**МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 2 · 1984**

УДК 539.3:548.4

МИКРОМЕХАНИКА СРЕДЫ С АНСАМБЛЯМИ ДЕФЕКТОВ ТРАНСЛЯЦИОННО-ПОВОРОТНОГО ТИПА

ЛИХАЧЕВ В. А., ШУДЕГОВ В. Е.

Кристаллическая среда, содержащая кроме трансляционных дислокаций еще и дисклинации, вызывает конечную кривизну Римана – Кристоффеля [1]. Как показано в [1–3], при описании трехмерного пространства с такой кривизной целесообразно обращение к шестимерному пространству моторов, три измерения которого относятся к трансляционным движениям в сплошной среде, а три других – к поворотным. Моторное исчисление уже применяют в прикладных задачах механики [1–6].

В публикуемой работе показана эффективность использования моторного исчисления для анализа разнообразных явлений в сплошной среде с ансамблями дефектов трансляционно-поворотного типа. Техника вычислений в пространстве моторов изложена в [1–3].

Мотор M, образованный силовой $\mathbf{A}$ и моментной $\mathbf{B}$ составляющими, условимся обозначать как $M^m(\mathbf{A}, \mathbf{B})$, где верхний индекс m указывает на принадлежность M к классу моторов. В соответствии с [1–3] за определение абсолютного дифференциала мотора примем равенство $DM^m(\mathbf{A}, \mathbf{B})=M^m(d\mathbf{A}, d\mathbf{B}+d\mathbf{r}\times\mathbf{B})$, где $\mathbf{r}$ – радиус-вектор. Из этого определения вытекают все основные операции над моторами. Отметим, что $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$, как и образованные из них моторы, могут быть любой валентности.

1. Моторы перемещения и дисторсии элементов среды. При введении в кристалл дефектов элементы среды испытывают два типа движений — трансляции $\mathbf{u}$ и повороты $\mathbf{\Omega}$. Как следует из [1–3], они образуют мотор $W^m(\mathbf{\Omega}, \mathbf{u})$, который назовем мотором перемещения, относя его к произвольному континууму Коссера. Для характеристики относительных смещений и поворотов введем понятие мотор-тензорной дисторсии $\chi^m(\varkappa, \varepsilon)$, как градиент мотора перемещений, т. е.

$$\chi_{ik}{}^m(\varkappa, \varepsilon)=\nabla_i W_k{}^m(\mathbf{\Omega}, \mathbf{u}), \quad \varepsilon_{ik}=e_{ik}+\omega_{ik}-\Omega_{ik} \tag{1.1}$$

$$e_{ik}={}^1/_2(\nabla_i u_k+\nabla_k u_i), \quad \omega_{ik}={}^1/_2(\nabla_i u_k-\nabla_k u_i), \quad \varkappa_{ik}=\nabla_i\Omega_k$$

Здесь $\varkappa_{ik}$ — изгиб-кручение, ε_{ik} — деформация в понятии континуума Коссера, Ω_{ik} — тензор поворота, с которым ассоциирован псевдовектор $\mathbf{\Omega}$.

Когда $\chi^m(\varkappa, \varepsilon)=0$, деформация среды отсутствует, так как поле моторов постоянно и все они параллельны. Следовательно, чем больше мотор-дисторсии отличаются от нуля, тем сильнее деформирована среда.

Из (1.1) и равенства нулю ротора любого градиента мотора вытекает условие совместности (интегрируемости) для мотор-дисторсии

$$e_{ipq}\nabla_p\chi_{qk}{}^m(\varkappa, \varepsilon)=0 \tag{1.2}$$

Оно равноценно требованиям: $e_{ipq}\nabla_p\varkappa_{qk}=0$, $e_{ipq}\nabla_p\varepsilon_{qk}+\varkappa_{pp}\delta_{ik}-\varkappa_{ki}=0$. Здесь e_{ipq} — тензор Леви-Чивиты, δ_{ik} — символ Кронекера.

2. Мотор-тензорная плотность дефектов. Как следует из ряда работ, например [7], полные деформации ε_{ik} и изгиб-кручение $\varkappa_{ik}$ могут быть представлены в виде суммы их упругих $(\varepsilon_{ik}{}^e, \varkappa_{ik}{}^e)$ и пластических $(\varepsilon_{ik}{}^p, \varkappa_{ik}{}^p)$ составляющих. Следовательно, и полная мотор-дисторсия $\chi^m(\varkappa, \varepsilon)$ допускает такое разделение

$$\chi^m(\varkappa, \varepsilon)={}^e\chi^m(\varkappa, \varepsilon)+{}^p\chi^m(\varkappa, \varepsilon) \tag{2.1}$$

где ${}^p\chi^m(\varkappa, \varepsilon)$ и ${}^e\chi^m(\varkappa, \varepsilon)$ — пластическая и упругая мотор-дисторсии, которые, очевидно, порознь уже не обязательно удовлетворяют условию совместности.

