dn > 0$, но трещина распространяется достаточно медленно, можно приближенно свести уравнение (3.3) к обыкновенному дифференциальному уравнению. Пусть при всех рассматриваемых n выполнено условие $dl/dn \ll \rho_1$. Здесь ρ_1 — второй характерный размер структуры материала или размер пластической зоны. Вообще, $\rho_1 \neq \rho$, хотя в принципе размеры ρ и ρ_1 могут иметь одинаковый порядок. Средняя скорость продвижения фронта удовлетворяет приближенному соотношению $(dl/dn)\Delta v \approx \rho_1$. При этом Δv — среднее число циклов, в течение которого фронт трещины пересекает один элемент структуры [3, 4]. Поскольку $l \gg \rho$, то фронт трещины является сильным концентратором. Будем пренебрегать повреждениями на отрезке продолжения фронта, длина которого превышает ρ_1 . Оценивая правую часть в уравнении (3.3) по теореме о среднем, приходим к приближенной формуле

$$\psi(n) \approx \psi(0) + \rho_1 \left(\frac{dl}{dn} \right)^{-1} \left[\frac{\Delta s(n) (l/\chi\rho)^{1/2} - s_0}{s_\psi} \right]^m \quad (3.5)$$

Другой способ оценки правой части в (3.3) основан на предположении, что в окрестности рассматриваемого значения l фронт продвигается с постоянной скоростью, равной dl/dn . Тогда $l(v) \approx l(n) - (dl/dn)^{-1}(n-v)$. Результат вычислений аналогичен формуле (3.5); а в некоторых частных случаях с ней совпадает. Подставляя (3.5) в (3.3) и разрешая полученное приближенное равенство относительно dl/dn , приходим к искомому дифференциальному уравнению. При $\varphi(\lambda, 0) = 0$ это уравнение имеет вид

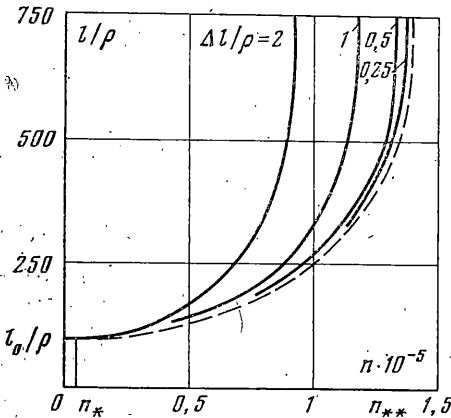
$$\frac{dl}{dn} = \frac{\rho_1}{\left[1 - (s_{\max}/s_c)^2 (l/\chi\rho) \right]^{1/\alpha}} \left[\frac{\Delta s (l/\chi\rho)^{1/2} - s_0}{s_\psi} \right]^m \quad (3.6)$$

Перепишем уравнение (3.6) в терминах коэффициентов интенсивности напряжений $K=s(\pi l)^{1/2}$. Критическое значение коэффициента интенсивности для неповрежденного материала составляет $K_{Ic}=s_c(\pi\chi\rho)^{1/2}$; при этом s_c определяем согласно (3.4). По аналогии введем характеристики материала $K_\psi=s_\psi(\pi\chi\rho)^{1/2}$, $K_0=s_0(\pi\chi\rho)^{1/2}$. Есть основания ожидать, что $K_\psi \sim K_{Ic}$, $K_0 \ll K_{Ic}$. Используя введенные обозначения, придем к уравнению

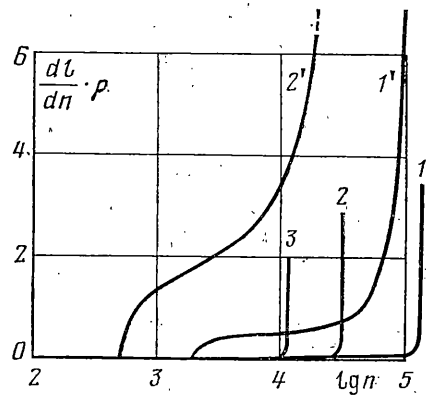
$$\frac{dl}{dn} = \frac{\rho_1}{(1-K_{\max}^2/K_{Ic}^2)^{1/\alpha}} \left(\frac{\Delta K - K_0}{K_\psi} \right)^m \quad (\Delta K > K_0) \quad (3.7)$$

сходному по структуре с большинством полуэмпирических уравнений роста усталостных трещин [5].

