МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 2 · 1984

УДК 539.3

ОСЕСИММЕТРИЧНАЯ ЗАДАЧА О ВДАВЛИВАНИИ КРУГЛОГО ШТАМПА В УПРУГОЕ, НЕОДНОРОДНОЕ ПО ГЛУБИНЕ ПОЛУПРОСТРАНСТВО

АЙЗИКОВИЧ С. М., АЛЕКСАНДРОВ В. М.

Рассматривается вдавливание круглого штампа в упругое, неоднородное полупространство, представляющее неоднородный слой с произвольным законом изменения неоднородности по глубине, сцепленный с упругим однородным полупространством.

Выбор модели основания связан с расчетами фундаментов на химически закрепленных просадочных грунтах. Задача сводится к решению интегрального уравнения, дается алгоритм численного построения трансформанты его ядра. На основании изучения свойств ядра интегрального уравнения предлагаются асимптотические методы его решения. Приводятся численные примеры.

1. Постановка задачи. Недеформируемый круглый штамп вдавливается в верхнюю грань Г упругого неоднородного полупространства силой P. С полупространством связана цилиндрическая система координат r, φ, z. Предполагается, что силы трения между штампом и полупространством отсутствуют. Вне штампа полупространство не загружено. Штамп представляет собой осесимметричное тело с поперечным сечением $\Omega(r\leqslant a)$ и поверхностью основания $z=f(r)$.

Коэффициенты Ламе λ и μ полупространства с глубиной изменяются по закону

$$\begin{aligned} &\lambda=\lambda_0(z), \quad \mu=\mu_0(z) \quad (0\geqslant z\geqslant -H) \\ &\lambda=\lambda_1\equiv\lambda_0(-H), \quad \mu=\mu_1\equiv\mu_0(-H) \quad (-H>z>-\infty) \end{aligned} \tag{1.1}$$

где $\lambda_0(z)$, $\mu_0(z)$ — произвольные гладкие функции.

Под действием центрально приложенной силы P штамп переместится в направлении оси z на величину δ. Граничные условия при сделанных предположениях имеют вид $(z=0)$:

$$\tau_{zr}=\tau_{z\varphi}=0, \quad \sigma_z=0 \quad (r<a); \quad w=-\delta(r)=-[\delta-f(r)] \quad (r\leqslant a) \tag{1.2}$$

Предполагается, что на границе изменения закона неоднородности имеют место условия сопряжения по напряжениям и перемещениям $(z=-H)$:

$$\sigma_z^{(1)}=\sigma_z^{(2)}, \quad \tau_{zr}^{(1)}=\tau_{zr}^{(2)}, \quad w^{(1)}=w^{(2)}, \quad u^{(1)}=u^{(2)} \tag{1.3}$$

Индекс (1) относится к величинам, принадлежащим неоднородному слою, индекс (2) — к величинам, принадлежащим к однородному полупространству. При $(r, -z)\to\infty$ напряжения в полупространстве исчезают.

Требуется определить связь между силой P и перемещением штампа, а также распределение нормальных напряжений под штампом

$$\sigma_z^{(1)}|_{z=0}=-q(r) \quad (r\leqslant a) \tag{1.4}$$

Поставленная задача сводится к решению интегрального уравнения вида

$$\int_0^1 \tau(\rho)\rho\, d\rho \int_0^\infty L(\gamma) J_0\left(\frac{\gamma r}{\varkappa}\right) J_0\left(\frac{\gamma\rho}{\varkappa}\right) d\gamma = \varkappa\theta_0(0)\delta(r) \quad (r\leqslant 1),$$

$$\varkappa = Ha^{-1}, \quad q(r) = \tau\left(\frac{r}{a}\right) \tag{1.5}$$

Функция $L(\gamma)$ строится численно.

В статических уравнениях равновесия Ламе

$$r\frac{\partial\sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial r}(r\tau_{zr}) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial r}(r\sigma_r) - \sigma_\theta + r\frac{\partial\tau_{rz}}{\partial z} = 0$$

$$\sigma_z = 2\mu\frac{\partial w}{\partial z} + \lambda\Theta, \quad \sigma_r = 2\mu\frac{\partial u}{\partial r} + \lambda\Theta, \quad \sigma_\theta = 2\mu\frac{u}{r} + \lambda\Theta$$

$$\tau_{rz} = \mu\left(\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z}\right), \quad \Theta = \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r}$$

представим перемещения u и w в виде интегралов Ханкеля

$$u_k(r,z) = -\int_0^\infty U_k(\gamma,z) J_1(\gamma,r)\gamma\, d\gamma, \quad w_k(r,z) = \int_0^\infty W_k(\gamma,z) J_0(\gamma r)\gamma\, d\gamma \quad (k=1,2) \tag{1.6}$$