Примем в качестве определения мотор-тензорной плотности дефектов $\gamma^m(\theta, \alpha)$ меру отклонения пластической составляющей мотор-дисторсии от условий совместности (1.2), т. е. полевое уравнение

$$\gamma_{ik}{}^m(\theta, \alpha)=e_{ipl}\nabla_p{}^p\chi_{lk}{}^m(\varkappa, \varepsilon) \qquad (2.2)$$

По этому определению $\theta_{ik}=e_{iql}\nabla_q\varkappa_{lk}{}^p$ есть плотность дисклинаций, а $\alpha_{ik}=e_{iql}\nabla_q\varepsilon_{lk}{}^p+\varkappa_{ll}{}^p\delta_{ik}-\varkappa_{ki}$ — плотность дислокаций. Поскольку α и θ образуют мотор, в среде с дисклинациями невозможно введение тензора плотности дислокации независимо от дисклинаций. Кроме того, в случае некоссеровской среды, когда $\Omega_{ik}=\omega_{ik}$, (2.2) отвечает общепринятому введению понятия дефектов [7].

Предположение ${}^p\chi^m(\varkappa, \varepsilon)\neq0$ не означает существование (интегрируемость) пластического мотора перемещения ${}^pW^m(\mathbf{\Omega}, \mathbf{u})$, поскольку в противном случае выполнялись бы соотношения ${}^p\chi_{ik}{}^m(\varkappa, \varepsilon)=\nabla_i{}^pW_k{}^m(\mathbf{\Omega}, \mathbf{u})$ и $\gamma_{ik}{}^m(\theta, \alpha)=e_{iql}\nabla_q\nabla_l{}^pW_k{}^m(\mathbf{\Omega}, \mathbf{u})=0$, что противоречит требованию $\gamma^m(\theta, \alpha)\neq0$. Иными словами, в среде, содержащей трансляционно-поворотные дефекты, не существуют ни пластические дисторсии $\beta_{ik}{}^p$, ни пластические повороты $\Omega_{ik}{}^p$, ни пластические смещения $u_{ik}{}^p$. Лишь при отсутствии дисклинаций $\beta_{ik}{}^p$ и $\Omega_{ik}{}^p$ интегрируемы. Данное замечание позволяет понять причину определения тензора плотности дислокаций через (2.2), а не как обычно с помощью равенства $\alpha_{ik}=e_{iql}\nabla_q\beta_{lk}{}^p$. Однако при $\theta_{ik}=0$, учитывая существование полей $\beta_{ik}{}^p$ и $\Omega_{ik}{}^p$, имеем $\varkappa_{ii}{}^p\delta_{ik}-\varkappa_{ik}{}^p=e_{iql}\nabla_q\Omega_{lk}{}^p$, $\varepsilon_{ik}{}^p=\beta_{ik}{}^p-\Omega_{ik}{}^p$, откуда $\alpha_{ik}=e_{iql}\nabla_q\varepsilon_{ik}{}^p$. В результате оба названные определения совпадают.

Изолированные дефекты в данном подходе удается описать либо уменьшением области усреднения (2.2) до единичного дефекта, либо введением мотор-тензорной плотности дискретных дефектов $\gamma^m(\mathbf{\Phi}, \mathbf{B})$ через диадное произведение орта касательной $\mathbf{l}$ к линии дефекта L и характеристического мотора $M^m(\mathbf{\Phi}, \mathbf{B})$, т. е. $\mathbf{l}M^m(\mathbf{\Phi}, \mathbf{B})\delta(L)$, где $\mathbf{\Phi}$ — вектор Франка дисклинаций, $\mathbf{B}$ — общий вектор Бюргерса дислокаций и дисклинаций, $\delta(L)$ — обобщенная дельта-функция. Можно показать, что $\gamma^m(\theta, \alpha)$ и $\gamma^m(\mathbf{\Phi}, \mathbf{B})$ при соответствующем изменении области усреднения переходят одна в другую.

3. Скомпенсированные ансамбли дефектов. Мотор-тензорная плотность дефектов в (2.2) существенно зависит от области усреднения дисторсии и характеризует лишь общий механический заряд системы, т. е. превышение дефектов одного знака над другими в выбранном объеме усреднения. Те дефекты, которые создают «нейтральный механический заряд», в (2.2) не учитываются. Между тем, во многих задачах, например при расчете приращения пластической деформации, связанной с движением дефектов, последние часто играют преобладающую роль по сравнению с нескомпенсированными.

