

УДК 534.1:539.375

ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА О ТРЕЩИНЕ В РЕШЕТКЕ
КУЛАХМЕТОВА Ш. А., САРАЙКИН В. А., СЛЕПЯН Л. И.

Рассматривается динамическая задача о распространении прямолинейной трещины в плоской периодической решетке с равносторонними треугольными ячейками. Определяется соотношение между энергией, затрачиваемой на разрушение связей, пересекаемых трещиной, и подводимой к краю трещины, в зависимости от скорости движения трещины. Таким образом, находится та часть энергии, которая излучается с осциллирующими волнами при колебаниях решетки.

В длинноволновом приближении (на макроуровне) решетка эквивалентна сплошной среде, в которой существует поток энергии T к краю движущейся трещины. В решетке (на микроуровне) часть этой энергии T_0 тратится на разрушение связей, пересекаемых трещиной, другая часть $T - T_0$ оттекает от края трещины при излучении осциллирующих волн (колебаний решетки). Это излучение — дополнительное к излучению от берегов трещины при ее нестационарном распространении или при распространении со сверхзвуковой скоростью в сплошной среде. Определяется отношение $k(v) = T_0/T$ для дорелеевской скорости трещины v ($0 < v < c_R$). Тем самым находится выражение для макроскопического критерия через T_0 и v . Ранее с аналогичной целью рассматривалась более простая антиплоская задача для решетки с квадратными ячейками [1, 2].

1. Пусть в узлах плоской равносторонней треугольной решетки (фиг. 1) сосредоточены единичные массы, каждая из которых взаимодействует с шестью соседними массами при помощи безынерционных линейно-упругих связей единичной длины и единичной жесткости. В длинноволновом приближении решетка эквивалентна изотропной сплошной среде с плотностью $\rho = 2/3^{1/2}$, скоростями волн расширения $c_1 = (9/8)^{1/2} \approx 1,0607$ и волны сдвига $c_2 = (3/8)^{1/2} \approx 0,6123$. Коэффициент Пуассона $\nu = 1/3$ (для пространственной решетки с центральными связями, отвечающей изотропной среде, $\nu = 1/4$ [3, с. 222]). Указанным значениям скоростей длинных волн расширения и сдвига соответствует скорость длинных поверхностных волн $c_R = 1/2(3 - 3^{1/2})^{1/2} \approx 0,5630$ ($c_R/c_2 = [2(1 - 1/3^{1/2})] \approx 0,9194$).

Ясно, что сами по себе величины скоростей и плотности в указанное безразмерное отношение входить не могут, поскольку они зависят от выбора единиц измерения. Существенны лишь параметры c_1/c_2 (здесь $c_1/c_2 = 3^{1/2}$) и, например, $(3/8)^{1/2}v/c_2$ (в принятых единицах эта переменная равна v).

Введем прямоугольную систему координат x_1, x_2 , как показано на фиг. 1, и набор из шести единичных векторов $\mathbf{l}_k = (\cos(\pi k/3), \sin(\pi k/3))$ ($k=0, 1, \dots, 5$), направленных от любой данной массы вдоль ее связей с другими массами. Координаты масс определяются вектором $\mathbf{x}' = m\mathbf{l}_0 + n\mathbf{l}_1$, где m, n — целые числа. Обозначим $\mathbf{u}(t, \mathbf{x}') = (u_1, u_2)$ — перемещение масс, $\mathbf{P}(t, \mathbf{x}') = (P_1, P_2)$ — внешние силы.

Рассматривая вначале неповрежденную решетку, запишем уравнение движения масс

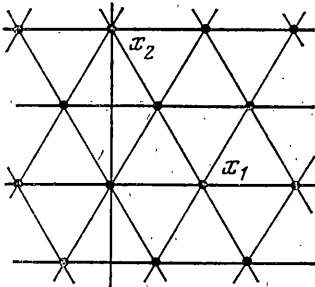
$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}(t, \mathbf{x}')}{\partial t^2} - \sum_{k=0}^5 Q_k(t, \mathbf{x}') \mathbf{l}_k = \mathbf{P}(t, \mathbf{x}') \quad (1.1)$$

$$Q_k = [\mathbf{u}(t, \mathbf{x}' + \mathbf{l}_k) - \mathbf{u}(t, \mathbf{x}')] \cdot \mathbf{l}_k$$