Тогда относительно $U_k(\gamma, z)$, $W_k(\gamma, z)$ уравнения равновесия Ламе можно представить в форме

$$U_i''(\gamma,z) - \frac{\lambda+2\mu}{\mu}\gamma^2 U_i(\gamma,z) + \frac{\lambda+\mu}{\mu}\gamma W_i' + \frac{\mu'}{\mu}\gamma W_i + \frac{\mu'}{\mu}U_i'(\gamma,z) = 0$$

$$\frac{\lambda+2\mu}{\mu}W_i''(\gamma,z) + \frac{\lambda'+2\mu'}{\mu}W_i'(\gamma,z) - \gamma^2 W_i(\gamma,z) -$$

$$-\frac{\lambda+\mu}{\mu}U_i'(\gamma,z) - \frac{\lambda'}{\mu}U_i(\gamma,z) = 0 \quad {\scriptstyle (i=1)} \quad z\in(0,-H) \quad {\scriptstyle (i=2)} \quad z\in(-H,-\infty) \tag{1.7}$$

Введем вспомогательные функции

$$U_i^*(\gamma, y) = -\theta_0 U_i(\gamma, y)|\gamma|/Q(\gamma), \quad V_i^*(\gamma, y) = -\theta_0 V_i(\gamma, y)|\gamma|/Q(\gamma)$$

$$\theta_0 = 2\mu(0)[\lambda(0)+\mu(0)][\lambda(0)+2\mu(0)]^{-1}, \quad Q(\gamma) = \int_0^a q(\rho) J_0(\gamma\rho)\rho\, d\rho \quad (i=1,2)$$

где $Q(\gamma)$ — трансформанта Ханкеля искомой функции $q(\rho)$.

Для сведения смешанной задачи к интегральному уравнению необходимо построить функцию $W_1^*(\gamma, 0)$. После определения $W_1^*(\gamma, 0)$, используя условия (1.2), придем к уравнению вида (1.5), где $L(\gamma) \equiv W_1^*(\gamma, 0)$.

Приведем схему построения функции $W_1^*(\gamma, 0)$. Используя условие (1.1), получим, что при $z<-H$ система (1.7) вырождается в систему обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. С учетом ограниченности напряжений при $z\to-\infty$ общий вид решения при $z\leqslant -H$ будет иметь вид, где d_1, d_2 — неопределенные постоянные

$$U_2^*(\gamma,z) = (d_1 + |\gamma| z d_2) e^{|\gamma| z}, \quad W_2^*(\gamma,z) = \operatorname{sign}\gamma\left\{\left[d_1 - \frac{\lambda+3\mu}{\lambda+\mu}d_2\right] + |\gamma| z d_2\right\} e^{|\gamma| z} \tag{1.8}$$

Введем обозначения $v_1=U_1^*$, $v_2=dU_1^*/dz$, $v_3=W_1^*$, $v_4=dW_1^*/dz$. Систему уравнений (1.7) перепишем в матричной форме

$$d\mathbf{v}/dz=\mathbf{A}^{\vee}\mathbf{v}$$

$$\mathbf{A}^{\vee}=\begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \gamma^2\dfrac{2\mu+\lambda}{\mu} & -\dfrac{\mu'}{\mu} & -\gamma\dfrac{\mu'}{\mu} & -\gamma\dfrac{\mu+\lambda}{\mu} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \gamma\dfrac{\lambda}{2\mu+\lambda} & \gamma\dfrac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda} & \gamma^2\dfrac{\mu}{2\mu+\lambda} & -\dfrac{2\mu'+\lambda'}{2\mu+\lambda} \end{Vmatrix},\quad \mathbf{v}=\begin{Vmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{Vmatrix} \tag{1.9}$$

Численное решение краевой двухточечной задачи (1.9), (1.2) (1.3) построим методом моделирующих функций [1]. Ищем $\mathbf{v}(\gamma, z)$ в виде

$$\mathbf{v}(\gamma, z)=d_1(\gamma)\mathbf{a}_1(\gamma, z)e^{|\gamma|z}+d_2(\gamma)\mathbf{a}_2(\gamma, z)e^{|\gamma|z} \tag{1.10}$$

Векторы $\mathbf{a}_i(\gamma, z)$ $(i=1, 2)$ находятся из задач Коши

$$d\mathbf{a}_i/dz=\mathbf{A}^{\vee}a_i-|\gamma|\mathbf{a}_i\ (-H\leqslant z\leqslant 0)\ {}_{(i=1,\,2)},\ \mathbf{a}_1(\gamma, z)|_{z=-H}=(1, \gamma, 1, \gamma) \tag{1.11}$$

$$\mathbf{a}_2(\gamma, z)|_{z=-H}=\left(\gamma z, \gamma^2 z+\gamma, \frac{\lambda+3\mu}{\lambda+\mu}+\gamma z, \gamma\left(\frac{\lambda+3\mu}{\lambda+\mu}+\gamma z+1\right)\right)\Bigg|_{z=-H} \tag{1.12}$$

Функции $d_1(\gamma)$ и $d_2(\gamma)$ определяются из граничных условий (1.2)

$$d_1(\gamma)[a_1^2(\gamma)-\gamma a_1^3(\gamma)]+d_2(\gamma)[a_2^2(\gamma)+\gamma a_2^3(\gamma)]=0$$

$$d_1(\gamma)\{-\lambda(0)\gamma a_1^1(\gamma)+[\lambda(0)+2\mu(0)]a_1^4(\gamma)\}+$$
$$+d_2(\gamma)\{-\lambda(0)\gamma a_2^1(\gamma)+[\lambda(0)+2\mu(0)]a_2^4(\gamma)=\theta(0)\gamma$$

$$\mathbf{a}_i(\gamma, z)|_{z=0}=(a_i^1(\gamma), a_i^2(\gamma), a_i^3(\gamma), a_i^4(\gamma))\quad (i=1,\,2)$$