«Нейтральный заряд» в рамках данного подхода можно учесть различными способами, например введением мотор-тензорной плотности непрерывно распределенных бесконечно малых петель дефектов $\delta^m(\xi, \nu)$, связанной с $\gamma^m(\theta, \alpha)$ соотношением

$$\gamma_{ik}{}^m(\theta, \alpha)=e_{ipq}\nabla_p\delta_{qk}{}^m(\xi, \nu) \qquad (3.1)$$

где ξ_{ik}, ν_{ik} — соответственно тензоры плотности петель дисклинаций и дислокаций, либо используя представление о мотор-тензорной плотности диполей дефектов $Q^m(\theta, \alpha)$, выражающейся через зарядовую плотность $\gamma^m(\theta, \alpha)$ и характеристическое плечо диполя $\mathbf{q}$:

$$Q_{ik}{}^m(\theta, \alpha)=q_l[\nabla_l\gamma_{ik}{}^m(\theta, \alpha)] \qquad (3.2)$$

Очевидно, что любой способ разбиения дефектов на два отмеченных выше сорта только по «зарядовому» признаку является условным. Более того, часто феноменологически такое разделение, по-видимому, и невозможно без специальных предположений. Однако, если дефектная структура кристалла известна, например из электронно-микроскопических наблюдений, всегда есть однозначный способ указать реально существующие количество и сорт дефектов, включая их знаки, геометрию расположения, плотность петель и т. д. При одновременном присутствии линейных дефектов, диполей и петель следует в расчетах использовать сумму, включающую (2.2), (3.1), а при необходимости и (3.2). Далее это правило будем применять без оговорок.

4. Условия сохранения для $\gamma^m(\theta, \alpha)$ и $\delta^m(\xi, \nu)$. Связь дислокаций и дисклинаций, определяемая тем, что они образуют моторы, обуславливает ряд кинематических свойств дислокационно-дисклинационного континуума. Так, если мотор-тензорная плотность дефектов не меняется во времени, т. е. $\dot{\gamma}^m(\theta, \alpha)=0$ (точка означает дифференцирование по времени), сразу получаем два уравнения: $\dot{\theta}_{ik}=0$ и $\dot{\alpha}_{ik}=e_{kpq}v_q\theta_{ip}$, где $\mathbf{v}$ — скорость перемещения дефектов. Последнее равенство показывает, что дисклинации, движущиеся не вдоль вектора поворота, порождают дислокации. Это обстоятельство было известно и ранее [8], но доказывалось довольно сложным способом.

Из определения $\delta^m(\xi, \nu)$ вытекает, что сохранение во времени мотор-тензорной плотности петель дефектов эквивалентно требованиям $\dot{\xi}_{ik}=0$ и $\dot{\nu}_{ik}=e_{kpq}v_q\xi_{ip}$. Иными словами, движущиеся петли дисклинаций порождают петли дислокаций, что, действительно, имеет место [9].

Из определения мотор-тензорной плотности дефектов (2.2) и равенства нулю дивергенции ротора мотора получаем условие неразрывности для $\gamma^m(\theta, \alpha)$:

$$\nabla_i\gamma_{ik}^m(\theta, \alpha)=0 \tag{4.1}$$

Оно эквивалентно двум равенствам: $\nabla_i\theta_{ik}=0$ и $\nabla_i\alpha_{ik}+e_{ipq}\theta_{pq}=0$. Отсюда следуют важные выводы о неразрывности линий дисклинаций и о возможности окончания дислокаций на дисклинациях, когда $e_{ipq}\theta_{pq}\neq0$.

5. Мотор-тензорная несовместность и напряженное состояние среды с дефектами. Рассматривая (1.1) в качестве дифференциального уравнения в частных производных относительно мотора перемещения $W^m(\mathbf{\Omega}, \mathbf{u})$, можно видеть, что необходимым условием нахождения поля моторов $W^m(\mathbf{\Omega}, \mathbf{u})$, для которых соотношение (1.1) является мотор-дисторсией, служит выполнение условий совместности для полной мотор-дисторсии (1.2). Если полная мотор-дисторсия представлена в виде (1.1), то уже ее упругая и пластические составляющие не удовлетворяют условиям совместности (1.2). Примем меру отклонения упругих или пластических составляющих мотора дисторсии от условий (1.2) в качестве определения мотор-тензорной несовместности дисторсии $H^m(\mu, \eta)$, где μ_{ik}, η_{ik} — несовместности соответственно для изгибов-кручений и деформаций. Для среды Коссера это фактически сводится к (2.2) или

$$H_{ik}^m(\mu, \eta)=-e_{ipq}\nabla_p{}^e\chi_{qk}^m(\varkappa, \varepsilon) \tag{5.1}$$

