МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 2 · 1984

УДК 539.3.01

РАВНОВЕСИЕ НЕОДНОРОДНОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА В ПЛОСКОМ И ОСЕСИММЕТРИЧНОМ СЛУЧАЯХ

КУЗНЕЦОВ Е. А.

В последнее время интенсивно развиваются методы решения различных задач теории упругости для неоднородных тел, упругие свойства которых зависят от координат. Это объясняется тем, что все реальные твердые тела обладают в той или иной степени неоднородностью упругих и других свойств. Достаточно полный обзор известных публикаций в этой области приведен в [1]. Из этого обзора, в частности, следует, что при рассмотрении неоднородного полупространства чаще всего принимают степенную зависимость модуля упругости или модуля сдвига от глубины, значительно реже рассматривается экспоненциальная зависимость [2], а коэффициент Пуассона фактически всегда считается постоянным.

В одной известной автору работе [3] отмечается, что общее решение при переменном коэффициенте Пуассона может быть выражено через две гармонические функции, однако конкретные задачи не рассматриваются. Тем не менее коэффициент Пуассона в любом твердом теле не может быть постоянным, так как он существенно зависит от пористости [4], которая всегда распределяется неравномерно. Кроме того, известно [5], что от величины коэффициента Пуассона в значительной мере зависит характер распределения деформаций и подводимой энергии в упругом полупространстве, когда к его поверхности приложена нормальная и касательная нагрузка.

В публикуемой работе рассматривается равновесие неоднородного упругого полупространства, у которого коэффициент Пуассона является произвольной функцией глубины, модуль сдвига постоянен или зависит от глубины некоторым специальным образом, а на поверхности заданы напряжения.

1. Плоская деформация при переменном коэффициенте Пуассона. Рассмотрим равновесие неоднородного полупространства, у которого коэффициент Пуассона σ является произвольной функцией глубины, а модуль сдвига G всюду постоянен.

В [6, 7] показано, что в общем случае решение плоской задачи для неоднородной среды, когда ее упругие свойства зивисят от одной декартовой координаты z, можно представить в виде некоторой функции $L(x, z)$, которая определяется из следующего дифференциального уравнения (Δ — двухмерный оператор Лапласа):

$$\Delta\left(\frac{1-\sigma}{G}\Delta L\right)-\frac{\partial^2 L}{\partial x^2}\frac{d^2}{dz^2}\left(\frac{1}{G}\right)=0 \qquad (1.1)$$

Если функция $L(x, z)$ известна, то напряжения и перемещения в любой точке определяются по формулам

$$\sigma_x=\frac{\partial^4 L}{\partial x^2\partial z^2},\quad \sigma_z=\frac{\partial^4 L}{\partial x^4},\quad \tau_{xz}=-\frac{\partial^4 L}{\partial x^3\partial z}$$

$$u_x=-\frac{1}{G}\left[\sigma\frac{\partial^2}{\partial x^2}-(1-\sigma)\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right]\frac{\partial L}{\partial x} \qquad (1.2)$$

$$u=-\frac{1}{G}\frac{\partial^3 L}{\partial x^2\partial z}\pm\frac{\partial}{\partial z}\left\{\frac{1}{2G}\left[\sigma\frac{\partial^2 L}{\partial x^2}-(1-\sigma)\frac{\partial^2 L}{\partial z^2}\right]\right\}$$

Будем считать, что неоднородная область занимает верхнее полупространство, и направим ось z перпендикулярно поверхности, а ось x — параллельно ей. Тогда, вводя обозначение $1-\sigma=\sigma^*(z)$ и учитывая, что в рассматриваемом случае $G=\text{const}$, уравнение (1.1) можно записать так:

$$\Delta(\sigma^*(z)\Delta L)=0 \tag{1.3}$$

Решение поставленной задачи будем искать в виде

$$L(x,z)=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\alpha x}\Psi(z,\alpha)\frac{d\alpha}{\alpha^4} \tag{1.4}$$

где $\Psi(z, \alpha)$ — ограниченная при $z\to+\infty$ функция, которую необходимо найти, если заданы нормальные и касательные усилия на границе.