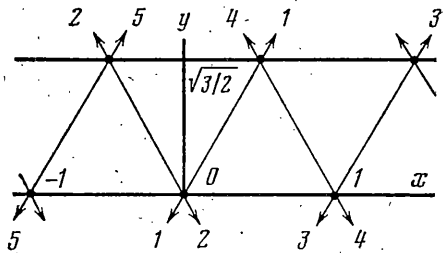
где Q_k — внутренняя сила, действующая на данную массу вдоль вектора \mathbf{l}_k . Пусть $v = \text{const}$ и в координатах $\tau = x_1 - vt$, $y = x_2$ задача стационарна: $\mathbf{u}(t+1/v, \mathbf{x}' + \mathbf{l}_0) = \mathbf{u}(t, \mathbf{x}')$. Тогда можно положить $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} = \mathbf{x}' - vt\mathbf{l}_0 = (\tau, y)$. При этом уравнение движения и выражение для внутренних сил (1.1) примут вид

$$v^2 \frac{\partial^2 \mathbf{u}(\mathbf{x})}{\partial \tau^2} - \sum_{k=0}^5 Q_k(\mathbf{x}) \mathbf{l}_k = \mathbf{P}(\mathbf{x}), \quad Q_k(\mathbf{x}) = [\mathbf{u}(\mathbf{x} + \mathbf{l}_k) - \mathbf{u}(\mathbf{x})] \mathbf{l}_k \quad (1.2)$$

Пусть трещина — разрыв связей между слоями $y=0$, $y=3^{1/2}/2$ — распространяется со скоростью $v = \text{const} > 0$ вдоль оси x_1 : связи разрываются



Фиг. 1



Фиг. 2

по очереди через равные промежутки времени $\Delta t = 1/(2v)$. При $\tau = 0$ исчезают внутренние силы, действующие по направлению \mathbf{l}_1 (равные Q_1 при $\tau > 0$), а при $\tau = 1/2$ — силы, действующие по направлению \mathbf{l}_2 (равные Q_2 при $\tau > 1/2$).

Уравнение (1.2) будет описывать динамику решетки с трещиной, если компенсировать внешними силами взаимодействие между массами, нарушенное трещиной, т. е. компенсировать внутренние силы $Q_1(\tau \mathbf{l}_0) \equiv Q_1(\tau \mathbf{l}_0 + \mathbf{l}_1)$ при $\tau < 0$ и $Q_2(\tau \mathbf{l}_0) \equiv Q_5(\tau \mathbf{l}_0 + \mathbf{l}_5)$ при $\tau < 1/2$. Из соображений симметрии следует, что в задаче I (растяжение вдоль нормали к трещине [4]):

$$Q_2(\tau) \equiv Q_2(\tau \mathbf{l}_0) = Q(\tau^{-1/2}) \equiv Q_1(\tau^{-1/2}) \equiv Q((\tau^{-1/2}) \mathbf{l}_0) \quad (1.3)$$

а в задаче II, т. е. в задаче о сдвиге

$$Q_2(\tau) = -Q(\tau^{-1/2}) \quad (1.4)$$

Учитывая это, положим

$$\mathbf{P}(\tau \mathbf{l}_0) = N(\tau) \mathbf{l}_4 \pm N(\tau^{-1/2}) \mathbf{l}_5, \quad \mathbf{P}(\tau \mathbf{l}_0 + \mathbf{l}_1) = N(\tau) \mathbf{l}_1 \pm N(\tau^{1/2}) \mathbf{l}_2 \quad (1.5)$$

$$N(\tau) = P_0(\tau) + Q_-(\tau), \quad Q_-(\tau) = Q(\tau) H(-\tau)$$

Здесь и ниже верхние знаки соответствуют задаче I, нижние — задаче II; $P_0(\tau)$ — внешние силы в задаче о трещине; H — функция Хевисайда; индекс $+$ ($-$) приписывается функциям с носителями при $\tau \geq 0$ ($\tau \leq 0$), а также фурье-образам таких функций.