В случае обычной среды, понимаемой как некоссеровский континуум, тензор несовместности η_{ik}^e для симметризованной упругой деформации e_{ik}^e целесообразно вводить через общепринятую дифференциальную форму

$$e_{ipq}e_{kmn}\nabla_p\nabla_n e_{qm}^e=\eta_{ik}^e \tag{5.2}$$

Тогда, как обычно, связь между η_{ik}^e, α_{ik} и θ_{ik} может быть записана в виде

$$\eta_{ik}^e={}^1/_2(e_{ipq}\nabla_q\alpha_{kp}+e_{kpq}\nabla_q\alpha_{ip}-\theta_{ik}-\theta_{ki}) \tag{5.3}$$

Мотор-тензор $H^m(\mu, \eta)$ подчиняется естественному требованию

$$\nabla_iH_{ik}^m(\mu, \eta)=0 \tag{5.4}$$

которое равноценно (4.1). При известной мотор-тензорной плотности дефектов $\gamma^m(\theta, \alpha)$ напряженное состояние среды находится из решений системы уравнений, включающей: динамические условия равновесия для мотора напряжений

$$\nabla_i P_{ik}{}^m(\sigma, \tau) = M_k{}^m(\rho u^{\cdot\cdot}, j\Omega^{\cdot\cdot}) \tag{5.5}$$

где σ_{ik}, τ_{ik} — соответственно силовые и моментные напряжения, $M^m(\rho u^{\cdot\cdot}, j\Omega^{\cdot\cdot})$ — мотор инерции, ρ — плотность среды, j — мера инерции при вращении элементов среды; условие несовместности для упругой мотор-дисторсии; реологический закон, связывающий моторы напряжений с мотор-дисторсиями через четырехвалентные тензоры модулей упругости $\overset{1}{E}_{ikjl}, \overset{2}{E}_{ikjl}, \overset{3}{E}_{ikjl}, \overset{4}{E}_{ikjl}$:

$$P_{ik}{}^m(\sigma, \tau) = \chi^m(\overset{1}{E}_{ikjl}\varkappa_{jl} + \overset{2}{E}_{ikjl}\varepsilon_{jl}, \overset{3}{E}_{ikjl}\varkappa_{jl} + \overset{4}{E}_{ikjl}\varepsilon_{jl}) \tag{5.6}$$

Решение названной системы уравнений в статической формулировке, когда $\tau_{ik}=0$, а некоссеровская среда имеет неограниченные размеры с нулевыми условиями на бесконечности, дано в [7].

Естественно, что напряженное состояние кристалла в использованном здесь понятии «дефекта» как источника упругих полей, полностью зависит от определения (2.2), которым ограничен класс рассматриваемых несовершенств. Физическим оправданием (2.2) служит то обстоятельство, что оно отвечает реально существующим дефектам, таким, как дислокации и дисклинации. Любые другие дефекты, ротор от пластической мотор-дисторсии которых равен нулю, не дают вклада в нашем определении в упругие поля и потому здесь не учитываются. Примером служат равномерно распределенные небольшие петли дислокаций или дисклинаций, точечные дефекты и т. д.

6. Эффекты самодействия ансамбля дефектов и понятие квазисреды. Дефекты, входящие в состав ансамбля, находятся в сложном взаимодействии друг с другом, с кристаллической средой и другими дефектами. Ансамбли, в которых любое изменение взаимного расположения дефектов относительно друг друга вызывает появление ответных сил реакции — сил самодействия — будем называть сильно взаимодействующими. Реактивные силы в ансамбле дефектов возникают, например, при сжатии скопления дислокаций одного знака или между элементами одиночной искривленной дислокации.

Корректный учет реактивных сил самодействия невозможен без детализации полей напряжений, окружающих дефекты, и подробных представлений о структуре самого дефекта. Это обычно приводит к необходимости перехода от континуального распределения дефектов к дискретному и, как правило, требует анализа громадного числа параметров задачи, расчет которых чаще всего аналитически неосуществим. Потому детальный теоретический подход в рамках данной континуальной модели оказывается непоследовательным.

Однако ситуация резко упрощается, если произвести качественное разделение всех взаимодействий только на два типа — короткодействующее и дальнодействующее. Условимся считать взаимодействия дефектов короткодействующими, если силы спадают существенно на расстояниях, превышающих сравнимое с типичным расстоянием между дефектами. Если одновременно в теле очень много дефектов и они расположены на расстояниях, много меньших любых размеров тела, будет правильным характеризовать состояние ансамбля внутри некоторого элементарного объема, содержащего много дефектов, как состояние в физической точке. Тогда функциональные свойства ансамбля, вызванные короткодействием, можно описывать при помощи аппарата механики сплошных сред, а сам ансамбль считать квазиконтинуумом, погруженным в кристаллический материал. Поведение квазиконтинуума (квазисреды) теперь будет зависеть от внутренней структуры, внешних по отношению к нему сил и от взаимодействия с кристаллом.

