

УДК 539.375

ПРЯМОЛИНЕЙНАЯ ТРЕЩИНА В ПРЕДВАРИТЕЛЬНО НАПРЯЖЕННОМ УПРУГОМ ТЕЛЕ

АЛЕКСАНДРОВ В. М., ФИЛИПОВА Л. М.

Рассматривается задача о нагружении равномерным давлением берегов прямолинейной трещины в предварительно растянутой или сжатой по направлению трещины плоскости из нелинейно-упругого материала Муни. Решение найдено приведением задачи к парному интегральному уравнению. Проанализировано влияние предварительного нагружения на поле перемещений и напряжений вблизи концов трещины. Применение определяющего соотношения в форме Муни обусловлено, с одной стороны, тем, что такая конкретизация модели материала позволила детально исследовать поле напряжений вблизи трещины, а с другой — тем, что качественные особенности решений задачи в классе изотропных материалов слабо зависят от выбора формы упругого потенциала.

Другими методами задачи о трещинах в телах с начальными напряжениями рассматривались в [1, 2].

1. Допустим, что плоскость из несжимаемого материала Муни [3, 4], ослабленная бесконечно тонкой прямолинейной трещиной, расположенной в направлении оси абсцисс, подвергается плоской деформации, обусловленной равномерной нагрузкой, приложенной на бесконечности и действующей в направлении трещины. Очевидно, что при таком нагружении наличие трещины не сказывается, т. е. решением поставленной задачи является однородная деформация и однородное поле напряжений

$$t_{11}=G(\lambda^2-\lambda^{-2}), \quad t_{22}=t_{12}=0, \quad G=2(C_1+C_2) \quad (1.1)$$

Здесь C_1, C_2 — постоянные материалы Муни, G — модуль сдвига, λ — коэффициент растяжения материальных волокон в направлении оси абсцисс (при сжатии $\lambda < 1$); использовано уравнение состояния материала Муни [3, 4] применительно к случаю плоской деформации.

На описанную конечную деформацию накладывается малая плоская деформация, вызванная нагружением берегов трещины равномерным давлением интенсивности p . В силу предположения о малости добавочной деформации последнюю задачу рассмотрим в линеаризованной постановке.

Заметим, что суперпозиция решений сформулированной задачи и задачи об однородной малой деформации в предварительно напряженной плоскости без трещины, возникающей при действии равномерной растягивающей в направлении оси ординат нагрузки p , дает решение о раскрытии трещины с незагруженными берегами силами, приложенными на бесконечности.

Используя общие соотношения теории малых деформаций, наложенных на конечную [3, 4], получим линеаризованные уравнения плоской деформации тела Муни для рассматриваемого напряженного состояния в виде

$$\partial\theta_{11}/\partial x + \partial\theta_{21}/\partial y = 0, \quad \partial\theta_{12}/\partial x + \partial\theta_{22}/\partial y = 0 \quad (1.2)$$

$$\theta_{11} = [2C_1(\lambda^2 + \lambda^{-2}) + 2C_2(3\lambda^{-2} - \lambda^2)] \frac{\partial u}{\partial x} + q \quad (1.3)$$

$$\begin{aligned}\theta_{12} &= G \left(\lambda^2 \frac{\partial v}{\partial x} + \lambda^{-2} \frac{\partial u}{\partial y} \right), \quad \theta_{21} = G \lambda^{-2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\ \theta_{22} &= (4C_1 \lambda^{-2} + 4C_2 \lambda^2) \frac{\partial v}{\partial y} + q, \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0\end{aligned}\quad (1.4)$$

Здесь x, y — декартовы координаты в предварительно растянутой (или сжатой) плоскости, u, v — перемещения в направлении соответственно осей x и y , q — добавочное давление.