В дальнейшем будет показано, что из (1.2), (1.5) следуют равенства (1.3), (1.4). Поэтому введение слагаемого Q_- в (1.5) действительно компенсирует взаимодействие между слоями $y=0$, $y=3^{1/2}/2$ (см. фиг. 2, где цифрами 1–5 отмечены внешние силы: $N(vt)$, $\pm N(-vt^{-1/2})$, $N(1-vt)$, $\pm N(1/2-vt)$, $N(-1-vt)$).

В задаче I силы $Q_1(\tau)$, $Q_2(\tau)$ исчезают при одинаковых положительных значениях, т. е. при одинаковом предельном растяжении связей. Что же касается задачи II, то рассматриваемому стационарному решению отвеча-

ют предельное растяжение связи, ориентированной вдоль вектора \mathbf{l}_1 (предельная сила $Q_1(0) > 0$), и то же по абсолютной величине предельное сжатие связи, ориентированной вдоль вектора \mathbf{l}_2 (предельная сила $Q_2(1/2) = -Q_1(0) < 0$).

2. Проведем над уравнением (1.2) преобразование Фурье — непрерывное по τ и дискретное по y :

$$\mathbf{u}^F(q, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{u}(\mathbf{x}) e^{iq\tau} d\tau,$$

$$\mathbf{u}^{FF}(q, s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathbf{u}^F\left(q, \frac{\sqrt{3}}{2}n\right) \exp\left(i\frac{\sqrt{3}}{2}sn\right)$$

С учетом равенств (1.5) находим

$$v^2 q^2 \mathbf{u}^{FF}(q, s) + \sum_{h=0}^5 Q_h^{FF}(q, s) \mathbf{l}_h = -\mathbf{P}^{FF}(q, s) \quad (2.1)$$

$$Q_h^{FF} = [\exp(-i\mathbf{l}_h) - 1] \mathbf{u}^{FF} \mathbf{l}_h, \quad \mathbf{r} = (q, s)$$

$$\mathbf{P}^{FF} = N^F(q) [\mathbf{l}_4 \pm \mathbf{l}_5 \exp(iq/2) + (\mathbf{l}_1 \exp(iq/2) \pm \mathbf{l}_2) \exp(i\sqrt{3}s/2)]$$

Проектируя на оси x_1, x_2 , получаем уравнения

$$[1 + 4 \sin^2 \frac{1}{2}q - \cos \frac{1}{2}q \cos \frac{1}{2}\sqrt{3}s - v^2 q^2] u_1^{FF} + \sqrt{3} \sin \frac{1}{2}q \sin \frac{1}{2}\sqrt{3}s u_2^{FF} = P_1^{FF} \quad (2.2)$$

$$\sqrt{3} \sin \frac{1}{2}q \sin \frac{1}{2}\sqrt{3}s u_1^{FF} +$$

$$+ [3(1 - \cos \frac{1}{2}q \cos \frac{1}{2}\sqrt{3}s) - v^2 q^2] u_2^{FF} = P_2^{FF}$$

$$P_1^{FF} = -\frac{1}{2}(1 \mp \exp \frac{1}{2}iq)(1 \pm \exp \frac{1}{2}i\sqrt{3}s) N^F(q)$$

$$P_2^{FF} = -\sqrt{3}/2(1 \pm \exp \frac{1}{2}iq)(1 \mp \exp \frac{1}{2}i\sqrt{3}s) N^F(q)$$

Выражения для $Q_{1,2}^F(q)$ определяется из (2.1) формулой обращения дискретного преобразования Фурье (см., например, [5]):

$$Q_{1,2}^F(q) = \frac{\sqrt{3}}{8\pi} \int_{-2\pi/\sqrt{3}}^{2\pi/\sqrt{3}} \left[\exp\left(-\frac{iq}{2} - \frac{i\sqrt{3}s}{2}\right) - 1 \right] (u_1^{FF} + \sqrt{3}u_2^{FF}) ds \quad (2.3)$$

$$Q_2^F(q) = \frac{\sqrt{3}}{8\pi} \int_{-2\pi/\sqrt{3}}^{2\pi/\sqrt{3}} \left[\exp\left(\frac{iq}{2} - \frac{i\sqrt{3}s}{2}\right) - 1 \right] (-u_1^{FF} + \sqrt{3}u_2^{FF}) ds$$

Если теперь обратиться к (2.2) и учесть симметрию интервала интегрирования в (2.3), то можно убедиться, что $Q_2^F(q) = \pm \exp(iq/2) Q_1^F(q)$ и, следовательно, равенства (1.3), (1.4) действительно выполняются.

