

УДК 539.375

КОЭФФИЦИЕНТЫ ИНТЕНСИВНОСТИ НАПРЯЖЕНИЙ У КОНЦОВ ДВУХ КОЛЛИНЕАРНЫХ ТРЕЩИН НОРМАЛЬНОГО ОТРЫВА ПРИ УСТАНОВИВШИХСЯ КОЛЕБАНИЯХ

БОРОДАЧЕВ Н. М., КОЛЬЦОВ В. А.

Рассматривается бесконечная упругая изотропная плоскость, содержащая два коллинеарных разреза (трещины) одинаковой длины. К берегам трещин приложена распределенная нормальная нагрузка $p(x) + s(x)e^{i\omega t}$ (где ω — круговая частота гармонических колебаний, t — время), причем $p(x) > s(x)$. Предполагается, что берега трещин не контактируют. Такую задачу можно свести к рассмотрению двух задач: статической задачи теории упругости для плоскости с прямолинейными разрезами и динамической задачи об установившихся периодических колебаниях плоскости с разрезами под действием нагрузки $s(x)e^{i\omega t}$. Решение первоначальной задачи получится наложением решений этих задач. Обзор соответствующих статических решений можно найти, например, в [1]. Динамические задачи в случае одной трещины нормального отрыва рассматривались в [2–5].

Решение динамической задачи для двух трещин продольного сдвига приведено в [6, 7]. Ниже рассматривается динамическая задача для двух трещин нормального отрыва. Получены зависимости коэффициентов интенсивности напряжений у внешних и внутренних концов трещин от параметра, учитывающего частоту нагружения, длину трещин и упругие характеристики материала, для различных форм распределения нагрузки по длине трещин.

1. В прямоугольных координатах x, y положение трещин характеризуется условиями $y=0, a \leq |x| \leq b$ (фиг. 1). Полагаем, что объемные силы отсутствуют. Предполагается также наличие симметрии относительно осей x и y . В процессе решения необходимо удовлетворить условиям излучения и смешанным граничным условиям при $y=0$:

$$\sigma_y^*(x, 0) = -\sigma_0 s(x) \quad (a < |x| < b), \quad (1.1)$$

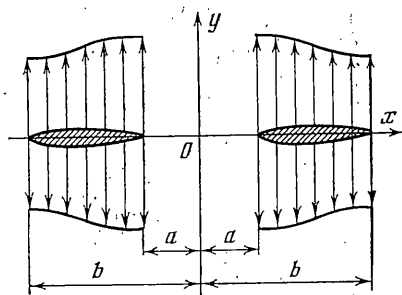
$$v^*(x, 0) = 0 \quad (|x| < a, |x| > b)$$

$$\tau_{xy}^*(x, 0) = 0 \quad (-\infty < x < \infty),$$

$$\sigma_y(x, y, t) = \sigma_y^*(x, y) e^{i\omega t}$$

$$v(x, y, t) = v^*(x, y) e^{i\omega t},$$

$$\tau_{xy}(x, y, t) = \tau_{xy}^*(x, y) e^{i\omega t}$$



Фиг. 1

Применяя к уравнениям движения упругой изотропной среды интегральное преобразование Фурье и удовлетворяя третьему граничному условию (1.1), находим (в случае плоской деформации):

(1.2)

$$\sigma_y^*(x, y) = \frac{\mu}{m^2 (2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{(2\alpha^2 - m^2)^2 e^{-h_2 y}}{k_2} - 4\alpha^2 k_1 e^{-h_1 y} \right] V^*(\alpha, 0) e^{-i\alpha x} d\alpha$$

$$V^*(\alpha, y) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} v^*(x, y) e^{-i\alpha x} dx, \quad k_1 = (\alpha^2 - m^2)^{1/2}$$

$$k_2 = (\alpha^2 - \varepsilon^2 m^2)^{1/2}, \quad m = \omega \left(\frac{\rho}{\mu} \right)^{1/2}, \quad \varepsilon = \left(\frac{\mu}{\lambda + 2\mu} \right)^{1/2}$$

где λ, μ — упругие постоянные Ламе, ρ — плотность среды.