Добавочные истинные напряжения $\sigma_{\alpha\beta}$, т. е. обусловленные малой деформацией приращенные компоненты тензора напряжений Коши, выражаются так:

$$\sigma_{11} = \theta_{11} + G(\lambda^2 - \lambda^{-2}) \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \sigma_{12} = \sigma_{21} = \theta_{12}, \quad \sigma_{22} = \theta_{22} \quad (1.5)$$

Используя уравнение несжимаемости (1.4), из (1.3) найдем

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\theta_{11} - \theta_{22}}{G(\lambda^2 + 3\lambda^{-2})}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\theta_{22} - \theta_{11}}{G(\lambda^2 + 3\lambda^{-2})} \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{\theta_{12} - \theta_{21}}{G(\lambda^2 - \lambda^{-2})}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\lambda^4 \theta_{21} - \theta_{12}}{G(\lambda^2 - \lambda^{-2})}\end{aligned}\quad (1.6)$$

Исключив из (1.6) перемещения, придем к уравнениям совместности

$$\begin{aligned}(\lambda^2 - \lambda^{-2}) \frac{\partial (\theta_{11} - \theta_{22})}{\partial y} &= (\lambda^2 + 3\lambda^{-2}) \frac{\partial}{\partial x} (\lambda^4 \theta_{21} - \theta_{12}) \\ (\lambda^2 + 3\lambda^{-2}) \frac{\partial (\theta_{12} - \theta_{21})}{\partial y} &= (\lambda^2 - \lambda^{-2}) \frac{\partial (\theta_{22} - \theta_{11})}{\partial x}\end{aligned}\quad (1.7)$$

Поставленная выше задача о трещине эквивалентна задаче решения системы уравнений (1.2), (1.7) в полуплоскости $y \geq 0$ при следующих граничных условиях в точках $y=0$:

$$\theta_{21} = 0 \quad (-\infty < x < \infty); \quad \theta_{22} = -p \quad (|x| < a); \quad v = 0 \quad (|x| > a) \quad (1.8)$$

Здесь $2a$ — длина трещины в начальном деформированном состоянии.

Сначала рассмотрим вспомогательную задачу, для которой граничные условия имеют вид $\theta_{21} = 0, \theta_{22} = t(x)$ при $y=0$.

Применив преобразование Фурье, получим решение вспомогательной задачи

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}} \theta_{11} = \frac{2(1+\lambda^4)}{L(\lambda)} \int_0^\infty \bar{t}(\omega) (e^{-\omega y} - \lambda^2 e^{-\lambda^2 \omega y}) \cos \omega x d\omega \quad (1.9)$$

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}} \theta_{12} = -\frac{1}{L(\lambda)} \int_0^\infty \bar{t}(\omega) [(1+\lambda^4)^2 e^{-\omega y} - 4\lambda^4 e^{-\lambda^2 \omega y}] \sin \omega x d\omega$$

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}} \theta_{21} = \frac{2(1+\lambda^4)}{L(\lambda)} \int_0^\infty \bar{t}(\omega) (e^{-\lambda^2 \omega y} - e^{-\omega y}) \sin \omega x d\omega$$

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}} \theta_{22} = \frac{1}{L(\lambda)} \int_0^\infty \bar{t}(\omega) [4\lambda^2 e^{-\lambda^2 \omega y} - (1+\lambda^4)^2 e^{-\omega y}] \cos \omega x d\omega$$

$$\bar{t}(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty t(x) \cos \omega x dx, \quad L(\lambda) = 4\lambda^2 - (1+\lambda^4)^2$$

Из (1.6), (1.9) находим перемещения точек плоскости

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}} u = \frac{\lambda^2}{GL(\lambda)} \int_0^{\infty} \frac{\bar{t}(\omega)}{\omega} [(1+\lambda^4)e^{-\omega y} - 2\lambda^2 e^{-\lambda^2 \omega y}] \sin \omega x d\omega$$

(1.10)

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}} v = \frac{\lambda^2}{GL(\lambda)} \int_0^{\infty} \frac{\bar{t}(\omega)}{\omega} [(1+\lambda^4)e^{-\omega y} - 2e^{-\lambda^2 \omega y}] \cos \omega x d\omega$$