Решение рассматриваемой задачи (2.2) не единственно, в связи с чем возникает обычная для стационарных задач проблема «отбора решений» (см., например, [6, 7]). Основываясь на принципе причинности [6] (принципе предельной амплитуды [7]), доопределим выражения для перемещений, исходя из предположения, что рассматриваемое стационарное решение является пределом (для любого ограниченного интервала τ при $t \rightarrow \infty$), к которому стремится решение той же, но нестационарной задачи с нулевыми начальными условиями. Для этого достаточно заменить в (2.2) произведение vq на $vq - i0$, т. е. считать что $vq = \lim_{\epsilon \rightarrow +0} vq - i\epsilon$ [2, 8].

С учетом сказанного из (2.2), (2.3) следует

$$Q^F(q) = (1-S) [P_0^F(q) + Q_-^F(q)] \quad (2.4)$$

$$S(iqv+0, q) = \frac{F(n_2) \sqrt{n_1^2 - 1} - F(n_1) \sqrt{n_2^2 - 1}}{3(n_2 - n_1) \sqrt{n_1^2 - 1} \sqrt{n_2^2 - 1}}$$

$$F(n) = 3(\cos^2 \frac{1}{2} q - n)^2 + 6 \sin^2 \frac{1}{2} q (1 \pm \cos^2 \frac{1}{2} q) (1 \mp n) + (iqv+0)^2 [(1 \pm \cos^2 \frac{1}{2} q) (1 \mp n) - n \cos^2 \frac{1}{2} q + 1]$$

$$n_1 = B + \sqrt{B^2 - D}, \quad n_2 = B - \sqrt{B^2 - D}$$

$$B = [1 + 2 \sin^2 \frac{1}{2} q + \frac{1}{3} (iqv+0)^2] \cos^2 \frac{1}{2} q$$

$$D = 1 + 3 \sin^2 \frac{1}{2} q + \frac{1}{3} (iqv+0)^2 [4 + 4 \sin^2 \frac{1}{2} q + (iqv+0)^2]$$

Получаем основное уравнение неоднородной смешанной задачи

$$Q_+^F + S Q_-^F = (1-S) P_0^F \quad (Q = Q_+ + Q_-) \quad (2.5)$$

совпадающее с приведенным в [9]. Следовательно, искомое отношение энергий определяется формулой

$$k(v) = \exp \left(-\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \text{Arg } S(iqv+0, q) \frac{dq}{q} \right), \quad (\text{Arg } S \equiv \text{Im } \ln S) \quad (2.6)$$

Поскольку $\text{Arg } S$ — финитная функция [9], интегрирование в (2.6) распространяется лишь на конечный интервал. В данном случае, как показывает анализ, $\text{Arg } S = 0$ при $q > 2,6/v$.

Своеобразие расчета $k(v)$ определяется тем, что значения $\text{Arg } S$ зависят не только от значений S , но и от «истории» — определяются по непрерывности по мере изменения q . Вследствие того что $\text{Arg } S$ — нечетная функция q , а в некоторой окрестности $q=0$ функция $\text{Arg } S$ от q не зависит, имеем $\text{Arg } S(+0, 0) = 0$. Чтобы наблюдать при расчетах за изменением $\text{Arg } S$ при увеличении q , вместо переменной $iqv+0$ возьмем $iqv+\varepsilon$, $\varepsilon = 10^{-8}$. Функцию S в (2.4) преобразуем к более удобному для вычислений виду. Поделив ее числитель на $n_2 - n_1$, получим

$$\text{Arg } S = \text{Arg } \Phi_1 - \frac{1}{2} \text{Arg } \Phi_2 - \frac{1}{2} \text{Arg } \Phi_3 \quad (2.7)$$

$$\Phi_1 = M - L \Phi_2, \quad \Phi_2 = 2 - (D+1) / B^2 + \sqrt{B^2 - D} / B^2$$

$$\Phi_3 = (D+1)^2 - 4B^2, \quad M = (\cos^2 \frac{1}{2} q - B) [\sin^2 \frac{1}{2} q \text{tg}^2 \frac{1}{2} q \mp \mp 2 \sin^2 \frac{1}{2} q \mp \frac{1}{3} (iqv+\varepsilon)^2] - B^2 + D$$

$$L = \frac{1}{2} B [\cos^2 \frac{1}{2} q - B \pm 2 \sin^2 \frac{1}{2} q \pm \frac{1}{3} (iqv+\varepsilon)^2]$$