Все результаты, приведенные в публикуемой работе, будут справедливы также и в случае плоского напряженного состояния, если вместо постоянной λ использовать постоянную $\lambda_0 = 2\lambda\mu/(\lambda + 2\mu)$.

Применяя к (1.2) теорему о свертках для преобразования Фурье и учитывая симметрию рассматриваемой задачи относительно оси y , получаем

$$\sigma_y^*(x, y) = \frac{\mu}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} f(x - \xi) v^*(\xi, 0) d\xi \quad (1.3)$$

$$f(x) = \left(\frac{2}{\pi} \right)^{1/2} \left[\frac{4}{m^2} D_4 - 4D_2 + m^2 D_0 - \frac{4}{m^2} E_4 + 4E_2 \right] \quad (1.4)$$

$$E_i = \int_0^{\infty} \frac{\alpha^i e^{-k_1 y}}{k_1} \cos x\alpha d\alpha, \quad D_i = \int_0^{\infty} \frac{\alpha^i e^{-k_2 y}}{k_2} \cos x\alpha d\alpha$$

Вычислим интегралы, входящие в (1.4). При этом следует иметь в виду неоднозначность функций k_1 и k_2 . Используя условие симметрии относительно оси x , ограничимся рассмотрением полуплоскости $y > 0$. Учитывая ограничения, накладываемые условиями излучения, выбираем знаки корней следующим образом:

$$k_1 = |\sqrt{\alpha^2 - m^2}| \quad (\alpha > m), \quad k_1 = i|\sqrt{m^2 - \alpha^2}| \quad (\alpha < m) \quad (1.5)$$

$$k_2 = |\sqrt{\alpha^2 - \varepsilon^2 m^2}| \quad (\alpha > \varepsilon m), \quad k_2 = i|\sqrt{\varepsilon^2 m^2 - \alpha^2}| \quad (\alpha < \varepsilon m)$$

Известно [8], что

$$\int_0^{\infty} \frac{\exp[-y(\alpha^2 + \beta^2)^{1/2}]}{(\alpha^2 + \beta^2)^{1/2}} \cos x\alpha d\alpha = K_0[\beta(y^2 + x^2)^{1/2}] \quad (\operatorname{Re} \beta > 0, \operatorname{Re} y > 0) \quad (1.6)$$

где $K_\nu(z)$ — модифицированная функция Бесселя второго рода.

Обозначим $\beta_1 = im$, $\beta_2 = i\varepsilon m$. Тогда

$$E_i = \int_0^{\infty} \frac{\alpha^i \exp[-y(\alpha^2 + \beta_1^2)^{1/2}]}{(\alpha^2 + \beta_1^2)^{1/2}} \cos x\alpha d\alpha, \quad (1.7)$$

$$D_i = \int_0^{\infty} \frac{\alpha^i \exp[-y(\alpha^2 + \beta_2^2)^{1/2}]}{(\alpha^2 + \beta_2^2)^{1/2}} \cos x\alpha d\alpha$$

Чтобы воспользоваться формулой (1.6), применим прием, основанный на введении малого затухания в среду. При этом величины m и εm становятся комплексными. При временной зависимости $e^{i\omega t}$ будем иметь $m = m_R - im_I$, $\varepsilon m = \varepsilon(m_R - im_I)$. Следовательно, $\beta_1 = m_I + im_R$, $\beta_2 = \varepsilon(m_I + im_R)$. Таким образом, $\operatorname{Re} \beta_1 > 0$ и $\operatorname{Re} \beta_2 > 0$, что удовлетворяет ограничениям в (1.6).

Более подробно вопросы, связанные с введением малого затухания в идеально упругую среду и с неоднозначностью функций типа k_1 и k_2 , освещены, например, в [9, 10].