Подставляя выражение (1.4) в формулу (1.3), находим, что искомая функция $\Psi(z, \alpha)$ должна удовлетворять следующему дифференциальному уравнению:

$$\left(\frac{d^2}{dz^2}-\alpha^2\right)\left[\sigma^*(z)\left(\frac{d^2\Psi}{dz^2}-\alpha^2\Psi\right)\right]=0 \tag{1.5}$$

Если ввести в рассмотрение новую функцию $U(z, \alpha)=\sigma^*(z)(d^2\Psi/dz^2-\alpha^2\Psi)$, то она должна удовлетворять дифференциальному уравнению $d^2U/dz^2-\alpha^2U=0$, решение которого можно записать так:

$$U(z, \alpha)=C_1e^{|\alpha|z}+C_2e^{-|\alpha|z} \quad (z\geqslant 0) \tag{1.6}$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

Следовательно, искомая функция $\Psi(z, \alpha)$ должна удовлетворять неоднородному дифференциальному уравнению

$$d^2\Psi/dz^2-\alpha^2\Psi=(C_1e^{|\alpha|z}+C_2e^{-|\alpha|z})/\sigma^*(z) \tag{1.7}$$

Решение этого дифференциального уравнения имеет вид

$$\begin{gathered}\Psi(z, \alpha)=\Psi_0(z, \alpha)+\Psi_1(z, \alpha),\\ \Psi_0(z, \alpha)=C_3e^{|\alpha|z}+C_4e^{-|\alpha|z}\end{gathered} \tag{1.8}$$

где $\Psi_1(z, \alpha)$ — частное решение неоднородного дифференциального уравнения (1.7), которое можно записать таким образом [8]:

$$\begin{gathered}\Psi_1(z,\alpha)=\frac{1}{2|\alpha|}\sum_{k=1}^{2}(-1)^{k-1}\exp[(-1)^{k-1}|\alpha|z]\times\\ \times\int\frac{\exp[(-1)^k|\alpha|z]}{\sigma^*(z)}(C_1e^{|\alpha|z}+C_2e^{-|\alpha|z})\,dz\end{gathered} \tag{1.9}$$

Следовательно, поставленная задача решена в самом общем случае. Произвольные постоянные C_1, C_2, C_3 и C_4 можно найти из конкретных граничных условий. В частности, если главный вектор всех внешних сил, приложенных к границе неоднородного полупространства, конечен, то напряжения и функция $L(x, z)$ должны стремиться к нулю при неограниченном удалении от поверхности, а поэтому произвольные постоянные C_1 и C_3 должны тождественно равняться нулю. Кроме того, если на поверхности при $z=0$ заданы нормальные и касательные напряжения $\sigma_z=\sigma(x)$, $\tau_{xz}=\tau(x)$, которые могут быть представлены в виде изображений Фурье

$$\sigma(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} g_1(\alpha)e^{-i\alpha x}\,d\alpha,\quad \tau(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} g_2(\alpha)e^{-i\alpha x}\,d\alpha,\quad g_1(\alpha)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\sigma(x)e^{i\alpha x}\,dx, \tag{1.10}$$

$$g_2(\alpha)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\tau(x)\,e^{i\alpha x}\,dx$$

то для определения произвольных постоянных можно найти два соотношения

$$\Psi|_{z=0}=g_1(\alpha),\qquad d\Psi/dz|_{z=0}=i\alpha g_2(\alpha) \tag{1.11}$$

непосредственно вытекающих из формул (1.2) и (1.4). В качестве конкретного примера рассмотрим случай, когда

$$\sigma^*(z)=(A+Be^{-\gamma z})^{-1}\qquad (\gamma\geqslant 0) \tag{1.12}$$

В такой постановке $\sigma(0)=1-(A+B)^{-1}$, $\sigma(\infty)=1-1/A$, т. е. коэффициент Пуассона непрерывно изменяется от одного конечного значения на поверхности неоднородного полупространства до другого конечного значения на бесконечно большой глубине. Такая ситуация наиболее близка к реальным свойствам твердых тел. В этом случае частное решение дифференциального уравнения (1.7) имеет вид

$$\Psi_1=\left[\frac{Az}{2|\alpha|}-\frac{Be^{-\gamma z}}{\gamma(2|\alpha|-\gamma)}\right]C_1e^{|\alpha|z}-\left[\frac{Az}{2|\alpha|}-\frac{Be^{-\gamma z}}{\gamma(2|\alpha|+\gamma)}\right]C_2e^{-|\alpha|z} \tag{1.13}$$

Следовательно, если коэффициент Пуассона задан зависимостью (1.12), то общее решение задачи для неоднородного полупространства в виде функции $L(x, z)$ можно записать следующим образом:

$$\begin{gathered}L(x,z)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-i\alpha x}}{\alpha^4}\left\{C_1\left[\frac{Az}{2|\alpha|}-\frac{Be^{-\gamma z}}{\gamma(2|\alpha|-\gamma)}\right]e^{|\alpha|z}-\right.\\ \left.-C_2\left[\frac{Az}{2|\alpha|}-\frac{Be^{-\gamma z}}{\gamma(2|\alpha|+\gamma)}\right]e^{-|\alpha|z}+C_3e^{|\alpha|z}+C_4e^{-|\alpha|z}\right\}d\alpha\end{gathered} \tag{1.14}$$