В окрестности $q=0$ имеем $\text{Arg } \Phi_i = 0$ ($i=1, 2, 3$). Придавая q малое приращение h , последовательно по шагам определяем при $q > 0$ значения непрерывных ветвей $\text{Arg } \Phi_i$, вычисление которых проводится стандартным способом. Исключение составляет конечное число точек, в которых $\text{Arg } \Phi_i$ меняется весьма быстро (при $\varepsilon=0$ скачком на величину, кратную π). Такими особыми точками являются точки, в которых $\text{Re } \Phi_i$ обращается в нуль или бесконечность, а $\text{Im } \Phi_i = O(\varepsilon)$. Последнее условие обеспечивает вещественность корней (полюсов) функции Φ_i при $\varepsilon \rightarrow +0$. В окрестности особой точки такого типа необходимо вычислять изменение $\text{Arg } \Phi_i$ с шагом значительно меньшим ε , чтобы по изменению $\text{Re } \Phi_i$, $\text{Im } \Phi_i$ правильно определить приращение аргумента при обходе точки. Для расчетов это оказывается неприемлемым, так как приводит к чрезвычайно большим затратам времени ЭВМ. Поэтому $\text{Arg } \Phi_i$ в окрестности

указанных точек находится по следующей приближенной формуле (точной при $\varepsilon=0$):

$$\begin{aligned} \text{Arg } \Phi_i(q_{i,j}+h_2) &= \text{Arg } \Phi_i(q_{i,j}-h_1) + \\ &+ \alpha \ln \text{sgn} [\text{Re } \Phi_i(q_{i,j}-h_1) \text{Im } \Phi_i(q_{i,j}-h_1)] \\ &h_1+h_2=h \quad (h_{1,2} \gg \varepsilon) \end{aligned} \quad (2.8)$$

где $q_{i,j}$ — корень (полюс) $\text{Re } \Phi_i$, который при $\varepsilon=0$ имеет кратность α (α — целое число).

В справедливости формулы (2.8) вне ε -окрестности можно убедиться рассмотрев приращения аргументов при обходе точки $q_{i,j}$ у функций $[a(q-q_{i,j})+i\varepsilon b]^\alpha$, $1/[a(q-q_{i,j})+i\varepsilon b]^\alpha$, где a, b — вещественные постоянные. Преимущество формулы (2.8) становится особенно ощутимым при вычислении аргумента в окрестности нулей (полюсов), которые при $\varepsilon=0$ становятся кратными. В этом случае не требуется тщательно рассчитывать разделившиеся при $\varepsilon>0$ корни (полюса), достаточно знать их кратность и значение $q_{i,j}$ при $\varepsilon=0$.

Рассмотрим положение таких особых точек на оси q .

Уравнение $\text{Re } \Phi_3$ определяет простые корни. В их окрестности приращение аргумента необходимо определять по формуле (2.8), так как $\text{Im } \Phi_3=O(\varepsilon)$.

Из (2.7) следует, что в интервалах, где $\text{Re } \Phi_3 < 0$, $\text{Arg } \Phi_{1,2}$ меняется всегда достаточно плавно, поскольку внутри интервалов $\text{Im } (\Phi_3)^{1/2}=O(1)$ функции $\Phi_{1,2}$ при $\varepsilon=0$ принимают комплексные значения. Следовательно, точки, в малой окрестности которых $\text{Arg } \Phi_{1,2}$ изменяется быстро, могут располагаться только в интервалах $\text{Re } \Phi_3 > 0$ — там $\text{Im } (\Phi_3)^{1/2}=O(\varepsilon)$, а значит, $\text{Im } \Phi_{1,2}=O(\varepsilon)$. В этих интервалах функция $\text{Re } \Phi_2$ обращается в нуль в точках, где $\text{Re } (B^2-D)=0$, при условии, что там $\text{Re } (2B^2-D-1) \times \times (\Phi_3)^{1/2} < 0$. Кроме нулей $\text{Re } \Phi_2$ имеет двукратные полюса в точках $\text{Re } B=0$, если в этих точках выполняется неравенство $\text{Re } (D+1) \text{Re } (\Phi_3)^{1/2} > 0$.