Используя значение интеграла (1.6) и рекуррентную формулу для косинус-преобразования Фурье [8], получим выражения для искомых интегралов

$$\begin{aligned} E_0 &= K_0 [\beta_1 (y^2 + x^2)^{1/2}] \\ E_2 &= \beta_1 \frac{y^2 - x^2}{(y^2 + x^2)^{3/2}} K_1 [\beta_1 (y^2 + x^2)^{1/2}] - \beta_1^2 \frac{x^2}{y^2 + x^2} K_0 [\beta_1 (y^2 + x^2)^{1/2}] \\ E_4 &= K_0 [\beta_1 (y^2 + x^2)^{1/2}] \left\{ \beta_1^4 \frac{x^4}{(y^2 + x^2)^2} + \beta_1^2 \frac{3x^4 - 18x^2 y^2 + 3y^4}{(y^2 + x^2)^3} \right\} + \\ &+ K_1 [\beta_1 (y^2 + x^2)^{1/2}] \left\{ \beta_1^3 \frac{2x^4 - 6x^2 y^2}{(y^2 + x^2)^{5/2}} + \beta_1 \frac{6x^4 - 36x^2 y^2 + 6y^4}{(y^2 + x^2)^{7/2}} \right\} \end{aligned} \quad (1.8)$$

Если в интегралах E_i (1.8) величину β_1 заменить на β_2 , получим значения соответствующих интегралов D_i .

Устремляя в (1.3) y к нулю и удовлетворяя первому и второму условиям (1.1), приходим к сингулярному интегральному уравнению первого рода для комплексной амплитуды перемещения берегов трещин

$$\begin{aligned} -\frac{\sigma_0 s(x_1) b}{\mu} &= \int_{-1}^{-x} F(x_1 - \xi_1) v^*(\xi_1, 0) d\xi_1 + \int_x^1 F(x_1 - \xi_1) v^*(\xi_1, 0) d\xi_1 \\ F(x_1) &= [4(D_4 - E_4)/q^2 - 4(D_2 - E_2) + q^2 D_0]/\pi \\ x_1 &= x/b, \quad \xi_1 = \xi/b, \quad q = mb, \quad \kappa = a/b \end{aligned} \quad (1.9)$$

Используя известные соотношения $K_\nu(z) = -1/2 \pi i e^{-1/2 \nu \pi i} H_\nu^{(2)}(ze^{-1/2 \pi i})$ ($-\pi/2 < \arg z \leq \pi$), ядро уравнения (1.9) представим в виде

$$\begin{aligned} F(x_1) &= i \left\{ H_0^{(2)}(q|x_1|) \left[-\frac{6}{x_1^2} \right] + H_1^{(2)}(q|x_1|) \left[\frac{12}{q|x_1^3|} - \frac{2q}{|x_1|} \right] + \right. \\ &+ H_0^{(2)}(\varepsilon q|x_1|) \left[6\frac{\varepsilon^2}{x_1^2} + q^2 \left(-2\varepsilon^4 + 2\varepsilon^2 - \frac{1}{2} \right) \right] + \\ &\left. + H_1^{(2)}(\varepsilon q|x_1|) \left[\frac{2\varepsilon q}{|x_1|} (2\varepsilon^2 - 1) - \frac{12\varepsilon}{q|x_1^3|} \right] \right\} \end{aligned} \quad (1.10)$$

где $H_\nu^{(2)}(z)$ — функция Ханкеля второго рода.

2. Рассмотрим вопросы, связанные с решением интегрального уравнения (1.9).