Рассмотрим подробнее случай неоднородного полупространства, когда на его поверхности заданы внешние нормальные и касательные нагрузки. Учитывая, что теперь $C_1=C_3=0$, подставляя выражение (1.14) в формулы (1.11) и выполняя очевидные необходимые преобразования, находим

$$\begin{gathered}C_2=-\frac{2\alpha^2(2|\alpha|+\gamma)}{[2|\alpha|(A+B)+\gamma A]}[g_1(\alpha)+i\,\mathrm{sign}(\alpha)\,g_2(\alpha)]\\ C_4=g_1(\alpha)+\frac{2\alpha^2 B}{\gamma[2|\alpha|(A+B)+\gamma A]}[g_1(\alpha)+i\,\mathrm{sign}(\alpha)\,g_2(\alpha)]\end{gathered} \tag{1.15}$$

Подставляя значения постоянных C_2 и C_4 в формулу (1.14), окончательно получаем

$$\begin{gathered}L(x,z)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-i\alpha x}}{\alpha^4}e^{-|\alpha|z}\left\{g_1(\alpha)+[A\gamma(2|\alpha|+\gamma)z+\right.\\ \left.+2B|\alpha|(1-e^{-\gamma z})]\frac{|\alpha|[g_1(\alpha)+i\,\mathrm{sign}(\alpha)\,g_2(\alpha)]}{\gamma[2|\alpha|(A+B)+\gamma A]}\right\}d\alpha\end{gathered} \tag{1.16}$$

2. Осесимметричная деформация при переменном коэффициенте Пуассона. Рассмотрим теперь равновесие неоднородного полупространства с переменным по глубине коэффициентом Пуассона, к поверхности которого приложены произвольно распределенные нормальные и касательные внешние нагрузки.

В [6] показано, что общее решение задачи о равновесии пространственных неоднородных тел, упругие свойства которых являются произвольными функциями одной декартовой координаты z, можно представить в виде двух функций: $L(x, y, z)$ и $N(x, y, z)$. Причем $L(x, y, z)$ должна удовлетворять дифференциальному уравнению (∇^2 — трехмерный оператор Лапласа):

$$\nabla^2\left(\frac{1-\sigma}{G}\nabla^2 L\right)-\left(\nabla^2-\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)L\frac{d^2}{dz^2}\left(\frac{1}{G}\right)=0 \qquad (2.1)$$

В осесимметричном случае функция $N(x, y, z)$ тождественно равна нулю и общее решение выражается через одну функцию $L(x, y, z)$. Если в формуле (2.1) положить $G=\text{const}$ и ввести, как и выше, обозначение $(1-\sigma)=\sigma^*(z)$, перейти к цилиндрическим координатам и считать, что внешняя нагрузка соответствует осесимметричному распределению напряжений и перемещений, то дифференциальное уравнение (2.1), которому должна удовлетворять искомая функция $L(r, z)$, можно представить в виде

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\left[\sigma^*(z)\left(\frac{\partial^2 L}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial L}{\partial r}+\frac{\partial^2 L}{\partial z^2}\right)\right]=0 \qquad (2.2)$$

Когда функция $L(r, z)$ найдена, компоненты напряжений и перемещений можно найти из выражений

$$\begin{gathered}
\sigma_z=\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)^2 L, \qquad \tau_{rz}=-\frac{\partial^2}{\partial r\,\partial z}\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)L \\
\sigma_r=\frac{\sigma}{r}\frac{\partial}{\partial r}\nabla^2 L+\frac{\partial^4 L}{\partial r^2\,\partial z^2}, \qquad \sigma_\theta=\sigma\frac{\partial^2}{\partial r^2}\nabla^2 L+\frac{1}{r}\frac{\partial^3 L}{\partial r\,\partial z^2} \\
u_z=-\frac{1}{G}\left(\nabla^2-\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\frac{\partial L}{\partial z}+\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{1}{2G}\left(\sigma\nabla^2-\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)L\right] \\
u_r=-\frac{1}{2G}\frac{\partial}{\partial r}\left(\sigma\nabla^2-\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)L
\end{gathered} \qquad (2.3)$$

Неизвестную функцию $L(r, z)$ в осесимметричном случае будем искать в виде изображения Ханкеля

$$L(r,z)=\int_0^\infty J_0(\alpha r)\frac{\Psi^*(z,\alpha)}{\alpha^3}\,d\alpha \qquad (2.4)$$

где $\Psi^*(z, \alpha)$ — ограниченная при $z\to+\infty$ функция, которая подлежит определению, $J_0(\alpha r)$ — функция Бесселя первого рода, нулевого порядка.