Простые полюса функции $\text{Re } \Phi_1$ совпадают с полюсами функции $\text{Re } \Phi_2$. Отметим, что в (2.7) эти полюса не дают вклада в $\text{Arg } S$, так как в этом случае значения $\text{Arg } \Phi_1$ и $1/2 \text{Arg } \Phi_2$ равны. Функция $\text{Re } \Phi_1$ имеет нули в точках, которые являются корнями следующих уравнений:

$$\begin{aligned} \text{Re} [D+1-B(1+\cos^2 1/2q) / \cos 1/2q] &= 0 \\ 1+4 \sin^2 1/2q \pm \cos 1/2q - v^2 q^2 &= 0 \end{aligned} \quad (2.9)$$

Верхний знак определяет корни $\text{Re } \Phi_1$ в задаче I, а нижний — в задаче II. Других особых точек у функции Φ_i нет.

С учетом изложенного применяется следующий алгоритм расчета $k(v)$ (2.6). На первом шаге вычислений находятся корни $q_{3,j}$ функции $\text{Re } \Phi_3$ ($1 \leq j \leq 2n$). Таким образом определяются интервалы, внутри которых $\text{Re } \Phi_3 > 0$: $q_{3,2l} < q < q_{3,2l+1}$ ($l=0, 1, \dots, n$; $q_{3,0}=0$, $q_{3,2n+1}=2,6/v$). В этих интервалах вычисляются корни функций $\text{Re } \Phi_1$ и $\text{Re } \Phi_2$, обозначим их через $q_{1,i}^{(l)}$, $q_{2,k}^{(l)}$ соответственно, n_l, m_l — число этих корней на l -м интервале

$\text{Re } \Phi_3 > 0$. Затем от начальных значений $\text{Arg } \Phi_i=0$ (при $q=0$) по непрерывности вычисляется изменение $\text{Arg } \Phi_i$, причем в окрестности точек $q_{3,j}, q_{i,k}^{(l)}$ ($i=1, 2$) аргументы вычисляются по формуле (2.8). На интервалах, где $\text{Re } \Phi_3 > 0$, $\text{Arg } S$ является кусочно-постоянной функцией, если пренебречь возмущениями порядка ε , которые возникли из-за замены $iqv+0$ на $iqv+\varepsilon$. Скачки $\text{Arg } S$ в особых точках функций $\Phi_{1,2}$ кратны π .

Обозначим через Q_m все корни $q_{i,k}^{(l)}$, $q_{3,j}$, пронумерованные на оси q по порядку от меньшего к большему ($i=1, 2$; $l=0, 1, \dots, n$; $1 \leq m \leq 2n+$

$+\Sigma(n_l+m_l)=N$), а через A_m — числа, определяемые следующим образом:

$$A_m = \text{Arg } S(iqv + \varepsilon, q), \quad q = Q_m + 0 \neq q_{3, 2l+1} + 0$$

$$A_m = 0, \quad q = Q_m + 0 = q_{3, 2l+1} + 0 \quad (l=0, 1, \dots, n)$$

Учитывая замечание о ступенчатом изменении $\text{Arg } S$ на интервалах $\text{Re } \Phi_3 > 0$, имеем

$$\begin{aligned} k(v) &\approx \exp \left(-\frac{2}{\pi} \sum_{m=1}^{N-1} A_m \int_{Q_m}^{Q_{m+1}} \frac{dq}{q} - \frac{2}{\pi} \sum_{l=1}^n \int_{q_{3, 2l-1}}^{q_{3, 2l}} \text{Arg } S \frac{dq}{q} \right) = \\ &= \prod_{m=1}^{N-1} \left(\frac{Q_m}{Q_{m+1}} \right)^{2A_m/\pi} \exp \left(-\frac{2}{\pi} \sum_{l=1}^n \int_{q_{3, 2l-1}}^{q_{3, 2l}} \text{Arg } S \frac{dq}{q} \right) \end{aligned} \quad (2.10)$$

В (2.10) остались интегралы по интервалам $\text{Re } \Phi_3 < 0$, внутри которых $\text{Arg } S$ является непрерывной функцией, так как функции Φ_1, Φ_2 при $\varepsilon=0$ принимают комплексные значения. Эти интегралы вычисляются методом Симпсона.