Граничные условия (1.8) задачи о трещине приводят к парному интегральному уравнению для функции $\bar{t}(\omega)$:

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \bar{t}(\omega) \cos \omega x d\omega = -p \quad (|x| < a), \quad \int_0^{\infty} \bar{t}(\omega) \cos \omega x d\omega = 0 \quad (|x| > a)$$

(1.11)

Решение уравнения (1.11) имеет вид [5]: $\bar{t}(\omega) = \sqrt{\pi/2} p a J_1(\omega a)$, где J_1 — функция Бесселя. Подставив это условие в (1.9), (1.10) и используя [6], получим искомое решение задачи о трещине

$$u = -\frac{\lambda^2 p}{GL(\lambda)} [(1-\lambda^2)^2 x + (1+\lambda^4) \operatorname{Im} \sqrt{a^2 - z^2} - 2\lambda^2 \operatorname{Im} \sqrt{a^2 - z_1^2}]$$

(1.12)

$$v = -\frac{\lambda^2 p}{GL(\lambda)} [-(1-\lambda^2)^2 y + (1+\lambda^4) \operatorname{Re} \sqrt{a^2 - z^2} - 2 \operatorname{Re} \sqrt{a^2 - z_1^2}]$$

$$\theta_{11} = \frac{-2(1+\lambda^4)p}{L(\lambda)} \left[1 - \lambda^2 + \operatorname{Re} \left(\frac{iz}{\sqrt{a^2 - z^2}} - \frac{i\lambda^2 z_1}{\sqrt{a^2 - z_1^2}} \right) \right]$$

$$\theta_{12} = \frac{p}{L(\lambda)} \operatorname{Im} \left[\frac{i(1+\lambda^4)^2 z}{\sqrt{a^2 - z^2}} - \frac{4i\lambda^4 z_1}{\sqrt{a^2 - z_1^2}} \right]$$

$$\theta_{21} = \frac{2(1+\lambda^4)p}{L(\lambda)} \operatorname{Im} \left(\frac{iz}{\sqrt{a^2 - z^2}} - \frac{iz_1}{\sqrt{a^2 - z_1^2}} \right)$$

$$\theta_{22} = \frac{p}{L(\lambda)} \left\{ -L(\lambda) + \operatorname{Re} \left[\frac{i(1+\lambda^4)^2 z}{\sqrt{a^2 - z^2}} - \frac{4i\lambda^2 z_1}{\sqrt{a^2 - z_1^2}} \right] \right\}$$

$$z = x + iy, \quad z_1 = x + i\lambda^2 y$$

2. Решение (1.12) задачи о равномерно нагруженной трещине в предельно напряженной плоскости можно представить в более удобной форме, если ввести в плоскости с разрезом от точки $x=a$ до точки $x=-a$ две системы эллиптических координат (α, β) и (α_1, β_1) :

$$\begin{aligned} z &= a \operatorname{ch}(\alpha + i\beta), & z_1 &= a \operatorname{ch}(\alpha_1 + i\beta_1), & x &= a \operatorname{ch} \alpha \cos \beta, \\ x &= a \operatorname{ch} \alpha_1 \cos \beta_1, & y &= a \operatorname{sh} \alpha \sin \beta, & \lambda^2 y &= a \operatorname{sh} \alpha_1 \sin \beta_1 \end{aligned}$$

(2.1)

Значению $\alpha = \alpha_1$ соответствуют указанный выше разрез, на верхнем берегу которого $0 \leq \beta \leq \pi$, $0 \leq \beta_1 \leq \pi$, на нижнем — $\pi < \beta < 2\pi$, $\pi \leq \beta_1 \leq 2\pi$. Со-