Подставляя выражение (2.4) в формулу (2.2) и учитывая известное тождество [9]:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)J_0(\alpha r)=-\alpha^2 J_0(\alpha r) \qquad (2.5)$$

находим, что искомая функция $\Psi^*(z, \alpha)$ должна удовлетворять дифференциальному уравнению, совпадающему с решенным выше уравнением (1.5). Следовательно, общее решение задачи о равновесии неоднородного полупространства, коэффициент Пуассона которого является произвольной функцией глубины, в осесимметричном случае можно считать найденным.

Если на поверхности упругого неоднородного полупространства при $z=0$ заданы осесимметричные нормальные и касательные нагрузки $\sigma_z=\sigma(r)$, $\tau_{rz}=\tau(r)$, которые могут быть представлены в виде изображений

Ханкеля

$$\sigma(r)=\int_0^\infty \alpha J_0(\alpha r) g_1^*(\alpha)\,d\alpha, \qquad \tau(r)=\int_0^\infty \alpha J_1(\alpha r) g_2^*(\alpha)\,d\alpha \tag{2.6}$$

$$g_1^*(\alpha)=\int_0^\infty rJ_0(\alpha r)\sigma(r)\,dr, \qquad g_2^*(\alpha)=\int_0^\infty rJ_1(\alpha r)\tau(r)\,dr$$

то искомая функция $\Psi^*(z, \alpha)$ в осесимметричном случае должна удовлетворять граничным условиям, аналогичным (1.11)

$$\Psi^*|_{z=0}=g_1^*(\alpha), \qquad d\Psi^*/dz|_{z=0}=-\alpha g_2^*(\alpha) \tag{2.7}$$

непосредственно вытекающим из формул (2.3), (2.4), (2.5), а также известного тождества [9]: $d[J_0(\alpha z)]/dz=-J_1(\alpha z)/\alpha$.

В частном случае, когда коэффициент Пуассона изменяется с увеличением глубины по закону (1.12), общее решение поставленной задачи для неоднородного полупространства на основании формул (1.8), (1.13) и (2.4), а также с учетом того, что произвольные постоянные C_1 и C_3 равны нулю, в осесимметричном случае можно записать следующим образом:

$$L(r,z)=\int_0^\infty \frac{J_0(\alpha r)}{\alpha^3} e^{-\alpha z}\left\{C_2^*\left[\frac{Be^{-\gamma z}}{\gamma(2\alpha+\gamma)}-\frac{Az}{2\alpha}\right]+C_4^*\right\}d\alpha \tag{2.8}$$

Если на поверхности неоднородного полупространства заданы осесимметричные нормальные и касательные внешние нагрузки, то из формул (2.7) и (2.8) аналогично (1.15) можно найти соотношения для определения постоянных C_2 и C_4, выраженные через известные функции $g_1^*(\alpha)$ и $g_2^*(\alpha)$. Эти соотношения имеют вид

$$\begin{aligned} C_2^* &= -\frac{2\alpha^2(2\alpha+\gamma)[g_1^*(\alpha)-g_2^*(\alpha)]}{2\alpha(A+B)+\gamma A} \\ C_4^* &= g_1^*(\alpha)+\frac{2\alpha^2 B[g_1^*(\alpha)-g_2^*(\alpha)]}{\gamma[2\alpha(A+B)+\gamma A]} \end{aligned} \tag{2.9}$$

Следовательно, решение поставленной задачи в общем виде, когда на границе неоднородного полупространства заданы произвольные осесимметричные нормальные и касательные внешние нагрузки, а коэффициент Пуассона связан зависимостью (1.12), можно записать так:

$$\begin{aligned} L(r,z) &= \int_0^\infty \frac{J_0(\alpha r)}{\alpha^3} e^{-\alpha z}\left\{g_1^*(\alpha)+\frac{[g_1^*(\alpha)-g_2^*(\alpha)]}{\gamma[2\alpha(A+B)+\gamma A]}\times\right. \\ &\quad \left.\times[A\gamma(2\alpha+\gamma)z+2B\alpha(1-e^{-\gamma z})]\right\}d\alpha \end{aligned} \tag{2.10}$$

3. Плоская и осесимметричная деформация при переменных коэффициенте Пуассона и модуле сдвига. Рассмотрим теперь неоднородное полупространство, у которого коэффициент Пуассона связан с глубиной произвольной зависимостью, а модуль сдвига изменяется по степенной зависимости вида $G(z)=G_0/(1+Cz)$ $(C\geqslant 0)$.