Из (1.10) окончательно имеем $W_1^*(\gamma, 0)=d_1(\gamma)a_1^3(\gamma)+d_2(\gamma)a_2^3(\gamma)$. Можно показать, что построенная функция $L(\gamma)$ обладает следующими свойствами:

$$L(\gamma)=A+B\gamma+C\gamma^2+O(\gamma^3)\quad (\gamma\to 0) \tag{1.13}$$

$$L(\gamma)=1+D\gamma^{-1}+E\gamma^{-2}+I\gamma^{-3}+O(\gamma^{-4})\quad (\gamma\to\infty)$$

$$A=\theta(0)\theta^{-1}(-H),\quad \theta=2\mu(\lambda+\mu)(\lambda+2\mu)^{-1} \tag{1.14}$$

где B, C, D, E, I — некоторые постоянные.

Для многослойных оснований аналогичные свойства функций податливости отмечены в [1].

Свойство (1.14) означает, что значение $L(0)$ не зависит от того, каким образом изменяются коэффициенты Ламе в слое от $z=0$ до $z=-H$, а определяется только этими значениями. Графически это можно записать так: если множество кривых, описывающее некоторые законы изменения коэффициентов Ламе, имеют одинаковые значения коэффициентов Ламе на поверхности полупространства и на глубине $-H$, то графики соответствующих трансформант $L(\gamma)$ будут выходить из одной общей точки $L(0)=\theta(0)\theta^{-1}(-H)$ и сходиться в одну точку $L_{(\infty)}=1$.

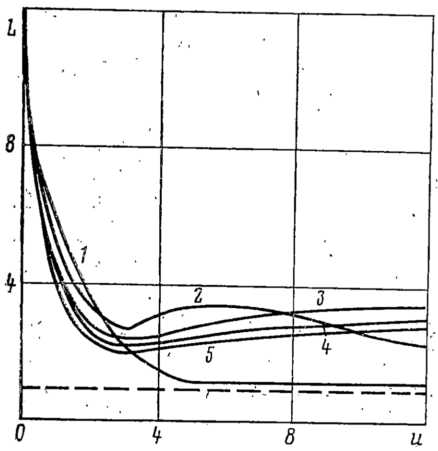
На фиг. 1 приведены графики трансформант ядер интегральных уравнений $L(\gamma)$, построенных численно для случаев, когда модуль Юнга полупространства с глубиной изменяется по закону:

$$E^*(z)=E_0 f(z)\ (z\in(0, -1)),\quad E^*(z)=E_0 f(-1),\quad z\in(-1, -\infty)$$

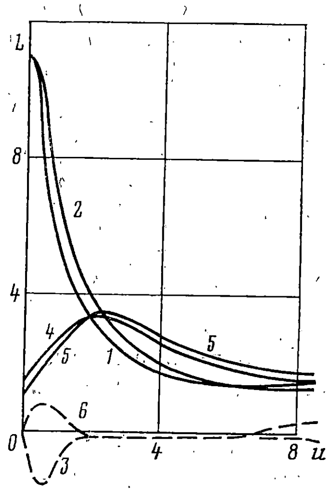
$f(z)=1{,}1+\sin(0{,}5\,k\pi z)$, а коэффициент Пуассона $\nu=1/3$. Связь коэффициентов Ламе с модулем Юнга и коэффициентом Пуассона имеет вид [2]: $\mu=\frac{1}{2}E^*/(1+\nu)$, $\lambda=E^*\nu/[(1+\nu)(1-2\nu)]$. Кривые *1–5* соответствуют значениям $k=1$, 5, 9, 13, 17. Пунктирная

---

[1] *Глушков Е. В.* Динамические контактные задачи для штампов произвольной в плане формы на неоднородных средах: Дис. на соискание уч. ст. канд. физ.-матем. наук. Ростов н/Д: Изд-во Рост. ун-та, 1978. 101 с.



Фиг. 1



Фиг. 2

прямая соответствует случаю однородного полупространства с $E^*(z)=E_0 f(-1)$, $z\in(0,-\infty)$.

Приведенные графики подтверждают, что независимо от закона изменения неоднородности по глубине значение $L(0)$ определяется значениями упругих модулей при $z=0$ и $z\to\infty$ (в данном случае величиной отношения $E^*(0)/E^*(-1)$).

Введем определения.

Определение 1.1. Функция $L(u)$ принадлежит классу Π_N, если

$$L(\alpha\lambda)=L_\Pi^N(\alpha\lambda)\equiv\prod_{i=1}^{N}(\alpha^2+A_i^2\lambda^{-2})(\alpha^2+B_i^2\lambda^{-2}),\qquad (B_i-B_k)(A_i-A_k)\neq 0\quad (i\neq k) \tag{1.15}$$

где A_i, B_i $(i=1,2\ldots N)$ — некоторые постоянные.