гласно (2.1), вместо (1.12) получим

$$u = -\frac{\lambda^2 p a}{GL(\lambda)} [(1-\lambda^2)^2 \operatorname{ch} \alpha \cos \beta - (1+\lambda^4) \operatorname{sh} \alpha (\cos \beta + 2\lambda^2 \operatorname{sh} \alpha_1 \cos \beta_1)] \quad (2.2)$$

$$v = -\frac{\lambda^2 p a}{GL(\lambda)} [-(1-\lambda^2)^2 \operatorname{sh} \alpha \sin \beta + (1+\lambda^4) \operatorname{ch} \alpha \sin \beta - 2 \operatorname{ch} \alpha_1 \sin \beta_1]$$

$$\theta_{11} = -\frac{2(1+\lambda^4)}{L(\lambda)} (1-\lambda^2 - \Delta \operatorname{sh} \alpha \operatorname{ch} \alpha + \lambda^2 \Delta_1 \operatorname{sh} \alpha_1 \operatorname{ch} \alpha_1)$$

$$\theta_{12} = \sigma_{12} = \frac{P}{L(\lambda)} [(1+\lambda^4)^2 \Delta \sin \beta \cos \beta - 4\lambda^4 \Delta_1 \sin \beta_1 \cos \beta_1]$$

$$\theta_{21} = \frac{2(1+\lambda^4) p}{L(\lambda)} (\Delta \sin \beta \cos \beta - \Delta_1 \sin \beta_1 \cos \beta_1)$$

$$\sigma_{22} = \theta_{22} = \frac{P}{L(\lambda)} [-L(\lambda) - (1+\lambda^4)^2 \Delta \operatorname{sh} \alpha \operatorname{ch} \alpha + 4\lambda^2 \Delta_1 \operatorname{sh} \alpha_1 \operatorname{ch} \alpha_1]$$

$$\sigma_{11} = \frac{P}{L(\lambda)} [4\lambda^2 - (1+\lambda^4)^2 + (1+\lambda^4)^2 \Delta \operatorname{sh} \alpha \operatorname{ch} \alpha - 4\lambda^6 \Delta_1 \operatorname{sh} \alpha_1 \operatorname{ch} \alpha_1]$$

$$\Delta = (\operatorname{sh}^2 \alpha + \sin^2 \beta)^{-1}, \quad \Delta_1 = (\operatorname{sh}^2 \alpha_1 + \sin^2 \beta_1)^{-1}$$

При переходе от (1.12) к (2.2) выбор ветви квадратного корня однозначно определяется условием затухания решения при $\alpha \rightarrow \infty$. В (2.2) использованы представления для добавочных напряжений (1.5).

Для перемещений берегов трещины из (2.2) при $\alpha_1 = \alpha = 0$ получим

$$u = -\frac{\lambda^2 (1-\lambda^2)^2 p x}{GL(\lambda)} = \frac{\lambda^2 (\lambda^2 - 1) p x}{GK(\lambda)} \quad (2.3)$$

$$v = \pm \frac{\lambda^2 (1-\lambda^4) p \sqrt{a^2 - x^2}}{GL(\lambda)} = \pm \frac{\lambda^2 (1+\lambda^2) p \sqrt{a^2 - x^2}}{GK(\lambda)}$$

$$K(\lambda) = \lambda^6 + \lambda^4 + 3\lambda^2 - 1$$

Здесь верхний знак перед радикалом соответствует верхнему берегу трещины, нижний — нижнему берегу. При $\lambda = 1$ выражения (2.3) переходят в известное [5] решение задачи о трещине в ненапряженном теле (для коэффициента Пуассона, равного 0,5, поскольку материал несжимаем): $u = 0$, $v = \pm p (a^2 - x^2)^{1/2} / 2G$.

Как видно из (2.3), наличие начального одноосного напряжения в теле приводит к появлению горизонтальных смещений на контуре трещины, раздвигаемой равномерным давлением.