Если решение плоской или осесимметричной задачи для такого неоднородного полупространства искать соответственно в виде (1.4) или (2.4), то из выражений (1.1) и (2.1) видно, что неизвестные функции $\Psi(z, \alpha)$

или $\Psi^*(z, \alpha)$ должны удовлетворять дифференциальному уравнению

$$\left(\frac{d^2}{dz^2}-\alpha^2\right)\left[(1+Cz)\sigma^*(z)\left(\frac{d^2\Psi}{dz^2}-\alpha^2\Psi\right)\right]=0 \qquad (3.1)$$

которое фактически не отличается от (1.5). Его решение можно представить в виде

$$\Psi(z, \alpha)=\Psi_0(z, \alpha)+\Psi_1(z, \alpha), \quad \Psi_0(z, \alpha)=D_3e^{|\alpha|z}+D_4e^{-|\alpha|z} \qquad (3.2)$$

$$\Psi_1(z,\alpha)=\frac{1}{2|\alpha|}\sum_{k=1}^{2}(-1)^{k-1}\exp[(-1)^{k-1}|\alpha|z]\times$$

$$\times\int\frac{\exp[(-1)^k|\alpha|z]}{(1+Cz)\sigma^*(z)}(D_1e^{|\alpha|z}+D_2e^{-|\alpha|z})\,dz$$

Следовательно, и такая задача решена в самом общем виде. Произвольные постоянные в этом решении определяются из конкретных граничных условий, заданных на поверхности.

4. Примеры. Рассмотрим несколько конкретных примеров, представляющих определенный практический интерес. Обратимся сначала к случаю плоской деформации, когда коэффициент Пуассона связан с глубиной зависимостью (1.12), а модуль сдвига постоянен.

Пусть к границе неоднородного полупространства внешняя нагрузка приложена следующим образом:

$$\sigma_z|_{z=0}=-\frac{2P_0}{\pi N^2}\sqrt{N^2-x^2} \ \text{ при } |x|<N, \quad \sigma_z|_{z=0}=\tau_{xz}|_{z=0}=0 \ \text{ при } |x|\geqslant N \qquad (4.1)$$

Этот пример интересен тем, что аналогичное контактное давление имеет место под единичным круглым штампом, когда он прижат к однородному полупространству нормальной силой P_0.

В этом случае [10]:

$$g_1(\alpha)=-P_0J_1(\alpha N)/(\pi\alpha N), \quad g_2(\alpha)=0 \qquad (4.2)$$

Следовательно, решение поставленной задачи (см. п. 1) можно представить в виде

$$L(x,z)=-\frac{2P_0}{\pi\gamma N}\int_0^\infty\frac{J_1(\alpha N)\cos\alpha x}{\alpha^4}e^{-\alpha z}\left\{\frac{\gamma}{\alpha}+\right.$$

$$\left.+\frac{\gamma(2\alpha+\gamma)zA+2B\alpha(1-e^{-\gamma z})}{2\alpha(A+B)+\gamma A}\right\}d\alpha \qquad (4.3)$$

Зная функцию $L(x, z)$, при помощи формул (1.2) нетрудно определить напряжения и перемещения в любой точке неоднородного полупространства с переменным по глубине коэффициентом Пуассона и на основании этого выяснить, каким образом подобного рода неоднородность изменяет напряженно-деформированное состояние в сравнении с однородным полупространством.

Пусть теперь к границе неоднородного полупространства на участке $[-N, N]$ приложено равномерное давление интенсивностью Q, т. е. при $z=0$ имеют место граничные условия: $\sigma_z=-Q$ при $|x|\leqslant N$, $\sigma_z=0$ при $|x|>N$, $\tau_{xz}=0$. Тогда [10]:

$$g_1(\alpha)=-Q\sin(\alpha N)/(\pi\alpha), \quad g_2(\alpha)=0 \qquad (4.4)$$

и решение поставленной задачи можно записать так:

$$L(x,z)=-\frac{2Q}{\pi\gamma}\int_0^\infty \frac{\sin(\alpha N)\cos\alpha x}{\alpha^4}e^{-\alpha z}\left\{\frac{\gamma}{\alpha}+\right.$$

$$\left.+\frac{\gamma(2\alpha+\gamma)zA+2B\alpha(1-e^{-\gamma z})}{2\alpha(A+B)+\gamma A}\right\}d\alpha \tag{4.5}$$