Предположим далее, что взаимодействие на расстояниях больших, в сравнении с только что обсуждавшимся, является дальнодействующим. Эффекты дальнодействия, очевидно, прямо вытекают из характера упругих полей и испытываемых ансамблями сил со стороны полей напряжений.

Изложенные соображения ниже составляют основу методики построения определяющих реологических соотношений дефектного кристалла.

7. Моторы перемещения и дисторсии квазисреды. Приращение мотор-дисторсии. Будем характеризовать движение дефектов в квазиконтинууме двумя формами: трансляцией λ и поворотом φ, которые в общем случае независимы и образуют мотор перемещения $W^m(\varphi, \lambda)$. Поскольку ансамбль дефектов, перемещаясь в кристалле, изменяет свое состояние, мотор $W^m(\varphi, \lambda)$, вообще говоря, может быть функцией состояния. Однако короткодействия в ансамбле прежде всего зависят от относительного движения его элементов. Поэтому введем в рассмотрение дополнительно квазидисторсию $\chi_{ik}{}^m(c, d)=\nabla_i W_k{}^m(\varphi, \lambda)$, обозначив $c_{ik}=\nabla_i\varphi_k$, $d_{ik}=\nabla_i\lambda_k-\nabla_i\varphi_k$. Здесь d_{ik} – квазидеформация и поворот в понятии континуума Коссера, c_{ik} – квазиизгиб-кручение, φ_{ik} – тензор, ассоциируемый с φ.

Из определения $W^m(\varphi, \lambda)$ и равенства нулю ротора от градиента получаем условие интегрируемости для мотора квазидисторсии

$$e_{ipq}\nabla_p\chi_{qk}{}^m(c, d)=0 \tag{7.1}$$

которое для симметризованной квазидеформации можно выразить и в дифференциальной форме второго порядка типа $e_{ipq}e_{kmn}\nabla_p\nabla_n d_{qm}=0$. Трансляционное перемещение ансамбля $\Delta\lambda$ и его поворот φ вызывают соответствующее приращение пластической дисторсии $\Delta^p\chi^m(\varkappa, \varepsilon)$. Если учитывать только деформацию, связанную с механическим зарядом, то изменение пластической дисторсии определяется заметаемой при движении дефекта площадью и потоком через нее характеристического мотора $M^m(\mathbf{\Phi}, \mathbf{B})$. Тогда сразу имеем

$$\Delta^p\chi_{ik}{}^m(\varkappa, \varepsilon)=e_{iql}\Lambda_q\gamma_{lk}{}^m(\theta, \alpha), \quad \mathbf{\Lambda}=\nabla\lambda+\varphi\times\Delta\mathbf{r} \tag{7.2}$$

где $\gamma^m(\theta, \alpha)$ представляет сумму (2.2) и (3.1), $\Delta\mathbf{r}$ – параметр, характеризующий вклад вращательных движений в трансляцию ансамбля дефектов как целого.

Строго говоря, уравнение (7.2) нужно воспринимать как определение приращения пластической дисторсии, вызванного суммарным перемещением ансамбля $\mathbf{\Lambda}$.

К полученному соотношению необходимо еще добавить слагаемые, составленные из изменения плотности петель дефектов как градиента их потока, т. е. $\delta_{ik}{}^m(\xi, \nu)\nabla_q\Delta\lambda_q+\Delta\lambda_q[\nabla_q\delta_{ik}{}^m(\xi, \nu)]$; из дисторсии на вращательном движении, т. е. $e_{ipq}\Delta\varphi_p\delta_{qk}{}^m(\xi, \nu)$; вследствие производства петель дислокаций движущимися петлями дисклинаций, т. е. $A^m(0, e_{kpq}\xi_{ip}\Delta\lambda_q)$. Кроме того, возможно дополнительное рождение петель дефектов за счет их генерации на источниках или за счет расширения $\Delta^\circ\delta^m(\xi, \nu)$. В результате полное приращение пластической мотор-дисторсии имеет вид

$$\Delta^p\chi_{ik}{}^m(\varkappa, \varepsilon)=e_{iql}\Lambda_q\gamma_{lk}{}^m(\theta, \alpha)+\delta_{ik}{}^m(\xi, \nu)\nabla_q\Delta\lambda_q+\Delta\lambda_q[\nabla_q\delta_{ik}{}^m(\xi, \nu)]+$$
$$+e_{ipq}\Delta\varphi_p\delta_{qk}{}^m(\xi, \nu)+A_{ik}{}^m(0, e_{kpq}\xi_{ip}\Delta\lambda_q)+\Delta^\circ\delta_{ik}{}^m(\xi, \nu) \tag{7.3}$$