В антиплоской задаче о трещине, распространяющейся в решетке с квадратными ячейками, функция $\text{Arg } S$ в (2.6) имеет вид

$$\begin{aligned} \text{Arg } S(iqv + \varepsilon, q) &= \\ &= \frac{1}{2} \text{Arg } \Phi_1 - \frac{1}{2} \text{Arg } \Phi_2 \quad (2.11) \end{aligned}$$

$$\Phi_1 = 4c_2^2 \sin^2 \frac{1}{2} q + (iqv + \varepsilon)^2$$

$$\Phi_2 = 4c_2^2 + \Phi_1 \quad (\varepsilon \rightarrow +0, 0 < v < c_2)$$

При $\varepsilon=0$ значения функций $\Phi_{1,2}$ вещественны, поэтому $\text{Arg } S$ является кусочно-постоянной функцией (некоторой погрешностью из-за замены $iqv+0$ на $iqv+\varepsilon$ опять пренебрегаем, так как при расчетах $\varepsilon=10^{-3}$. Скачки $\text{Arg } S$ совпадают с нулями функций $\Phi_{1,2}$. Они вычисляются по формуле (2.8). Если обозначить через Q_m корни $\Phi_{1,2}$, пронумерованные на оси q по порядку, то для определения $k(v)$ получим следующие выражения:

$$k(v) = \prod_{m=1}^{N-1} \left(\frac{Q_m}{Q_{m+1}} \right)^{2A_m/\pi}, \quad A_m = \text{arg } S(iqv + \varepsilon, q), \quad (q=Q_m) \quad (2.12)$$

где N — число всех корней на положительной полуоси q у функций Φ_1, Φ_2 .

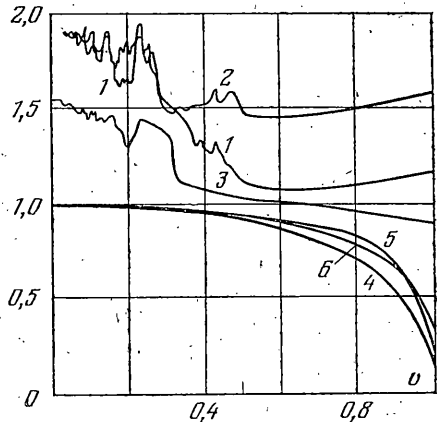
Как видно из (2.12), вычисления в задаче III свелись к вычислению произведений по корням функций Φ_1, Φ_2 и предельных значений $\text{Arg } S$ справа от указанных корней.

На фиг. 3 показаны зависимости от v/c_R отношений (кривые 1, 2):

$$\begin{aligned} K_I / \sqrt{4\mu(1-c_2^2/c_1^2)} T_0 &= (c_2/v) [3R(v)/(4k_I(v)\sqrt{1-v^2/c_1^2})]^{1/2} \\ K_{II} / \sqrt{4\mu(1-c_2^2/c_1^2)} T_0 &= (c_2/v) [3R(v)/(4k_{II}(v)\sqrt{1-v^2/c_2^2})]^{1/2} \\ R(v) &= 4\sqrt{1-v^2/c_1^2}\sqrt{1-v^2/c_2^2} - (2-v^2/c_2^2)^2 \end{aligned}$$

Там же приведена зависимость от v/c_2 (кривая 3, μ — модуль сдвига) [1, 2, 4]:

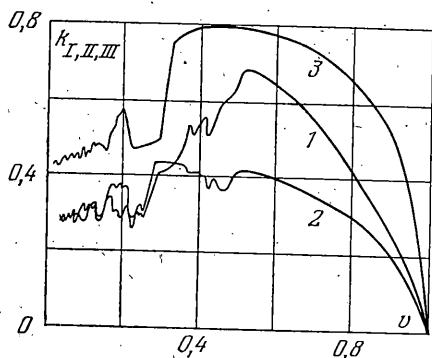
$$K_{III} / \sqrt{2\mu} T_0 = (\sqrt{1-v^2/c_2^2}/k_{III}(v))^{1/2}$$