Если в этом решении перейти к пределу при $N\to0$, полагая постоянной суммарную внешнюю нагрузку, т. е. $2QN=P_0$, то получим решение в виде функции $L(x, z)$ для сосредоточенной силы P_0, приложенной к границе неоднородного полупространства в начале координат. Оно имеет следующий вид:

$$L(x,z)=-\frac{P_0}{\pi\gamma}\int_0^\infty \frac{\cos\alpha x}{\alpha^3}e^{-\alpha z}\left\{\frac{\gamma}{\alpha}+\frac{\gamma(2\alpha+\gamma)zA+2B\alpha(1-e^{-\gamma z})}{2\alpha(A+B)+\gamma A}\right\}d\alpha \tag{4.6}$$

Рассмотрим теперь несколько примеров для осесимметричной деформации неоднородного полупространства с переменным коэффициентом Пуассона (зависимость (1.12)) и постоянным модулем сдвига.

Пусть к границе неоднородного полупространства по кругу радиуса R приложена равномерная нормальная нагрузка интенсивностью Q, т. е. при $z=0$ имеют место граничные условия: $\sigma_z=-Q$ при $r<R$, $\sigma_z=0$ при $r\geqslant R$, $\tau_{rz}=0$. Учитывая значение интеграла [9]:

$$\int_0^1 xJ_0(ax)\,dx=a^{-1}J_1(a)$$

из формул (2.7) в этом случае получаем $g_1^*(\alpha)=-QRJ_1(\alpha R)/\alpha$, $g_2^*(\alpha)=0$. Следовательно, решение поставленной задачи в виде функции $L(r, z)$ можно записать следующим образом:

$$L(r,z)=-\frac{QR}{\gamma}\int_0^\infty \frac{J_1(\alpha R)J_0(\alpha r)}{\alpha^3}e^{-\alpha z}\left\{\frac{\gamma}{\alpha}+\frac{\gamma(2\alpha+\gamma)zA+2B\alpha(1-e^{-\gamma z})}{2\alpha(A+B)+\gamma A}\right\}d\alpha \tag{4.7}$$

Если в этом выражении перейти к пределу при $R\to0$, полагая $\pi QR^2=P_0$, то получим решение задачи для сосредоточенной силы P_0, приложенной нормально к границе неоднородного полупространства в начале координат. Это решение имеет вид

$$L(r,z)=-\frac{P_0}{2\pi\gamma}\int_0^\infty \frac{J_0(\alpha r)}{\alpha^2}e^{-\alpha z}\left\{\frac{\gamma}{\alpha}+\frac{\gamma(2\alpha+\gamma)zA+2B\alpha(1-e^{-\gamma z})}{2\alpha(A+B)+\gamma A}\right\}d\alpha \tag{4.8}$$

Приведем также выражения для вертикальных перемещений границы неоднородного полупространства под действием единичной нормальной сосредоточенной силы P_0, приложенной в начале координат. Эти выражения представляют практический интерес, так как с их помощью можно построить интегральные уравнения для решения соответствующих контактных задач. Методы решения подобного рода интегральных уравнений достаточно хорошо разработаны [11—14].

Опуская очевидные промежуточные выкладки, приведем только конечные результаты. Для плоской деформации из формул (1.2) и (4.6) следует

$$u_z|_{z=0}=\frac{P_0}{\pi G(A+B)}\left\{\int_0^\infty \frac{\cos\alpha x}{\alpha}d\alpha+B\gamma\int_0^\infty\frac{\cos\alpha x}{\alpha[2\alpha(A+B)+\gamma A]}d\alpha\right\} \qquad (4.9)$$

Если учесть значение интеграла [9]:

$$\int_0^\infty \frac{\cos\alpha x}{\alpha}d\alpha=2\ln(x)-\ln(0)-\mathbf{C}$$

где $\mathbf{C}$ — постоянная Эйлера, а также $(A+B)^{-1}=1-\sigma(0)$, то видно, что первое слагаемое в правой части формулы (4.9) определяет перемещение границы однородного полупространства, у которого коэффициент Пуассона равен $\sigma(0)$, а второе — связано с неоднородностью упругих свойств по глубине. Перемещение границы всюду неограничено. Однако неограниченная его часть обусловлена перемещением упругого полупространства как абсолютно жесткого тела. Производные вертикальных перемещений будут всюду ограниченными, за исключением точки приложения сосредоточенной нормальной силы.