8. Уравнение баланса дефектов. Произвольное движение ансамбля дефектов сопровождается непрерывными изменениями в структуре кристалла. Эти процессы, очевидно, должны подчиняться определенным законам сохранения – уравнению баланса дефектов. Последнее непосредственно следует из определения мотор-тензорной плотности дефектов (2.2) и приращения пластической мотор-дисторсии из-за перемещения дефектов (7.2). Действительно, дифференцируя по времени (2.2), (7.2) и производя простые подстановки, будем иметь

$$\dot{\gamma}_{ik}{}^m(\theta, \alpha)-e_{ipq}\nabla_p[e_{qnl}\Lambda_n\gamma_{lk}{}^m(\theta, \alpha)]=G_{ik}{}^m(t, q) \tag{8.1}$$

Левая часть (8.1) учитывает взаимные превращения дефектов различного типа и их убыль за счет градиентов потоков, правая – все источники размножения, аннигиляции и зарождения дефектов, которые определены мотором $G^m(t, q)$. Раскрывая (8.1) и производя тождественные преобразования, имеем два следующих равенства:

$$\dot{\theta}_{ik}-e_{ipq}e_{qnl}\nabla_p\Lambda_n\dot{\theta}_{lk}=t_{ik} \tag{8.2}$$

$$\alpha_{ik}^{\bullet}-e_{ipq}e_{qnl}\nabla_p\Lambda_n^{\bullet}\alpha_{lk}-e_{npq}\Lambda_p^{\bullet}\theta_{qn}\delta_{ik}+e_{kpq}\Lambda_p^{\bullet}\theta_{qi}=q_{ik} \quad (8.3)$$

Уравнение (8.3) при $\theta_{ik}=0$, $q_{ik}=0$ переходит в известное соотношение для трансляционных дислокаций [10].

Подчеркнем, что (8.1) есть прямое следствие определений (2.2) и (7.2) и потому характеризует балансовые условия только для постулированных данными определениями массоперемещений. Следовательно, возможны различные формы (8.1).

Законам сохранения должны удовлетворять и петли дефектов. В соответствии с логикой, использованной при выводе уравнения (7.3), видно, что изменение плотности петель в рассматриваемом элементе объема подчиняется балансовому уравнению

$$\begin{aligned}&{}^{\bullet}\delta_{ik}^m(\xi, \nu)-\delta_{ik}^m(\xi, \nu)\nabla_l\Lambda_l^{\bullet}-\Lambda_l^{\bullet}[\nabla_l\delta_{ik}^m(\xi, \nu)]-e_{ipq}\varphi_p^{\bullet}\delta_{qk}^m(\xi, \nu)+\\&+\Delta^{\circ}\delta_{ik}^m(\xi, \nu)-{}^1/_2e_{ipq}e_{pnl}(\nabla_n\Lambda_l^{\bullet}-\nabla_l\Lambda_n^{\bullet})\delta_{qk}^m(\xi, \nu)\end{aligned} \quad (8.4)$$

Здесь $\varphi^{\bullet}$ — скорость поворота петель.

Когда при движении ансамбля дефектов полное приращение пластической деформации $\Delta\varepsilon_{ik}^p$ имеет отличный от нуля след, в объеме кристалла генерируются точечные дефекты в количестве $\Delta n=N\Delta\varepsilon_{ii}^p$, где N — число атомов в единице объема.

9. Анализ сил, действующих на ансамбль дефектов. Трансляционные и поворотные движения ансамблей дефектов вызываются, естественно, силами F и моментами сил M механического (F^m, M^m) и химического (F^c, M^c) происхождения. Силы и их моменты образуют силовой мотор $P^m(F, M)$, который можно определить из баланса работы силового мотора на моторе перемещения, с одной стороны, и работы внешних (по отношению к дефекту) напряжений на разрыве поля смещений для мотора напряжений или изменения свободной энергии системы из-за появления так называемого «лишнего» [9] объема. В результате в силовом континууме для составляющих этих моторов получаются такие выражения

$$F_i^m=e_{ijk}(\alpha_{jp}+e_{pnq}\theta_{jn}r_q)(\sigma_{kp}-{}^1/_3\sigma_{rr}\delta_{kp}) \quad (9.1)$$

$$M_i^m=e_{ijk}(\nu_{jp}+e_{pnq}\xi_{jn}r_q)(\sigma_{kp}-{}^1/_3\sigma_{rr}\delta_{kp}) \quad (9.2)$$

$$F_i^c=\mu Ne_{ipq}(\alpha_{pq}+e_{qnl}\theta_{pn}r_l) \quad (9.3)$$

$$M_i^c=\mu Ne_{ipq}(\nu_{pq}+e_{qnl}\xi_{pn}r_l) \quad (9.4)$$

В (9.1) и (9.2) учтены эффекты дилатации, т. е. работа напряжений на «лишнем» объеме. В (9.3) и (9.4) введен химический потенциал системы μ. Выражение (9.1) при $\theta_{ik}=0$ и $\sigma_{ii}=0$ преобразуется в известную формулу Пича — Келера для сил, действующих на трансляционную дислокацию.