Определение 1.2. Функция $L(u)$ принадлежит классу Σ_M, если

$$L(\alpha\lambda)=L_\Sigma^M(\alpha\lambda)\equiv\sum_{k=1}^{M}\frac{c_k\lambda^{-1}|\alpha|}{\alpha^2+D_k^2\lambda^{-2}} \tag{1.16}$$

Определение 1.3. Функция $L(u)$ принадлежит классу $S_{N,M}$, если

$$L(\alpha\lambda)=L_\Pi^N(\alpha\lambda)+L_\Sigma^M(\alpha\lambda) \tag{1.17}$$

Покажем, что выражениями вида (1.17) можно аппроксимировать $L(u)$ со свойствами (1.13) и (1.14). Для этого используется [3, 4].

Лемма 1.1. Пусть четная, вещественная, непрерывная на всей вещественной оси функция $\varphi(u)$ обращается в нуль на бесконечности, тогда она допускает приближение в $C(-\infty,\infty)$ рядами из функций $\varphi_k(u)=(u^2+D_k^2)^{-1}$. Эту лемму используем для доказательства следующего утверждения.

Теорема 1.1. Если функция $L(u)$ обладает свойствами (1.13) и (1.14), то она допускает аппроксимацию выражениями вида (1.17).

Доказательство. Выберем постоянные A_i и B_i в (1.15) так, чтобы

$$\prod_{i=1}^{N}A_i^2B_i^{-2}=A \tag{1.18}$$

Рассмотрим функцию

$$L_\Sigma(u)=(L(u)-L_\Pi^N(u)|u|^{-1}) \tag{1.19}$$

На основании свойств (1.13) и (1.14) и условия (1.18) следует, что $L_\Sigma(u)$ удовлетворяет условию леммы 1.1. Это означает, что имеет место представление

$$L_\Sigma(u)=\sum_{k=1}^{\infty} c_k(u^2+D_k^2)^{-1}, \quad L(u)=L_\Pi{}^N(u)+|u|\sum_{k=1}^{\infty} c_k(u^2+D_k^2)^{-1} \tag{1.20}$$

2. Метод больших $\varkappa$ ($\varkappa\geqslant2$). Преобразуя (1.5) аналогично [5], получим следующее уравнение относительно вспомогательной функции $\varphi(t)$:

$$\varphi(t)=\frac{1}{\pi\varkappa}\int_{-1}^{1}\varphi(\tau)P\left(\frac{t-\tau}{\varkappa}\right)d\tau+g(t) \quad (|t|\leqslant1)$$

$$g(t)=\theta(0)\frac{d}{dt}\int_0^t\frac{\tau\delta(\tau)}{\sqrt{t^2-\tau^2}}d\tau \tag{2.1}$$

$$\tau(r)=\frac{2d}{\pi\,dr}r\int_r^1\frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{\tau\sqrt{\tau^2-r^2}}, \quad P(y)=\int_0^\infty[1-L(u)]\cos uy\,du$$

Выясним структуру ядра $P(y)$. Из (1.13), (1.14) имеем

$$M(\gamma)\equiv L(\gamma)-1=(A-1)+B\gamma+C\gamma^2+O(\gamma^3) \quad (\gamma\to0)$$
$$M(\gamma)\equiv L(\gamma)-1=D\gamma^{-1}+E\gamma^{-2}+I\gamma^{-3}+O(\gamma^{-4}) \quad (\gamma\to\infty) \tag{2.2}$$

На основании свойств (2.2), используя [6], для $P(y)$ получим следующее асимптотическое представление:

$$P(y)=D\ln|y|+{}^1/_2\pi E|y|-a_{30}-{}^1/_2Iy^2\ln|y|+a_{31}y^2+\ldots \tag{2.3}$$

$$a_{30}=\int_0^\infty\frac{[L(u)-1]u-D(1-e^{-u})}{u}du$$

$$a_{31}=\frac{3}{4}I-\frac{1}{2}\int_0^\infty[Du^2-u^2(L(u)-1)+Eu+I(1-e^{-u})]\frac{du}{u}$$

Отсюда вытекает, что решение уравнения (2.1) следует искать в форме

$$\varphi(t)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\varphi_{mn}(t)\varkappa^{-m}\ln^n\varkappa \tag{2.4}$$

Подставляя (2.3), (2.4) в (2.1) и приравнивая члены при одинаковых степенях $\varkappa^{-1}$ и $\ln\varkappa$ в правой и левой частях (2.1), получим рекуррентные соотношения для нахождения $\varphi_{mn}(t)$. Причем видно, что $\varphi_{mn}(t)=0$ при $n>m$.