Аналогично для осесимметричного случая из формул (2.3) и (4.6) получаем

$$u_z|_{z=0}=\frac{P_0}{2\pi G(A+B)}\left\{\int_0^\infty J_0(\alpha r)d\alpha+B\gamma\int_0^\infty\frac{J_0(\alpha r)}{2\alpha(A+B)+\gamma A}d\alpha\right\} \qquad (4.10)$$

И в этом выражении первое слагаемое правой части определяет вертикальное перемещение границы однородного полупространства с поверхностным значением коэффициента Пуассона, а второе слагаемое связано с неоднородностью.

Если в формулах (4.9) и (4.10) положить $\gamma=0$, то можно получить хорошо известные формулы для определения вертикальных перемещений поверхности однородного полупространства под действием нормальной сосредоточенной силы.

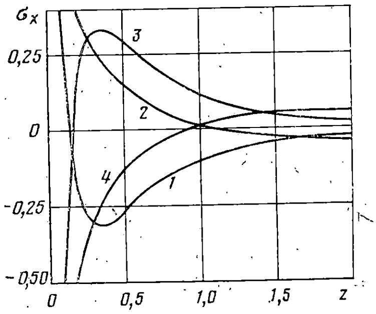
Рассмотрим также распределение напряжений в неоднородном полупространстве при действии на него сосредоточенной силы. Если ограничиться изучением напряженного состояния на оси действия сосредоточенной силы, т. е. на оси z, то из формул (4.6) и (1.2) после вычисления соответствующих интегралов при $x=0$ получаем

$$\sigma_x|_{x=0}=\frac{P_0B}{\pi(A+B)}\left\{\frac{1-e^{-\gamma z}-\gamma z}{\gamma z^2}+\frac{\theta}{z}\left[\frac{3B+4B}{\gamma A}(1-e^{-\gamma z})+z\right]+\right.$$
$$\left.+\left[\gamma e^{-\gamma z}+\theta^2\left(\frac{3A+4B}{\gamma A}(1-e^{-\gamma z})+z\right)\right]e^{z\theta}\,\mathrm{Ei}(-z\theta)\right\} \qquad (4.11)$$

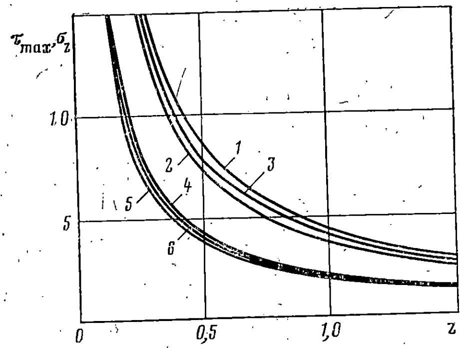
$$\sigma_z|_{x=0}=-\frac{P_0B}{\pi(A+B)}\left\{\frac{1-e^{-\gamma z}+(2A/B+1)\gamma z}{\gamma z^2}+\frac{\theta}{z}(z-1+e^{-\gamma z})+\right.$$
$$\left.+\theta^2[z-(1-e^{-\gamma z})/\gamma]e^{z\theta}\,\mathrm{Ei}(-z\theta)\right\}, \qquad \theta=\frac{\gamma A}{2(A+B)}$$

где $\mathrm{Ei}(-y)$ — интегральная показательная функция. Касательное напряжение τ_{xz} на оси z, очевидно, равно нулю.

На фиг. 1 показаны эпюры нормальных напряжений σ_x, когда $\sigma_0=0{,}3$, $\sigma_\infty=0{,}5$ (кривые *1*, *2*) и $\sigma_0=0{,}5$, $\sigma_\infty=0{,}3$ (кривые *3*, *4*), а параметр γ подобран таким образом, что на глубине $z=1{,}0$ отличие коэффициента Пуассона от его предельного глубинного значения составляет 1% или 50% всего диапазона изменения $\sigma(z)$ (соответственно кривые *1*, *3* и *2*, *4*), т. е. коэффициент Пуассона в рассмотренных случаях



Фиг. 1



Фиг. 2

быстрее или медленнее стремится к своему предельному глубинному значению. При выполнении расчетов полагалось, что $P_0=2\pi$.