Внешние по отношению к дефекту напряжения порождаются двумя причинами: воздействием на кристалл со стороны искусственно создаваемых механических, тепловых, стрикционных и других полей напряжений и дальнодействующими напряжениями со стороны остальных элементов ансамбля дефектов. Возникающую со стороны ансамбля реакцию самодействия удобно характеризовать силовым мотором самодействия $P^m(\Sigma, T)$, удовлетворяющим естественному условию равновесия

$$\nabla_i P_{ik}^m(\Sigma, T)=P_k^m(\mathbf{F}, \mathbf{M}) \quad (9.5)$$

Здесь Σ, T — силовые и моментные квазинапряжения в ансамбле дефектов, $\mathbf{F}$ и $\mathbf{M}$ — суммарная сила и момент, действующие на ансамбль со стороны всех источников.

Заметим, что в соответствии с изложенным (9.1) представляет собой только диссипативную составляющую силы. Химические силы и силы самовоздействия уточняют, но не исчерпывают энергетический баланс между работой внешних сил на их перемещениях и изменением внутренней энергии системы. Кроме перечисленных силовых моторов ансамбль дефектов испытывает, например, еще действие со стороны сил и моментов трения, обусловленных, главным образом, рельефом решетки, близкодействием с другими дефектами и т. д. Без детальных физических моделей или прямых экспериментальных данных силовой мотор трения в явном виде выписать нельзя. Итоговое же состояние равновесия должно отвечать очевидному условию равенства нулю суммы всех силовых моторов. Силовой мотор трения, как и почти любая сила трения, зависит от скорости движения ансамбля. Поэтому такое соотношение следует рассматривать в качестве уравнения движения ансамблей дефектов.

10. Реология квазисреды. Изменение взаимного расположения дефектов, характеризуемое квазидисторсией $\chi^m(c, d)$, зависит, как легко показать, от квазинапряжений в (9.5). Поэтому к упомянутому выше уравнению движения, разрешаемому относительно мотора перемещения или скорости его изменения, нужно добавить перемещения, связанные с квазидисторсиями. Иными словами, следует постулировать реологический закон близкодействия для ансамбля дефектов. В простейшем случае его целесообразно представить в форме, аналогичной реологии стандартного неупругого тела

$$\Sigma_{ik}+t_1\Sigma_{ik}^{\bullet}=\overset{1}{E}_{ikjl}(d_{jl}+t_3d_{jl}^{\bullet})+\overset{2}{E}_{ikjl}(c_{jl}+t_4c_{jl}^{\bullet}) \tag{10.1}$$

$$\begin{aligned}T_{ik}+t_2T_{ik}^{\bullet}={}&\overset{3}{E}_{ikjl}(d_{jl}+t_3d_{jl}^{\bullet})+\overset{4}{E}_{ikjl}(c_{jl}+t_4c_{jl}^{\bullet})+\overset{5}{E}_{ikjl}[(\omega_{jl}-\Omega_{jl}-{}^1/_2\nabla_j\lambda_l+\\&+{}^1/_2\nabla_l\lambda_j+\varphi_{jl})+t_5(\omega_{jl}^{\bullet}-\Omega_{jl}^{\bullet}-{}^1/_2\nabla_j\lambda_l^{\bullet}+{}^1/_2\nabla_l\lambda_j^{\bullet}+\varphi_{jl}^{\bullet})]\end{aligned} \tag{10.2}$$

Здесь зависящие от плотности дефектов тензорные коэффициенты E^1, $E^2 \ldots E^5$ характеризуют упругую податливость ансамбля, а коэффициенты t_1, $t_2 \ldots t_5$ — его длительную податливость. В частном случае они могут быть и равны нулю. Последнее слагаемое в (10.2) учитывает реакцию ансамбля на его поворот как жесткого целого относительно кристаллической решетки.

Реологический закон (10.2) замыкает приведенную систему уравнений. Будучи дополненной соответствующими начальными и краевыми условиями, она составляет теоретическую основу поставленной в статье задачи. Как показывает предварительный анализ, развитый подход позволяет формулировать разнообразные модели теории дефектного кристалла практически неограниченной степени сложности, например при расчете эффекта памяти формы металлов и сплавов, анализе эволюции структур, явлений несовершенной упругости, акустической эмиссии, внутреннего трения, оценке микронапряжений и т. д. Существенно, что в рамках одного подхода можно описывать среды с любой реологией и микроструктурой, включая континуум со свободными поворотами и моментными напряжениями, причем без ограничений по масштабу неоднородностей как сверху, так и снизу.