В случае плоского штампа выражение для контактных напряжений имеет вид

$$\tau(r)=2\theta(0)\delta\pi^{-1}\left\{1-\frac{2D}{\pi}\frac{\ln\varkappa}{\varkappa}-\frac{2a_{30}}{\pi}\frac{1}{\varkappa}+\frac{\ln}{\varkappa^2}\left[\frac{8Da_{30}}{\pi^2}+\frac{2D^2}{\pi^2}(2\ln2-1)\right]\right\}\times$$
$$\times(\sqrt{1-r^2})^{-1}+2\theta_0\delta\pi^{-1}\left[\frac{D}{\pi\varkappa}-\frac{D^2}{\pi^2}\frac{\ln\varkappa}{\varkappa}\right)\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{f_k(r)}{(2k-1)}+O(\varkappa^{-2})\right]$$

$$f_1(r)=\sqrt{1-r^2}-r^2(1-r^2)^{-1/2},\quad f_2(r)={}^1/_3(1-r^2)^{3/2}+2r^2(1-r^2)^{1/2}-r^4(1-r^2)^{-1/2}$$

$$f_3(r)={}^1/_5(1-r^2)^{5/2}+{}^7/_2r^2(1-r^2)^{3/2}+{}^1/_2r^4(1-r^2)^{1/2}-r^6(1-r^2)^{-1/2}$$

$$f_4(r)={}^1/_7(1-r^2)^{7/2}+{}^4/_5r^2(1-r^2)^{5/2}+2r^4(1-r^2)^{3/2}+4r^6(1-r^2)^{1/2}+r^8(1-r^2)^{-1/2},\ldots$$

Связь перемещения с приложенной силой имеет следующую форму:

$$P=4\delta a\theta(0)\left\{1-\frac{2D}{\pi}\frac{\ln\varkappa}{\varkappa}+\left[\frac{D}{\pi}(2\ln 2-1)-\frac{2a_{30}}{\pi}\right]\frac{1}{\varkappa}+\right.$$

$$\left.+\frac{\ln\varkappa}{\varkappa}\left[8\frac{Da_{30}}{\pi^2}-4\frac{D^2}{\pi^2}(2\ln 2-1)+O(\varkappa^{-2})\right\}\right.$$

3. **Метод ортогональных многочленов** ($\varkappa\geqslant 1$), [8, 10]. Запишем уравнение (2.1):

$$\varphi(t)=\frac{2}{\pi\varkappa}\int_0^1\varphi(r)\{[1-L(\varkappa u)]\cos ut\cos u\tau\,du\,d\tau+g(t)\tag{3.1}$$

где $g(t)$ и $\varphi(t)$ — четные функции.

Разложим ядро

$$N(\tau,t)=\int_0^\infty[1-L(u)]\cos\frac{ut}{\varkappa}\cos\frac{u\tau}{\varkappa}du\tag{3.2}$$

в двойной ряд по четным полиномам Лежандра

$$N(\tau,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}c_{2n,2m}P_{2n}(\tau)P_{2m}(t)$$

$$c_{2n,2m}=\frac{\pi}{2}\frac{\varkappa(-1)^{n+m}}{[(4n+1)(4m+1)]^{-1}}\int_0^\infty[1-L(u)]J_{2n+1/2}\left(\frac{u}{\varkappa}\right)J_{2m+1/2}\left(\frac{u}{\varkappa}\right)\frac{du}{u}\tag{3.3}$$

Коэффициенты $c_{2n,\,2m}$ получены с использованием ортогональности полиномов Лежандра на отрезке [0, 1].

Решение уравнения (3.1) будем искать в виде ряда

$$\varphi(t)=\sum_{i=0}^{\infty}S_kP_{2k}(t)\tag{3.4}$$

Подставляя (3.4), (3.3) в (3.1) и приравнивая коэффициенты при одинаковых полиномах, получим бесконечные системы для определения S_k:

$$S_i=\frac{2}{\pi\varkappa}\sum_{k=0}^{\infty}S_kc_{2i.2k}(4k+1)^{-1}+G_i)\quad(i=0,1,\ldots)\tag{3.5}$$

где G_i — коэффициенты разложения $g(t)$ в ряд вида (3.4).

Систему (3.5) решим методом урезания, полагая $i+k\leqslant n$; в частности, для $n=1$ выражение для напряжений примет вид

$$\tau(r)=2\theta(0)\delta\pi^{-1}\left[S_0-\frac{S_1}{2}\frac{1}{\sqrt{1-r^2}}+{}^3/_2S_1\left(\frac{r^2}{\sqrt{1-r^2}}-\sqrt{1-r^2}\right)+\ldots\right]\tag{3.6}$$

Вдавливающая сила связана с перемещением штампа соотношением

$$P=4a\theta(0)\delta\int_0^1\tau(r)\,dr=4a\theta(0)\delta S_0$$

4. Двухстороннее асимптотическое решение при малых и больших значениях $\varkappa$ ($\varkappa \to 0$, $\varkappa \to \infty$). 1. Рассмотрим существование и единственность решения интегрального уравнения задачи при $L(u)$ класса Π_N.