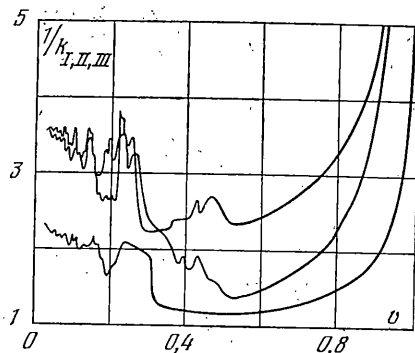
Фиг. 3

Кривые 4-6 показывают те же зависимости, но после замены T_0 на T ($k(v)=1$). На фиг. 4, 5 представлены зависимости $k(v)$, $1/k(v)$ для задач I, II, III, пронумерованные в том же порядке.

По поводу представленных зависимостей можно заметить следующее. «Глобальные» черты кривых для всех трех задач по существу одинаковы: величина $1/k(v)$, а следовательно, и энергия, исчезающая на макроуровне при $T_0 = \text{const}$, имеет минимум при $(0,3-0,5) c_2$. Отсюда следует, что медленное распространение трещины в хрупком материале (по крайней мере, рассматриваемой структуры) неустойчиво. Общий характер кривых $1/k(v)$ оказался тем же, что и принятый в [10] для объяс-



Фиг. 4



Фиг. 5

нения причины колебаний в скорости трещины при достаточно медленном ее расклинивании. Таким образом, наличие ветви, где $dT/dv < 0$, обусловлено не только уменьшением энергии пластических деформаций с ростом скорости трещины, но и изменением интенсивности оттока энергии, связанного со структурой материала.

Обратим внимание еще на одно обстоятельство. В опытах со стеклянными колбами Гриффитс [11] получил значение $T=T^*$, примерно в три раза большее, чем определенное им экстраполяцией значение поверхностной энергии (см. [4, с. 83]). Если принять в качестве поверхностной энергии T_0 и учесть, что для квазистатики $1/k_{III}(v) \approx 2,4$ (задача III) [1], $1/k_{I, II}(v) \approx 3,6$ (задачи I, II) — см. фиг. 5, то получим значение T , лишь на 20% отличающееся от найденного экспериментально. В этом смысле влияние структуры (данного типа) трудно отличить от влияния пластичности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Слепян Л. И. Динамика трещины в решетке.— Докл. АН СССР, 1981, т. 258, № 3, с. 561-564.
2. Слепян Л. И. Антиплоская задача о трещине в решетке.— Изв. АН СССР. МТТ, 1982, № 5, с. 101-115.
3. Новожилов В. В. Теория упругости. Л.: Судпромгиз, 1958. 370 с.
4. Слепян Л. И. Механика трещин. Л.: Судостроение, 1981. 295 с.
5. Слепян Л. И., Яковлев Ю. С. Интегральные преобразования в нестационарных задачах механики. Л.: Судостроение, 1980. 344 с.
6. Бологовский Б. М., Столяров С. Н. О принципах излучения в среде с дисперсией.— В кн.: Проблемы теоретической физики. М.: Наука, 1972, с. 267-280.
7. Воронич И. И., Бабешко В. А. Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1979. 319 с.
8. Слепян Л. И. Распространение трещины при высокочастотных колебаниях решетки.— Докл. АН СССР, 1981, т. 260, № 3, с. 566-569.
9. Слепян Л. И. О связи между решениями смешанных динамических задач для сплошной упругой среды и решетки.— Докл. АН СССР, 1982, т. 266, № 3, с. 581-584.
10. Баренблатт Г. И., Салганик Р. Л. О расклинивании хрупких тел. Автоколебания при расклинивании.— ПММ, 1963, т. 27, вып. 3, с. 436-449.
11. Griffith A. A. The phenomena of rupture and flow in solids.— Philos. Trans. Roy. Soc., London, Ser. A., 1920, v. 221, p. 163-198.

Новосибирск, Ленинград

Поступила в редакцию
30.IX.1982