Для численного решения уравнения (3.3) удобнее провести сеточную аппроксимацию по l и искать соответствующие значения $n(l)$. Некоторые результаты приведены на фиг. 5. Принято, что $s_{\max}=0,03 s_c$, $s_{\min}=0$, $s_0=0$, $s_\psi=2 s_c$, $m=4$, $\chi=\alpha=1$, $\rho=\rho_1$, $l_0=100 \rho$. Шаг дискретизации изменялся от $\Delta l=2 \rho$ до $\Delta l=0,25 \rho$. Сильная за-



Фиг. 5



Фиг. 6

висимость результатов от выбора шага связана с наличием квазисобственности подынтегрального выражения в (3.3). Дальнейшее дробление шага практически не изменяет численных результатов. Штриховая линия на фиг. 5 получена интегрированием уравнения (3.6). Согласно следует признать удовлетворительным.

Изменение в процессе роста трещины скорости dl/dn представлено на фиг. 6. Кривые 1, 2, 3 относятся соответственно к случаям, когда отношение s_{\max}/s_c принимает значения 0,03, 0,04 и 0,05. Остальные численные данные — такие же, как и для фиг. 5. Кривые 1', 2', нанесенные при 100-кратном увеличении масштаба, показывают изменение скорости роста трещин на ранних стадиях. На графиках, четко видна начальная стадия накопления повреждений при неподвижной трещине, ускоренный рост трещины после ее страгивания, стабилизация скорости и ускорение роста трещины при переходе к финальному разрушению.

На фиг. 7 приведены графики накопления повреждений на фронте трещины и на его продолжении. Кривая 1 соответствует точке на фронте трещины, кривые 2, 3, 4 — точкам, отстоящим от фронта на расстояниях ρ , 2ρ и 3ρ соответственно. Вычисления выполнены по формуле

$$\varphi(\lambda, n) = \int_0^n \left\{ \frac{\Delta s(v) \times [\lambda, l(v)] - s_0}{s_\psi} \right\}^m dv$$

где $l(v)$ — закон движения фронта, найденный из уравнения (3.3). При этом $s_{\max}=0,04 s_c$, а остальные данные — такие же, как и для фиг. 5. Графики показывают быстрое снижение уровня накопления повреждений по мере удаления от фронта трещины.

Исследуем устойчивость усталостной трещины при $dl/dn > 0$, $\Delta s(n) \times \chi(l/\chi\rho)^{1/2} > s_0$. С учетом соотношений (3.1) и (3.2) условие устойчивости

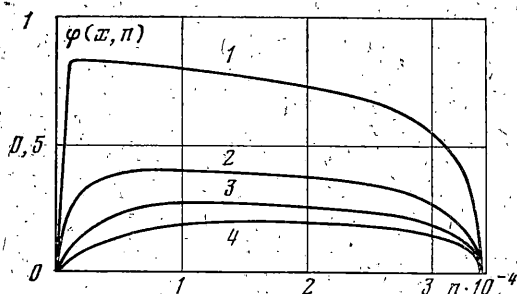
(2.2); принимаем вид

$$\left(\frac{s_{\max}}{s_c}\right)^2 < \alpha \psi^{\alpha-1} \rho \left(\frac{dl}{dn}\right)^{-1} \left[\frac{\Delta s(l/\chi\rho)^{1/2} - s_0}{s_\psi}\right]^m \quad (3.8)$$

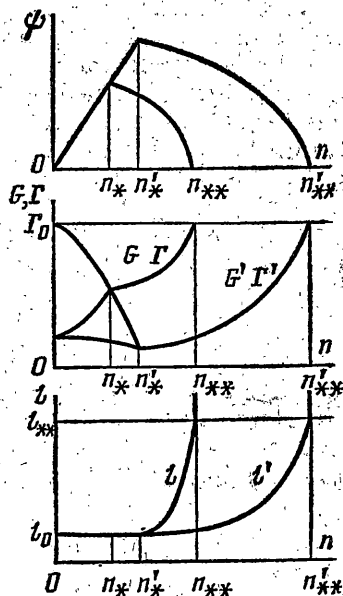
При численном решении интегрального уравнения (3.3) это условие нетрудно проверить на каждом шаге интегрирования. Если расчет накопления повреждений и роста трещин проводится при помощи приближенных соотношений (3.5) и (3.7), то вместо (3.8) получаем

$$\left(\frac{s_{\max}/s_c}{\rho_1/\rho}\right)^2 < \alpha \psi^{\alpha-1} [1 - (s_{\max}/s_c)^2 (l/\chi\rho)]^{1/\alpha} \quad (3.9)$$

Рассмотрим частный случай $\alpha=1$. Тогда правая часть в (3.9) не зависит от ψ . Выражая условие устойчивости (3.9)