Определение 4.1. Будем говорить, что абсолютно интегрируемая на отрезке $[0, 1]$ функция $f(x)$ удовлетворяет условию M_0, если имеет место разложение Фурье — Бесселя

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n J_0(\lambda_n x), \quad \sum_{n=1}^{\infty} |a_n \lambda_n| \leqslant M_f^{\circ}(-1, 1) < \infty \tag{4.1}$$

где $M_f(-1, 1)$ — некоторая постоянная. Используя соотношение

$$\tau(r) = \int_0^{\infty} T(\gamma) J_0(\gamma r) \gamma d\gamma, \quad T(\gamma) = \int_0^{a} \tau(\rho) J_0(\gamma\rho) \rho\, d\rho \tag{4.2}$$

перепишем (1.5) в виде парного уравнения

$$\int_0^{\infty} T(\gamma) L(\varkappa\gamma) J_0(\gamma r) d\gamma = \theta_0(0) \delta [1 + f(r)] \quad (0 \leqslant r \leqslant 1);$$

$$\int_0^{\infty} T(\gamma) J_0(\gamma r) d\gamma = 0 \quad (r > 1) \tag{4.3}$$

Лемма 4.1. Если $f(r)$ — четная функция и удовлетворяет условию M_0, то уравнение (4.3) однозначно разрешимо в классе функций $C_{1/2}^{(0)+}(-1, 1) = C$ при $L(u)$ класса Π_N и имеет место оценка

$$\|\tau(r)\|_C \leqslant m(\Pi_N) M_f^{\circ}(-1, 1) \tag{4.4}$$

Доказательство. Так как $f(r)$ удовлетворяет условию M_0, то ее можно представить в виде ряда Фурье — Бесселя

$$f(r) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k J_0(\mu_k r) \tag{4.5}$$

Используя метод из [9], получим выражение для напряжений [2]

$$\tau(r) = 2\theta(0)\delta\pi^{-1} \left[L_N^{-1}(0) \frac{1}{\sqrt{1-r^2}} + \sum_{i=1}^{N} C_i \psi\left(r \frac{A_i}{\varkappa}\right) + \sum_{j=1}^{\infty} b_j L_N^{-1}(\varkappa\mu_j) f(r, \mu_j) \right]$$

$$\psi(r, A) = \frac{\operatorname{ch} A}{\sqrt{1-r^2}} - A \int_r^1 \frac{\operatorname{sh} At\, dt}{\sqrt{t^2-r^2}}, \quad f(r, \varepsilon) = \frac{\cos \varepsilon}{\sqrt{1-r^2}} + \varepsilon \int_r^1 \frac{\sin t\varepsilon\, dt}{\sqrt{t^2-r^2}} \tag{4.6}$$

Постоянные C_i определяются из системы линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{i=1}^{N} C_i \alpha \left(\frac{B_k}{\varkappa}; \frac{A_i}{\varkappa} \right) + L_N^{-1}(0) B_k^{-1} + \sum_{j=1}^{\infty} b_j \beta \left(\frac{B_k}{\varkappa}; \mu_j \right) = 0 \quad (k=1, 2, \ldots, N) \tag{4.7}$$

[2] *Айзикович С. М.* Асимптотические методы в задаче о вдавливании кругового в плане штампа в неоднородное по глубине полупространство.— Всес. конф. по теории упругости: Тез. докл. Ереван: Изд-во АН АрмССР, 1979, с. 19—20.

$$\alpha(B,A)=\frac{B\,\mathrm{ch}\,A+A\,\mathrm{sh}\,A}{B^2-A^2},\quad \beta(B,\mu)=\frac{B\cos\mu-\mu\sin\mu}{L_N(\varkappa\mu)(B^2+\varkappa^2\mu^2)}$$

которая однозначно разрешима, если A_i, B_k удовлетворяют условиям (1.15). Заметим, рассматривая выражения (4.6) и (4.7), что если функция $f(r)$, стоящая в правой части (4.3), удовлетворяет условию M_0, то ряды в выражениях (4.6) и (4.7) являются сходящимися, отсюда следует утверждение леммы и оценка (4.4). В данном случае связь между приложенной силой и осадкой штампа имеет вид

$$P=4\pi a\delta\theta_0(0)\left[L_N^{-1}(0)+\sum_{i=1}^{N}C_iA_i^{-1}\varkappa\,\mathrm{sh}\,A_i\varkappa^{-1}+\sum_{j=1}^{\infty}b_jL_N^{-1}(\varkappa\mu_j)\mu_j^{-1}\sin\mu_j\right] \tag{4.8}$$

Запишем уравнение (4.3) для $L(u)$ класса Π_N через операторы $\Pi_N\tau=f$.

Теорема 4.1 (следствие леммы 4.1). Если имеют место условия леммы 4.1, то оператор Π_N обратимый и имеет место оценка

$$\|\tau(r)\|_C\leqslant\|\Pi_N^{-1}\|mM_f^{\circ}(-1,\ 1) \tag{4.9}$$

2. Рассмотрим существование и единственность решения интегрального уравнения задачи при $L(u)$ класса $S_{N,M}$. Уравнение (4.3) при $L(u)$ класса $S_{N,M}$ через операторы запишем в виде

$$\Pi_N\tau+\Sigma_M\tau=f \tag{4.10}$$

Лемма 4.2. Оператор $\Pi_N^{-1}\Sigma_M$ задачи является оператором сжатия в пространстве C при выполнении условий леммы 3.6, если $0<\varkappa<\varkappa^*$ или $\varkappa>\varkappa^{\circ}$, где $\varkappa^*$ и $\varkappa^{\circ}$ — некоторые фиксированные значения.