Континуальная теория дефектов, главным образом, развита в части геометрии и статики [7], притом преимущественно только для сред с силовыми напряжениями и сопутствующими поворотами. Как видно из изложенного, применение моторного анализа позволяет в математически компактной форме выписать общие соотношения для моментных сред со свободными поворотами, распространить предмет теории на случай перемещающихся дефектов. Последнее обстоятельство имеет особую ценность, поскольку подавляющее большинство практических задач физической механики относится именно к кинематике или динамике дефектов, т. е. к проблеме неупругого поведения тела.

В данной работе был использован хорошо апробированный в теории дислокаций метод построения определяющих уравнений переноса на основе анализа движущих сил (механического или химического происхождения) и постулирования законов перемещения под действием этих сил (система соотношений для квазисреды и силовые уравнения (10.1), (10.2)). Это позволило сформулировать самосогласованную систему уравнений, допускающую разнообразные частные трактовки.

В качестве одного из примеров практической реализации предложенного подхода рассмотрим задачу о так называемой резиноподобной упругости, вызванной реверсивным движением дислокаций в скоплениях. Такой эффект обратимости больших деформаций наблюдается в большой группе сплавов. Пусть система параллельных винтовых дислокаций, характеризуемая средней плотностью α_{11}, подпирается к плоским препятствиям однородным полем напряжений. Препятствия, расстояние между которыми равно l, расположены вдоль оси z. Тогда пластическая деформация будет равна $\Delta e_{12}{}^p={}^1/_3l^2\alpha_{11}{}^2\sigma_{12}E_0{}^{-1}$, где E_0 — модуль упругости, характеризующий ответную реакцию системы винтовых дислокаций на взаимное сближение. Из оценок физического плана следует, что $E_0 \approx 10^{-3}$ G (G — модуль сдвига). Отсюда можно заключить, что кристалл будет испытывать деформацию, пропорциональную σ_{12}, которая должна восстановиться при удалении нагрузки и, следовательно, является квазиупругой (резиноподобной) с эффективным модулем упругости, равным $E_f = 3 \cdot 10^{-3}$ $G/(l^2 \alpha_{11}^2)$.

При типичных значениях $l \approx 10^{-2}$ см, $\alpha \approx 10^2$ см$^{-1}$ имеем $E_f \approx 3 \cdot 10^{-3}$ G, что очень хорошо соответствует опыту. Обратимые деформации здесь достигают нескольких процентов или более. Если в качестве реологического закона для взаимодействующих дислокаций принять уравнение стандартного линейно-неупругого тела, пластические деформации окажутся обратимыми постепенно.

В публикуемой работе использованы известные тождества для моторов [1—3].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Schaefer H.* The basis affine connection in a cosserat Continuum.— In: Mechanics of Generalized Continua. B.: Springer, 1968, p. 57—62.
2. *Kessel S.* Die Spannungsfunktionen des Cosserat-Kontinuums.— Z. Angew. Math. und Mech., 1967, B. 47, H. 5, S. 329—336.
3. *Schaefer H.* Analysis der Motorfelder im Cosserat-Kontiuum.— Z. angew. Math. und Mech., 1967, B. 47, H. 5, S. 319—328.
4. *Mises R. V.* Motorrechnung, ein neues Hilfsmittel der Mechanick. Anwendungen der motorrechnung.— Z. Angew. Math. und Mech., 1924, B. 4, H. 2, S. 155—181.
5. *Schaefer H.* Die Spannungsfunktionen eines Kontinuums mit Momentenspannungen. I, II.— Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Techn., 1967, v. 15, No. 1, p. 63—69.
6. *Диментберг Ф. М.* Теория винтов и ее приложения. М.: Наука, 1978. 327 с.
7. *Вит Р.* Континуальная теория дисклинаций. М.: Мир, 1977. 208 с.
8. *Günter H.* Zur Kinematik von Disklinationen.— Physica Status Solidi (b), 1972, v. 49, No. 2, p. 551—559.
9. *Лихачев В. А., Хайров Р. Ю.* Введение в теорию дисклинаций. Л.: Изд-во ЛГУ, 1975. 183 с.
10. *Косевич А. М.* Поле деформаций в изотропной упругой среде с движущимися дислокациями.— ЖЭТФ, 1962, т. 42, вып. 1, с. 152—162.

Ленинград

Поступила в редакцию 10.III.1981