Выделяя из ядра (1.10) сингулярную часть, преобразуем уравнение (1.9) к виду

$$Lv^* + \int_{-1}^{-x} F_1(x_1 - \xi_1) v^*(\xi_1, 0) d\xi_1 + \int_x^1 F_1(x_1 - \xi_1) v^*(\xi_1, 0) d\xi_1 = \frac{\sigma_0 s(x_1) b}{\mu} \quad (2.1)$$

$$Lv^* = \frac{2(1 - \varepsilon^2)}{\pi} \left\{ \int_{-1}^{-x} \frac{\partial v^*(\xi_1, 0)}{\partial \xi_1} \frac{d\xi_1}{x_1 - \xi_1} + \int_x^1 \frac{\partial v^*(\xi_1, 0)}{\partial \xi_1} \frac{d\xi_1}{x_1 - \xi_1} \right\} \quad (2.2)$$

$$F_1(x_1) = \frac{2}{\pi} (1 - \varepsilon^2) \frac{1}{x_1^2} - F(x_1)$$

Интегралы в (2.2) понимаются в смысле главного значения по Коши.

Уравнение (2.1) решается с использованием метода моментов, подробное описание которого можно найти в [11]. Там же обсуждаются вопросы существования, единственности и сходимости решений интегральных уравнений первого рода, к которым сводятся задачи распространения электромагнитных волн, аналогичные, в математическом отношении, рассматриваемой здесь задаче. Метод заключается в сведении интегрального уравнения к матричному при помощи разложения неизвестной функции $v^*(x_1, 0)$ в ряд по базисным функциям $\varphi_n(x_1)$. Чтобы обеспечить хорошую сходимость решения, следует рационально выбрать систему базисных функций, для чего необходимо знать характер поведения неизвестной функции $v^*(x_1, 0)$ в окрестностях концов трещин, а также форму смещения берегов трещин при статическом приложении нагрузки.

Получим формулы для перемещения при статическом нагружении. В этом случае $\omega=0$ и уравнение (2.1) приобретает вид

$$\frac{1}{\pi} \int_{-x}^x \Phi(\xi_1) \frac{d\xi_1}{\xi_1 - x_1} + \frac{1}{\pi} \int_x^1 \Phi(\xi_1) \frac{d\xi_1}{\xi_1 - x_1} = S(x_1) \quad (2.3)$$

$$\Phi(\xi_1) = \partial v(\xi_1, 0) / \partial \xi_1, \quad S(x_1) = -\sigma_0 s(x_1) b / [2(1-\varepsilon^2)\mu]$$

Производя замену переменных в (2.3), получим

$$\frac{1}{\pi} \int_{x^2}^1 \frac{\Phi(t)}{t - x_1^2} dt = S(x_1) \quad (2.4)$$

Согласно [12], неограниченное на обоих концах решение интегрального уравнения (2.4) имеет вид

$$\Phi(x_1) = -\frac{1}{(1-x_1^2)^{1/2}(x_1^2-\kappa^2)^{1/2}} \left[a_0 + \frac{1}{\pi} \int_{x^2}^1 \frac{(t-\kappa^2)^{1/2}(1-t)^{1/2} S(t)}{t-x_1^2} dt \right] \quad (2.5)$$

где a_0 — некоторая постоянная, определяемая из условия $\int_{-1}^1 \Phi(x_1) dx_1 = 0$ (нижний предел интеграла $\pm x$, верхний ± 1), которое следует из того, что $v(\pm \kappa) = v(\pm 1) = 0$.

Для вычисления интеграла в (2.5) используем выражения, приведенные в [13, 14]:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_a^b (x-a)^{\rho-1} (b-x)^{\sigma-1} \frac{dx}{x-y} &= (y-a)^{\rho-1} (b-y)^{\sigma-1} \operatorname{ctg} \sigma\pi - \\ &- \frac{\Gamma(\rho)\Gamma(\sigma-1)}{\pi\Gamma(\rho+\sigma-1)} (b-a)^2 {}_2F_1\left(2-\rho-\sigma, 1; 2-\sigma; \frac{b-y}{b-a}\right) \\ &(\xi=\rho+\sigma-2, a < y < b, \operatorname{Re} \rho > 0, \operatorname{Re} \sigma > 0) \end{aligned} \quad (2.6)$$