Доказательство. Рассмотрим оператор $\Sigma_M\tau$. Не нарушая общности, полагаем $M=1$. Имеем

$$\Sigma_1\tau=\int_0^1\tau(\rho)\rho\left[\int_0^{\infty}\frac{c\varkappa^{-1}\gamma}{\gamma^2+D^2\varkappa^{-2}}J_0(\gamma r)J_0(\gamma\rho)\,d\gamma\right]d\rho \tag{4.11}$$

Представим $\Sigma_1\tau$ в виде ряда Фурье — Бесселя

$$\Sigma_1\tau=\sum_{k=1}^{\infty}a_kJ_0(\mu_kr) \tag{4.12}$$

Коэффициенты a_k находятся по следующим формулам:

$$a_k=\frac{2c\varkappa^{-1}}{J_1^2(\mu_k)(\mu_k^2+D^2\varkappa^{-2})}\left[\tau(\rho)\rho J_0(\rho\mu_k)\,d\rho-\mu_kJ_1(\mu_k)\times\right.$$

$$\left.\times K_0\left(\frac{D}{\varkappa}\right)\int_0^1\tau(\rho)\rho I_0\left(\frac{\rho D}{\varkappa}\right)d\rho\right] \tag{4.13}$$

Используя асимптотические оценки цилиндрических функций мнимого аргумента [11]:

$$K_0(z)\sim-\ln x,\quad I_0(z)\sim1\quad\text{при}\quad z\to0;\quad K_0(z)\sim\sqrt{\frac{\pi}{2z}}e^{-z},$$
$$I_0(z)\sim\frac{e^z}{\sqrt{2\pi z}}\quad\text{при}\quad z\to\infty \tag{4.14}$$

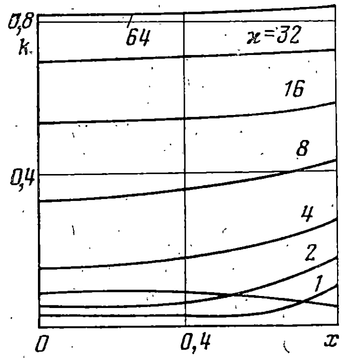
из (4.13) получим следующие оценки:

$$\max_{r\in(-1,1)}\left|\sum\nolimits_1(\tau)\sqrt{1-r^2}\right|\leqslant c\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|\leqslant \varkappa M^* \quad (\varkappa\to 0) \quad (\varkappa>\varkappa^*)$$

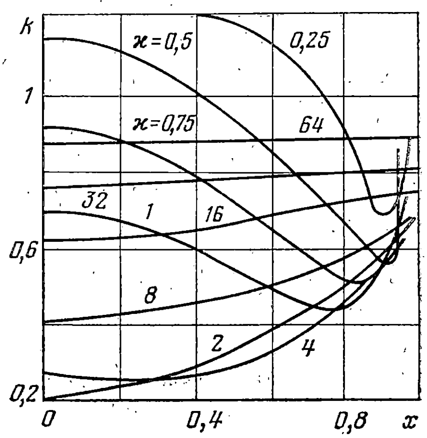
$$\max_{r\in(-1,1)}|\Sigma_1(\tau)\sqrt{1-r^2}|\leqslant c\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|\leqslant\varkappa^{-1}\ln\varkappa M^\circ \quad (\varkappa\to\infty) \quad (\varkappa>\varkappa^\circ) \tag{4.15}$$

где постоянные M^* и M° не зависят от $\varkappa$.

Отсюда аналогично оценкам леммы 4.1 получим, что $\varkappa$ можно выбирать таким образом, что оператор $\Pi_N^{-1}\Sigma_M$ будет оператором сжатия [12] при условиях данной леммы.



Фиг. 3



Фиг. 4

На основании этого, применяя к уравнению

$$\tau+\Pi_N^{-1}\Sigma_M\tau=\Pi_N^{-1}f \tag{4.16}$$

принцип Банаха сжатых отображений, получаем доказательство существования и единственности решения уравнения (4.3) при наложенных ограничениях.

Это означает, что имеет место

Теорема 4.2. Уравнение (4.3) однозначно разрешимо в пространстве $\mathbb{C}$ при $L(u)$ класса $S_{N,M}$, если $f(r)$ четна и удовлетворяет условию M_0 при $0<\varkappa<\varkappa^*$ или $\varkappa>\varkappa^\circ$, где $\varkappa^*$ и $\varkappa^\circ$ — некоторые фиксированные значения и имеет место оценка

$$\|\tau(r)\|_{\mathrm{C}}\leqslant m(\Pi_N,\Sigma_M)M_f^\circ(-1,1) \tag{4.17}$$

Окончательно сформулируем следующую теорему.

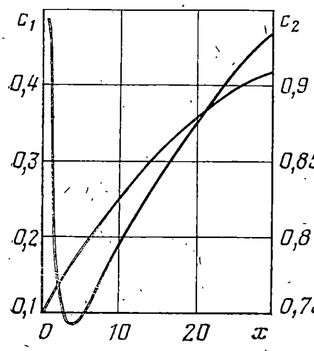
Теорема 4.3. Уравнение (4.3) однозначно разрешимо в пространстве $\mathbb{C}$, если $f(r)$ четна и удовлетворяет условию M_0 при $0<\varkappa<\varkappa^*$ или $\varkappa>\varkappa^\circ$, где $\varkappa^*$ и $\varkappa^\circ$ — некоторые фиксированные значения, при этом имеет место оценка

$$\|\tau(r)\|_{\mathrm{C}}\leqslant m(\Pi_N,\Sigma_\infty)M_f^\circ(-1,1). \tag{4.18}$$

Доказательство теоремы 4.3 следует из утверждения теорем 1.1 и 4.2 аналогично приведенному в [13, 14].