Уравнение $K(\lambda) = 0$ имеет единственный действительный корень $\lambda^* \approx 0,545$. При $\lambda \rightarrow \lambda^*$ перемещения на контуре трещины неограниченно возрастают. Это означает, что при $\lambda \leq \lambda^*$ однородное напряженно-деформированное состояние сжатой плоскости с трещиной неустойчиво. Как отмечено в [2], значение $(\lambda^* - 1)$ совпадает с величиной критической деформации, при которой наступает неустойчивость полуплоскости, сжатой вдоль границы.

Для анализа поля добавочных перемещений и напряжений вблизи конца трещины $x = a$ введем полярные координаты

$$x + iy = a(1 + \rho e^{i\varphi}), \quad x + i\lambda^2 y = a(1 + \rho_1 e^{i\varphi_1}) \quad (2.4)$$

$$(-\pi < \varphi < \pi) \quad (-\pi < \varphi_1 < \pi)$$

Из (2.4) нетрудно получить соотношения

$$\begin{aligned}\rho_1 &= \rho (\cos^2 \varphi + \lambda^4 \sin^2 \varphi)^{1/2} \\ \sin \frac{\varphi_1}{2} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\operatorname{sign} \varphi) [1 - (\cos^2 \varphi + \lambda^4 \sin^2 \varphi)^{-1/2} \cos \varphi]^{1/2} \\ \cos \frac{\varphi_1}{2} &= \frac{1}{\sqrt{2}} [1 + (\cos^2 \varphi + \lambda^4 \sin^2 \varphi)^{-1/2} \cos \varphi]^{1/2}\end{aligned}\quad (2.5)$$

Обращая функции (2.1) при помощи ряда Бурмана — Лагранжа [7], будем иметь

$$\begin{aligned}\alpha + i\beta &= \operatorname{arch} (1 + \rho e^{i\varphi}) = \sqrt{2\rho} e^{i\varphi/2} + O(\rho) \\ \alpha &= \sqrt{2\rho} \cos^{1/2} \varphi + O(\rho), \quad \beta = \sqrt{2\rho} \sin^{1/2} \varphi + O(\rho) \\ \alpha_1 &= \sqrt{2\rho_1} \cos^{1/2} \varphi_1 + O(\rho), \quad \beta_1 = \sqrt{2\rho_1} \sin^{1/2} \varphi_1 + O(\rho)\end{aligned}\quad (2.6)$$

Из (2.2) и (2.6) получаем распределение перемещений и напряжений в окрестности вершины трещины

$$\begin{aligned}u &= \frac{\lambda^2 pa}{GL(\lambda)} \left[-(1 - \lambda^2)^2 + (1 + \lambda^4) \sqrt{2\rho} \cos \frac{\varphi}{2} - 2\lambda^2 \sqrt{2\rho_1} \cos \frac{\varphi_1}{2} \right] + O(\rho) \\ v &= \frac{\lambda^2 pa}{GL(\lambda)} \left[-(1 + \lambda^4) \sqrt{2\rho} \sin \frac{\varphi}{2} + 2\sqrt{2\rho_1} \sin \frac{\varphi}{2} \right] + O(\rho) \\ \sigma_{11} &= \frac{p}{L(\lambda)} \left[(1 + \lambda^4)^2 (2\rho)^{-1/2} \cos \frac{\varphi}{2} - 4\lambda^6 (2\rho_1)^{-1/2} \cos \frac{\varphi_1}{2} \right] + O(1) \\ \sigma_{12} &= \frac{p}{L(\lambda)} \left[(1 + \lambda^4)^2 (2\rho)^{-1/2} \sin \frac{\varphi}{2} - 4\lambda^4 (2\rho_1)^{-1/2} \sin \frac{\varphi_1}{2} \right] + O(\sqrt{\rho}) \\ \sigma_{22} &= \frac{p}{L(\lambda)} \left[-(1 + \lambda^4)^2 (2\rho)^{-1/2} \cos \frac{\varphi}{2} + 4\lambda^2 (2\rho_1)^{-1/2} \cos \frac{\varphi_1}{2} \right] + O(1)\end{aligned}\quad (2.7)$$

После подстановки в (2.7) выражений (2.5) получаются явные представления перемещений и напряжений вблизи острия трещины как функций координат ρ, φ .