$${}_2F_1(-n, n; 1/2; x) = T_n(1-2x)$$

где $\Gamma(x)$ — гамма-функция, ${}_2F_1(a, b; c; z)$ — гипергеометрический ряд Гаусса, $T_n(x)$ — многочлены Чебышева. В результате получим выражение для смещения берегов трещин при равномерно распределенной нагрузке ($s(x_1)=1$):

$$\begin{aligned} v(x_1, 0) &= \frac{\sigma_0 b}{2(1-\varepsilon^2)\mu} \left\{ \frac{(1-x_1^2)^{1/2}(x_1^2-\kappa^2)^{1/2}}{|x_1|} + \frac{E(k)}{K(k)} F(\gamma, k) - E(\gamma, k) \right\} \\ k &= (1-\kappa^2)^{1/2}, \quad \gamma = \arcsin \left\{ \frac{1}{|x_1|} \left(\frac{x_1^2-\kappa^2}{1-\kappa^2} \right)^{1/2} \right\} \end{aligned} \quad (2.7)$$

где $K(k)$ и $E(k)$ — полные эллиптические интегралы, $F(\gamma, k)$ и $E(\gamma, k)$ — неполные эллиптические интегралы первого и второго рода.

При более сложных вариантах распределения нагрузки по длине трещин, когда выражение для $s(x_1)$ содержит члены x_1^{2n} , сингулярный интеграл в (2.5) можно привести к такому же виду, как и в случае равномерно распределенной нагрузки, применяя n раз рекуррентную формулу для преобразований Гильберта [13]. Таким образом, например, была получена формула для перемещения при $s(x_1) = x_1^2$:

$$v(x_1, 0) = \frac{\sigma_0 b}{2(1-\varepsilon^2)\mu} \left\{ \frac{2x_1^2 + 1 + \kappa^2}{6|x_1|} (1-x_1^2)^{1/2} (x_1^2 - \kappa^2)^{1/2} + \right. \\ \left. + \frac{1+\kappa^2}{6} \left[\frac{E(k)}{K(k)} F(\gamma, k) - E(\gamma, k) \right] \right\} \quad (2.8)$$

3. Получим асимптотические формулы для перемещения у концов трещин. Удовлетворяя первому и второму условиям (1.1), используя формулу (1.2) и учитывая симметрию относительно оси y , приходим к тройным интегральным уравнениям

$$\int_0^\infty \alpha^{1/2} V^*(\alpha, 0) J_{-1/2}(x\alpha) d\alpha = 0 \quad (0 < x < a) \\ \int_0^\infty \alpha^{1/2} N(\alpha) V^*(\alpha, 0) J_{-1/2}(x\alpha) d\alpha = -\frac{\sigma_0 s(x)}{\mu x^{1/2}} \quad (a < x < b) \\ \int_0^\infty \alpha^{1/2} V^*(\alpha, 0) J_{-1/2}(x\alpha) d\alpha = 0 \quad (b < x < \infty) \\ N(\alpha) = [(2\alpha^2 - m^2)^2 / k_2 - 4\alpha^2 k_1] / m^2 \quad (3.1)$$

где $J_\nu(x)$ — функция Бесселя первого рода.

Решения таких уравнений подробно описаны в [15].

Используя оператор Ханкеля

$$S_{\eta, \alpha} f(x) = 2^\alpha x^{-\alpha} \int_0^\infty t^{1-\alpha} J_{2\eta+\alpha}(xt) f(t) dt$$

уравнения (3.1) можно компактно записать так:

$$S_{1/4, -1} [1 + k(x)] \psi(x) = H(x), \quad S_{-1/4, 0} \psi(x) = G(x) \quad (3.2) \\ k(x) = - \left[1 + \frac{N(\alpha)}{2(1-\varepsilon^2)|\alpha|} \right], \quad \psi(x) = \frac{V^*(x, 0)}{x^{1/2}} \\ H(x) = H_1(x) \quad (0 < x < a); \quad H(x) = H_2(x) \quad (a < x < b); \\ H(x) = H_3(x) \quad (b < x < \infty)$$

Аналогичное представление можно записать и для функции $G(x)$. Неизвестны H_1, G_2, H_3 . Известны $G_1 = G_3 = 0, H_2 = (1-\varepsilon^2)\mu x^{3/2} / (\sigma_0 s(x))$.