Фиг. 7



Фиг. 8

через коэффициенты интенсивности, приведем его к неравенству

$$K_{\max} < K_{Ic} (1 + \rho_1/l)^{-1/2} \quad (3.10)$$

Для достаточно развитых усталостных трещин $l \gg \rho_1$. Отсюда следует, что усталостная трещина устойчива, пока максимальное значение коэффициента интенсивности напряжений K_{\max} не приблизится к критическому значению K_{Ic} для неповрежденного материала. В случае упругопластического материала примем, что $\rho_1 = \rho_Y$, где ρ_Y — размер пластической зоны. Используя известную оценку Ирвина $\rho_Y = (1/2\pi) (K/\sigma_Y)^2$, где σ_Y — предел текучести, придем к формуле для показателя трещиностойкости K_{Ifc} при усталостном разрушении

$$K_{Ifc} = K_{Ic} \left/ \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{s_{\max}}{s_Y} \right)^2 \right]^{1/2} \right. \quad (3.11)$$

Формула (3.11) находится в качественном согласии с экспериментальными данными для некоторых конструкционных материалов, обнаруживающих снижение показателя трещиностойкости при испытаниях на усталость по сравнению с показателями, определяемыми на основе стандартных статистических испытаний надрезанных образцов. Однако возможно, что это снижение вызвано особенностями испытаний на усталость [6].

4. В рамках объединенного подхода нетрудно описать известные различия, которые имеют место при развитии усталостных трещин в случае силового (мягкого) и кинематического (жесткого) нагружения. Чтобы сделать предварительные качественные выводы, рассмотрим усталостную трещину в задаче Гриффитса в предположении, что модуль Юнга материала зависит от меры повреждения. При этом примем, что высвобождение

ние энергии в основном происходит в малой области у фронта трещин и модуль Юнга есть функция $E(\psi)$ от значения меры повреждения на фронте. Условие равновесности усталостной трещины при силовом нагружении дает:

$$2\pi s_{\max}^2 l(1-\mu^2)/E(\psi) = 4\gamma(\psi) \quad (4.1)$$

Чтобы перейти к эквивалентной задаче при кинематическом нагружении, заметим, что при плоской деформации номинальные напряжения s и номинальные деформации ε связаны зависимостью $s = E_0 \varepsilon / (1 - \mu^2)$, где E_0 — модуль Юнга неповрежденного материала. Отсюда для обобщенной силы, продвигающей трещину, имеем выражение $G(l, \varepsilon) = 2\pi E \varepsilon^2 l / (1 - \mu^2)$. Вместо (4.1) приходим к уравнению

$$2\pi E(\psi) \varepsilon_{\max}^2 l / (1 - \mu^2) = 4\gamma(\psi) \quad (4.2)$$

Пусть влияние накопленных повреждений на величину модуля Юнга и удельной работы разрушения выражено соотношениями

$$E(\psi) = E_0(1 + \psi^\alpha)^{-1}, \quad \gamma = \gamma_0(1 - \psi^\alpha) \quad (4.3)$$

где в целях получения обозримых аналитических результатов обе зависимости содержат одинаковый показатель степени $\alpha > 0$. Определим меру повреждений согласно (3.5) при $\psi(0) = 0$ и, учитывая формулы (3.3), придем к уравнению типа (3.6):

$$\frac{dl}{dn} = \rho_1 \left(\frac{1 + K_{\max}^2 / K_{Ic}^2}{1 - K^2 / K_{Ic}^2} \right)^{1/\alpha} \left(\frac{\Delta K - K_0}{K_\psi} \right)^m \quad (4.4)$$

При кинематическом нагружении с учетом (3.5), (4.2) и (4.3) получаем

$$\frac{dl}{dn} = \frac{\rho_1}{(1 - K_{\max}^2 / K_{Ic}^2)^{1/\alpha}} \left(\frac{\Delta K - K_0}{K_\psi} \right)^m \quad (4.5)$$

На фиг. 8 проиллюстрированы процессы накопления повреждений и роста трещин, а также изменение соотношения между обобщенными силами G и Γ при силовом и кинематическом нагружении. Параметры, относящиеся ко второму случаю, обозначены штрихами. При силовом нагружении сила, продвигающая трещину, на стадии первоначального накопления повреждений растет, в то время как при кинематическом нагружении она на этой стадии убывает. Поэтому числа циклов до начала роста трещин и предельные числа циклов удовлетворяют неравенствам $n_*' > n_*$, $n_{**}' > n_{**}$.