На фиг. 2 показаны эпюры нормальных напряжений σ_z (кривые *1—3*) и максимальных касательных напряжений (кривые *4—6*) в однородном (кривые *3* и *6*) и неоднородном полупространстве (кривые *1, 2, 4, 5*). Кривые *1* и *4* соответствуют значениям $\sigma_0=0{,}2$, $\sigma_\infty=0{,}5$, а кривые *4* и *5* – $\sigma_0=0{,}5$, $\sigma_\infty=0{,}2$. Из фиг. 2 видно, что неоднородность упругого полупространства (при переменном коэффициенте Пуассона) на распределение напряжений σ_z и τ_{max} оказывает значительно меньшее влияние, чем на распределение напряжений σ_x.

Приведенные результаты расчетов позволяют сделать ряд выводов, представляющих интерес для теории трения и изнашивания. Действительно, при трении реальных твердых тел их приповерхностные слои перед началом разрушения предварительно наклепываются и, как следствие этого, коэффициент Пуассона на поверхности становится меньше, чем на глубине [15]. В этом случае в непосредственной близости от поверхности, как следует из приведенных графиков, увеличивается общий уровень нормальных напряжений σ_z и максимальных касательных напряжений, а также возникают дополнительные растягивающие напряжения σ_x, которые на некоторой глубине сменяются сжимающими. Как известно, растягивающие нормальные напряжения σ_x способствуют выходу микродефектов, образовавшихся в процессе трения, на поверхность, т. е. способствуют разрушению, а сжимающие напряжения σ_x, наоборот, препятствуют развитию микродефектов. Следовательно, наклеп поверхностей трения инициирует процесс изнашивания сопряженных поверхностей.

Если же $\sigma_0>\sigma_\infty$, то в области контакта должна создаваться наиболее благоприятная для повышения износостойкости ситуация. Действительно, приведенные графики показывают, что подобного рода неоднородность способствует понижению общего уровня напряжений σ_z и τ_{max}. Однако в этом случае наиболее важным, вероятно, является то, как распределяются от поверхности в глубину дополнительно возникающие нормальные напряжения σ_x. В непосредственной близости от поверхности действуют сжимающие напряжения σ_x, которые препятствуют развитию микродефектов, и лишь на некоторой глубине возникают нежелательные растягивающие напряжения. Следовательно, в данном случае приповерхностные слои сопряженных тел как бы подвергаются дополнительному упрочняющему действию.

ЛИТЕРАТУРА

1. Развитие теории контактных задач в СССР. М.: Наука, 1976. 493 с.
2. *Попов Г. Я.* К теории изгиба плит на упругом неоднородном полупространстве.— Изв. вузов. Строительство и архитектура, 1959, № 11, 12, с. 11—19.
3. *Плевако В. П.* О возможности использования гармонических функций при решении задач теории упругости неоднородных сред.— ПММ, 1972, т. 36, вып. 5, с. 886—894.
4. *Писаренко Г. С., Трощенко В. Т., Красовский А. Я.* Исследование механических свойств пористого железа при растяжении и кручении. Сообщ. 2.— Порошковая металлургия, 1965, № 7, с. 88—96.
5. *Кузнецов Е. А., Гороховский Г. А.* Фрикционное взаимодействие шероховатых тел с позиций механики твердого тела.— Трение и износ, 1980, т. 1, № 4, с. 638—649.
6. *Плевако В. П.* К теории упругости неоднородных сред.— ПММ, 1971, т. 35, вып. 5, с. 853—860.
7. *Плевако В. П.* Равновесие неоднородной полуплоскости под действием усилий, приложенных к границе.— ПММ, 1973, т. 37, вып. 5, с. 905—913.

8. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1971. 576 с.
9. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971. 1108 с.
10. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Таблицы интегральных преобразований. Т. 1. М.: Наука, 1969. 343 с.
11. *Попов Г. Я.* Об одном способе решения осесимметричной контактной задачи теории упругости.— ПММ, 1961, т. 25, вып. 1, с. 76—85.
12. *Попов Г. Я.* Контактная задача теории упругости при наличии круговой области контакта.— ПММ, 1962, т. 26, вып. 1, с. 152—164.
13. *Попов Г. Я.* Пластинки на линейно-деформируемом основании. (Обзор).— Прикл. механика, 1972, т. 8, вып. 3, с. 3—17.
14. *Попов Г. Я.* Плоская контактная задача для линейно-деформируемого основания при наличии сил сцепления.— ПММ, 1973, т. 37, вып. 2, с. 254—261.
15. *Кузьменко В. А.* Новые схемы деформирования твердых тел. Киев: Наук. думка, 1973. 200 с.

Киев

Поступила в редакцию
1.VI.1981