С помощью так называемых пробных решений уравнения (3.2) сводятся к системе из двух интегральных уравнений или к одному интегральному уравнению Фредгольма второго рода, рассматривая которые можно получить асимптотические формулы для перемещения у концов трещин.

Используя пробное решение Снеддона $\psi(x) = S_{-\nu, \frac{1}{2}} h(x)$, определяем поведение функции $v^*(x_1, 0)$ у внешних концов трещин

$$v^*(x_1, 0) = \left(\frac{2b}{\pi}\right)^{1/2} \frac{K_b^*}{2(1-\varepsilon^2)\mu} (1-x_1)^{1/2} \quad (x_1 \rightarrow 1-0) \quad (3.3)$$

Используя пробное решение $\psi(x) = S_{-\nu, \frac{1}{2}} h(x)$, предложенное в [16], определяем поведение функции у внутренних концов трещин

$$v^*(x_1, 0) = \left(\frac{2b}{\pi}\right)^{1/2} \frac{K_a^*}{2(1-\varepsilon^2)\mu} (x_1-\kappa)^{1/2} \quad (x_1 \rightarrow \kappa+0) \quad (3.4)$$

В формулах (3.3) и (3.4) K_b^* и K_a^* — комплексные амплитуды коэффициентов интенсивности напряжений соответственно у внешних и внутренних концов трещин

$$K_b^* = \lim_{x \rightarrow b+0} [2\pi(x-b)]^{1/2} \sigma_y^*(x, 0), \quad K_a^* = \lim_{x \rightarrow a-0} [2\pi(a-x)]^{1/2} \sigma_y^*(x, 0) \quad (3.5)$$

Зная форму смещения берегов трещин при статическом приложении нагрузки (2.7) и (2.8) и характер поведения перемещения у концов трещин при динамическом действии нагрузки (3.3), (3.4), выбираем разложение неизвестной функции $v^*(x_1, 0)$ в виде

$$v^*(x_1, 0) = \frac{\sigma_0 b}{2(1-\varepsilon^2)\mu} \sum_{n=0}^N A_n \varphi_n \quad (3.6)$$

$$\varphi_0(x_1) = \frac{(1-x_1^2)^{1/2} (x_1^2 - \kappa^2)^{1/2}}{|x_1|} + \frac{E(k)}{K(k)} F(\gamma, k) - E(\gamma, k)$$

$$\varphi_n(x_1) = \frac{(1-x_1^2)^{1/2} (x_1^2 - \kappa^2)^{1/2}}{|x_1|} x_1^{2n} \quad (n=1, 2, \dots, N)$$

где A_n — неизвестные комплексные коэффициенты разложения. Аналогично

$$\frac{\partial v^*(x_1, 0)}{\partial x_1} = \frac{\sigma_0 b}{2(1-\varepsilon^2)\mu} \sum_{n=0}^N A_n \theta_n, \quad \theta_n(x_1) = \frac{\partial \varphi_n(x_1)}{\partial x_1} \quad (3.7)$$

Подставляя разложения (3.6) и (3.7) в уравнение (2.1) и придавая переменной x_1 m дискретных значений в пределах $\kappa < |x_1| < 1$, приходим к системе из $2m$ линейных алгебраических уравнений, решением которой будут значения действительных ($\text{Re } A_n$) и мнимых ($\text{Im } A_n$) частей искоемых коэффициентов разложений.