Рассматривая дифференциальные уравнения (3.7), (4.4), (4.5), замечаем, что их правые части содержат два множителя. Один из них характеризует скорость накопления повреждений на фронте трещин. В переписанных уравнениях зависимость этой скорости от уровня нагружения является степенной. Это следствие того, что аналогичная зависимость принята в исходном уравнении (3.2). Беря в правой части уравнения накопления повреждений другие функциональные зависимости, будем получать соответствующие множители в правых частях уравнений (3.7), (4.4), (4.5). Другой множитель содержит отношение коэффициента интенсивности напряжений (или иной характеристики усилий, продвигающих трещину) к соответствующей характеристике трещиностойкости для неповрежденного материала. Этот результат есть прямое следствие предположения о том, что усталостная трещина удовлетворяет условию равновесности $G = \Gamma$. Вид множителя зависит от того, в какой форме учтено влияние меры повреждений ψ на удельную работу разрушения. Так, если вместо второго соотношения (3.1) принять, что $\gamma = \gamma_0(1 - \psi)^\alpha$, где $\alpha > 0$, то

вместо (3.7) получим уравнение

$$\frac{dl}{dn} = \frac{\rho_1}{1 - (K_{\max}/K_{Ic})^{2/\alpha}} \left(\frac{\Delta K - K_0}{K_\psi} \right)^m \quad (4.6)$$

Аналогично изменят вид уравнения (4.4) и (4.5). Сравним полученные модельные уравнения с эмпирическим уравнением Формана

$$dl/dn = C (\Delta K)^m / [(1-R)K_{Ic} - K_{\max}] \quad (4.7)$$

широко применяемым в прикладных расчетах на долговечность при циклических нагрузках [7]. В уравнение (4.7) входит характеристика асимметрии цикла $R = K_{\min}/K_{\max}$, а также эмпирическая константа C . Приведем уравнение (4.7) к виду, аналогичному (3.7):

$$dl/dn = C (\Delta K)^{m-1} (K_{\max}/K_{Ic}) / (1 - K_{\max}/K_{Ic}) \quad (4.8)$$

Числитель в правой части уравнения (4.8) содержит множитель K_{\max}/K_{Ic} , появление которого трудно обосновать теоретическими соображениями (отсутствие порогового значения K_0 не имеет столь принципиального значения). Еще одно слабое место уравнения Формана состоит в том, что оно не содержит в себе путей для естественного обобщения на случай сложного напряженного состояния. Между тем в рамках предлагаемого подхода достаточно вместо первой формулы (3.1) взять известное из линейной механики разрушения выражение [8]

$$G = \frac{1-\mu^2}{E} (K_I^2 + K_{II}^2) + \frac{1+\mu}{E} K_{III}^2 \quad (4.9)$$

Здесь K_I , K_{II} и K_{III} — соответственно коэффициенты интенсивности напряжений при нормальном отрыве, поперечном сдвиге и продольном сдвиге. Дальнейшие выкладки приводят к уравнению (3.7), в которое вместо K_{\max} войдет максимальное значение приведенного коэффициента интенсивности K_r . С учетом (4.9) $K_r^2 = K_I^2 + K_{II}^2 + K_{III}^2 / (1-\mu)$. Величина ΔK вошла в уравнение (3.7) из уравнения накопления повреждений (3.2). Поэтому способ обобщения второго множителя в правой части (3.7) зависит от принимаемого предположения о накоплении рассеянных повреждений. Например, если есть основания полагать, что повреждения появляются главным образом вследствие нормального отрыва, то естественно заменить ΔK на ΔK_I .

Автор выражает признательность В. М. Ковеху и М. Ю. Панову за помощь в вычислениях.

ЛИТЕРАТУРА

1. Болотин В. В. Статистические методы в строительной механике. М.: Стройиздат, 1965. 279 с.
2. Болотин В. В. Распределение времен до разрушения при случайных нагрузках. — ПМТФ, 1980, № 5, с. 149–158.
3. Болотин В. В. Уравнения роста усталостных трещин. — Изв. АН СССР. МТТ, 1983, № 4, с. 153–160.
4. Болотин В. В. Объединенная модель разрушения композитных материалов при длительно действующих нагрузках. — Механика композитных материалов, 1981, № 1, с. 405–420.
5. Панасюк В. В., Андрейкив А. Е., Ковчик С. Е. Методы оценки трещиностойкости конструкционных материалов. Киев: Наук. думка, 1977. 280 с.
6. Трощенько В. Т. Деформирование и разрушение металлов при многоцикловом нагружении. Киев: Наук. думка, 1981. 344 с.
7. Part-through crack fatigue life prediction./Ed. J. В. Chang.— ASTM STP 687. Philadelphia: ASTM, 1979. 216 p.
8. Райс Дж. Математические методы в механике разрушения. — В кн.: Разрушение. /Под ред. Либовиц Г. Математические основы теории разрушения. Т. 2. М.: Мир, 1975, с. 204–335.

Москва

Поступила в редакцию
10.X.1983