При численной реализации расширения диапазона применимости изложенного метода по $\varkappa$ можно добиться за счет улучшения приближения $L(u)$ функциями класса Π_N.

5. **Примеры.** На фиг. 2 приведены графики трансформант ядер $L(u)$, соответствующие синусоидальному закону неоднородности (см. п. 1) при $k=1$ (кривая *1*) и при $k=2$ (кривая *4*), а также графики аппроксимаций их выражениями вида (1.15) ($N=15$); кривая *2* соответствует $k=1$, кривая *5* – $k=2$. Пунктирные кривые соответствуют разности между точным и аппроксимирующим значением трансформанты вида (1.15): кривая *3* соответствует $k=1$, кривая *6* – $k=2$.



Фиг. 5

Графики величины $k(r)=\sigma_H(r)\sigma_0^{-1}(r)$, характеризующей распределение контактных нормальных напряжений под штампом на неоднородном основании $\sigma_H(r)$, по сравнению с однородным $\sigma_0(r)$ ($\sigma_0(r)$ – распределение контактных напряжений под штампом для однородного полупространства с модулем Юнга $E^*=E_0(0)$) приведены на фиг. 3, 4 ($k=1, 2$). Значения $\sigma_H(r)$ найдены двусторонним асимптотическим методом $f(r)=0$.

Видно, что при больших $\varkappa$ распределение контактных давлений подобно распределению для однородного полупространства. С уменьшением $\varkappa$ начинают сильно проявляться свойства, связанные с законом изменения модулей упругости по глубине в верхнем слое по отношению к нижележащему однородному полупространству.

Возрастание модулей упругости с глубиной непосредственно у границы полупространства приводит к тому, что в окрестности края штампа при приближении изнутри к краю наблюдается увеличение величины $k(r)$.

Изменение величины $c(\varkappa)=\delta_H\delta_{E^*(0)}^{-1}$, характеризующее влияние неоднородности основания на осадку штампа δ_H по сравнению с однородным полупространством $\delta_{E^*(0)}$ при одной и той же величине вдавливающей силы p, в зависимости от $\varkappa$ показано на фиг. 5. Значения $c(\varkappa)$ получены двусторонним асимптотическим методом $f(r)=0$. Кривая *1* соответствует $k=1$ (c_1), а кривая *2* – $k=2$ (c_2).

Из фиг. 5 (кривая *2*) видно, что при некоторых немонотонных законах неоднородности (для одного и того же вида неоднородности) имеют место одинаковые осадки штампа для двух разных толщин неоднородного слоя при неизменных величинах вдавливающей силы и радиуса штампа.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Приварников А. К.* Пространственная деформация многослойного основания.– Устойчивость и прочность элементов конструкций: Сб. статей. Изд-е Днепропетров. ун-та, 1973, с. 27–45.
2. *Лурье А. И.* Теория упругости. М.: Наука, 1970. 824 с.
3. *Ахиезер Н. И.* Лекции по теории аппроксимации. М.: Наука, 1965. 407 с.
4. *Бабешко В. А.* Асимптотические свойства решений некоторых двумерных интегральных уравнений.– Докл. АН СССР, 1972, т. 206, № 5, с. 1074–1077.
5. *Александров В. М., Чебаков М. И.* Смешанные задачи механики сплошных сред, связанные с интегральными преобразованиями Ханкеля и Мелера – Фока.– ПММ, 1972, т. 36, вып. 3, с. 494–504.
6. *Александров В. М., Белоконь А. В.* Асимптотическое решение одного класса интегральных уравнений и его применение к контактным задачам для цилиндрических упругих тел.– ПММ, 1967, т. 31, вып. 4, с. 704–710.
7. *Ворович И. И., Александров В. М., Бабешко В. А.* Неклассические смешанные задачи теории упругости. М.: Наука, 1974. 455 с.
8. *Попов Г. Я.* Метод ортогональных многочленов.– В кн.: Развитие теории контактных задач в СССР. М.: Наука, 1976, с. 46–56.
9. *Александров В. М.* О решении одного класса парных уравнений.– Докл. АН СССР, 1973, т. 10, № 1, с. 55–58.
10. *Александров В. М.* О приближенном решении некоторых интегральных уравнений теории упругости и математической физики.– ПММ, 1967, т. 31, вып. 6, с. 1117–1131.
11. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971. 1108 с.
12. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1977. 742 с.
13. *Бабешко В. А.* Интегральные уравнения свертки первого рода на системе отрезков, возникающие в теории упругости и математической физике.– ПММ, 1971, т. 35, вып. 1, с. 88–99.
14. *Бабешко В. А.* Новый эффективный метод решения динамических контактных задач.– Докл. АН СССР, 1974, т. 217, № 4, с. 777–780.

Москва, Ростов-на-Дону

Поступила в редакцию
4.X.1982