4. Перейдем к определению коэффициентов интенсивности напряжений. В случае установившихся периодических колебаний

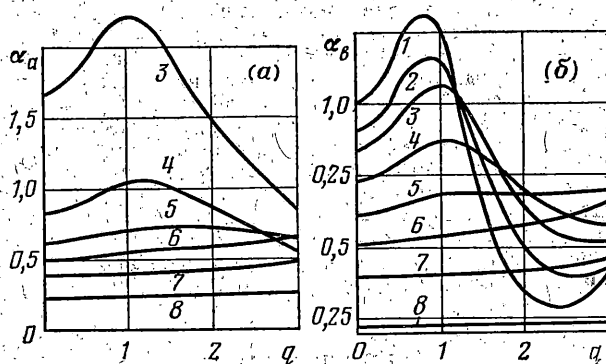
$$K(t) = K^* e^{i\omega t}, \quad K(t) = K_I(t) \quad (4.1)$$

Так как K^* — комплексная величина, положим

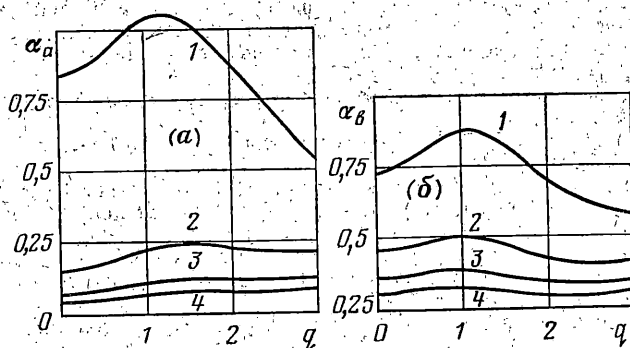
$$K^* = K_0 e^{-i\delta}, \quad K_0 = [(\text{Re } K^*)^2 + (\text{Im } K^*)^2]^{1/2}, \quad \delta = -\text{arctg}(\text{Im } K^* / \text{Re } K^*) \quad (4.2)$$

Таким образом, $K(t) = K_0 \exp[i(\omega t - \delta)]$. Для практики более важна характеристика K_0 — модуль комплексной величины K^* , ее в данном случае целесообразно представить так: $K_0 = \alpha \sigma_0 (\pi b)^{1/2}$.

Получив в результате решения системы линейных уравнений значения коэффициентов разложения и используя формулы (3.3), (3.4), находим



Фиг. 2



Фиг. 3

величины действительных и мнимых частей комплексной амплитуды коэффициента интенсивности напряжений:
у внешних концов трещин

$$\operatorname{Re} K_b^* = \left[k \sum_{n=1}^N \operatorname{Re} A_n + \frac{1-E(k)/K(k)}{k} \operatorname{Re} A_0 \right] \sigma_0 (\pi b)^{1/2} \quad (4.3)$$

$$\operatorname{Im} K_b^* = \left[k \sum_{n=1}^N \operatorname{Im} A_n + \frac{1-E(k)/K(k)}{k} \operatorname{Im} A_0 \right] \sigma_0 (\pi b)^{1/2}$$

у внутренних концов трещин

$$\operatorname{Re} K_a^* = \frac{1}{\kappa^{1/2}} \left[k \sum_{n=1}^N \kappa^{2n} \operatorname{Re} A_n + \frac{E(k)/K(k) - \kappa^2}{k} \operatorname{Re} A_0 \right] \sigma_0 (\pi b)^{1/2} \quad (4.4)$$

$$\operatorname{Im} K_a^* = \frac{1}{\kappa^{1/2}} \left[k \sum_{n=1}^N \kappa^{2n} \operatorname{Im} A_n + \frac{E(k)/K(k) - \kappa^2}{k} \operatorname{Im} A_0 \right] \sigma_0 (\pi b)^{1/2}$$

На основании изложенной в данной работе методики вычисления динамических коэффициентов интенсивности напряжений был составлен пакет прикладных программ для ЭВМ серии ЕС, с помощью которого были произведены расчеты для пяти вариантов распределения нагрузки по длине трещин: $s(x)=1$, $s(x)=x^2$, $s(x)=x^4$, $s(x)=x^6$, $s(x)=1+\cos x$.