Выполнив в формулах (2.7) предельный переход при $\lambda \rightarrow 1$, т. е. устранив начальную деформацию, приходим к известному [8] распределению перемещений и напряжений около конца трещины в теле без начальных напряжений

$$\begin{aligned}u &= \frac{pa\sqrt{\rho}}{G\sqrt{2}} \cos \frac{\varphi}{2} \sin^2 \frac{\varphi}{2} + O(\rho), \\ v &= \frac{pa\sqrt{\rho}}{G\sqrt{2}} \sin^3 \frac{\varphi}{2} + O(\rho) \\ \sigma_{11} &= \frac{p}{\sqrt{2\rho}} \cos \frac{\varphi}{2} \left(1 - \sin \frac{\varphi}{2} \sin \frac{3\varphi}{2} \right) + O(1) \\ \sigma_{12} &= \frac{p}{\sqrt{2\rho}} \cos \frac{\varphi}{2} \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{3\varphi}{2} + O(\sqrt{\rho}) \\ \sigma_{22} &= \frac{p}{\sqrt{2\rho}} \cos \frac{\varphi}{2} \left(1 + \sin \frac{\varphi}{2} \sin \frac{3\varphi}{2} \right)\end{aligned}\quad (2.8)$$

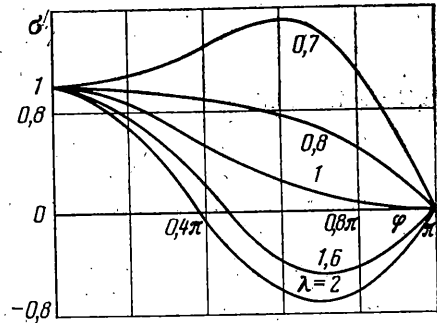
Формулы (2.7), (2.8) показывают, что начальное растяжение или сжатие тела вдоль трещины не меняет порядка особенности напряжений в конце трещины.

Вместе с тем начальная деформация существенно влияет на характер распределения напряжений вокруг вершины. Рассмотрим, например, нормальное напряжение отрыва на площадке, расположенной под углом φ к оси абсцисс

$$\sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_{11} \sin^2 \varphi - \sigma_{12} \sin 2\varphi + \sigma_{22} \cos^2 \varphi \quad (2.9)$$

На фигуре представлена вычисленная по формулам (2.5), (2.7), (2.9) зависимость $\sigma(\varphi) = p^{-1} \sqrt{2\rho} \cdot \sigma_{\varphi\varphi}|_{\rho=0}$ при различных значениях параметра начальной деформации λ . График показывает, что при достаточно сильном начальном сжатии максимум нормального напряжения отрыва реализуется не на продолжении линии трещины, как в задаче без учета начальных напряжений, а на площадке, расположенной под некоторым углом к линии трещины.

Это указывает на возможность распространения трещины в направлении, не совпадающем с первоначальной линией трещины.



ЛИТЕРАТУРА

1. Гузь А. Н. Теория трещин в упругих телах с начальными напряжениями (трещины сдвига, предельные случаи).— Прикл. механика, 1981, № 1, с. 3–13.
2. Гузь А. Н. Теория трещин в упругих телах с начальными напряжениями (высокоэластичные материалы).— Прикл. механика, 1981, № 2, с. 11–21.
3. Лурье А. И. Теория упругости. М.: Наука, 1970. 939 с.
4. Лурье А. И. Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 512 с.
5. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
6. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1963. 1100 с.
7. Гурвич А., Курант Р. Теория функций. М.: Наука, 1968. 648 с.
8. Разрушение. Т. 2. М.: Мир, 1975. 764 с.

Москва, Ростов-на-Дону

Поступила в редакцию
23.III.1982