Некоторые результаты расчетов для случая плоского напряженного состояния приведены на фиг. 2, 3, где α_a относится к внутренним, а α_b — к внешним концам

трещин. Упругие свойства материала характеризуются коэффициентом Пуассона $\nu = 1/3$. Кривые 1–8 на фиг. 2 соответствуют $\kappa = 0; 10^{-4}; 10^{-2}; 0,1; 0,3; 0,5; 0,7; 0,9$; при $s(x) = 1$, а кривые 1–4 на фиг. 3 – $s(x) = 1, x^2, x^4, x^6$ на $\kappa = 0,1$.

Анализ решений показывает, что при уменьшении частоты нагружения ($q \rightarrow 0$) получаются результаты, соответствующие статическому случаю нагружения. При сближении внутренних концов трещин ($\kappa \rightarrow 0$) значения коэффициента интенсивности напряжений у внешних концов приближаются к значениям, полученным для одной трещины длиной $2b$. Имея решения для вариантов распределения нагрузки по длине трещины: $s(x) = x^{2i}$, можно получить решение практически для любой формы нагружения (симметричной относительно осей x и y). Так, например, решение для случая $s(x) = 1 + \cos x$, полученное в результате решения системы линейных уравнений, совпадает с полученным суперпозиций решений для $s_i(x) = x^{2i}$ с коэффициентами, соответствующими коэффициентами разложения функции $1 + \cos x$ в ряд по четным степеням x .

ЛИТЕРАТУРА

1. Панасюк В. В., Саврук М. П., Дацышин А. П. Распределение напряжений около трещин в пластинках и оболочках. Киев: Наук. думка, 1976. 443 с.
2. Sih G. C., Loeber J. F. Wave propagation in an elastic solid with a line discontinuity or a finite crack. – Quart. Appl. Math., 1969, v. 27, No. 2, p. 193–213.
3. Паргон В. З., Кудрявцев Б. А. Динамическая задача для плоскости с разрезом. – Докл. АН СССР, 1969, т. 185, № 3, с. 544–544.
4. Паргон В. З., Морозов Е. М. Механика упругопластического разрушения. М.: Наука, 1974. 416 с.
5. Паргон В. З., Перлин П. И. Методы математической теории упругости. М.: Наука, 1981. 688 с.
6. Itou S. Diffraction of antiplane shear waves by two coplanar Griffith cracks in an infinite elastic medium. – Internat. J. Solids and Struct., 1980, v. 16, No 12, p. 1147–1153.
7. Бородачев Н. М., Кольцов В. А. Динамические коэффициенты интенсивности напряжений у концов двух коллинеарных трещин продольного сдвига. – Проблемы прочности, 1982, № 7, с. 31–34.
8. Бейтмен Г., Эрдейи А. Таблицы интегральных преобразований. Т. 1. М.: Наука, 1969. 343 с.
9. Фелсен Л., Маркувиц Н. Излучение и рассеяние волн. Т. 2. М.: Мир, 1978. 555 с.
10. Гринченко В. Т., Мелешко В. В. Гармонические колебания и волны в упругих телах. Киев: Наук. думка, 1981. 283 с.
11. Вычислительные методы в электродинамике. Под ред. Р. Митры. М.: Мир, 1977. 485 с.
12. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. М.: Физматгиз, 1963. 639 с.
13. Бейтмен Г., Эрдейи А. Таблицы интегральных преобразований. Т. 2. М.: Наука, 1970. 327 с.
14. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971. 1108 с.
15. Cooke J. C. The solution of triple integral equations in operational form. – Quart. J. Mech. Appl. Math., 1965, v. 18, No. 1, pt 1, p. 57–72.
16. Бородачев Н. М. Об одном классе решений тройных интегральных уравнений. – ПММ, 1976, т. 40, № 4, с. 655–661.

Киев

Поступила в редакцию
20.VII.1982