УДК 534.11

КОРРЕЛЯЦИОННЫЕ И СПЕКТРАЛЬНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ КВАДРАТА АМПЛИТУДЫ КОЛЕБАНИЙ СИСТЕМЫ С ВНЕШНИМ И ПАРАМЕТРИЧЕСКИМ СЛУЧАЙНЫМ ВОЗБУЖДЕНИЕМ

ДИМЕНТБЕРГ М. Ф.

Известно [1, 2], что случайные флуктуации собственной частоты системы с одной степенью свободы не влияют на форму корреляционной функции и спектральной плотности колебаний этой системы, вызываемых внешними широкополосными случайными возмущениями. В публикуемой заметке показано, что такие флуктуации существенно изменяют форму корреляционной функции центрированной компоненты квадрата амплитуды колебательного процесса в системе: эта функция представляет собой экспоненту, показатель затухания которой характеризует запас устойчивости системы в среднем квадратичном. Полученные результаты могут использоваться для идентификации системы с внешним и параметрическим случайным возбуждением.

Рассмотрим колебания системы, описываемые уравнением

$$x^{\bullet\bullet}+2\alpha x^{\bullet}+\Omega^2 x[1+\xi(t)]=\zeta(t) \tag{1}$$

в котором $\xi(t)$, $\zeta(t)$ – стационарные центрированные широкополосные случайные процессы со спектральными плотностями соответственно $\Phi_{\xi\xi}(\omega)$, $\Phi_{\zeta\zeta}(\omega)$, считающимися малыми того же порядка, что и параметр α.

Воспользовавшись в (1) заменой переменных $x=A(t)\cos\theta(t)$, $x^{\bullet}=-\Omega A(t)\times\sin\theta(t)$, $\theta=\Omega t+\varphi(t)$ и применив процедуру усреднения за период $2\pi/\Omega$ в соответствии с теоремой [3], можно для медленной переменной $V=A^2$ получить следующее стохастическое дифференциальное уравнение в смысле Ито [4, 5]:

$$V^{\bullet}=-2(\alpha-4B_\xi)V+4B_\zeta+(8B_\xi)^{1/2}V\eta_\xi(t)+(8B_\zeta V)^{1/2}\eta_\zeta(t)$$
$$B_\xi={}^1/_8\pi\Omega^2\Phi_{\xi\xi}(2\Omega),\quad B_\zeta={}^1/_2\pi\Phi_{\zeta\zeta}(\Omega)/\Omega^2 \tag{2}$$

Здесь $\eta_\xi(t)$, $\eta_\zeta(t)$ – эквивалентные случайные процессы типа белого шума единичной интенсивности. Исследуем уравнение (2) при помощи метода моментов по схеме, описанной в [5]. Прямое применение к (2) операции определения математического ожидания (обозначим эту операцию угловыми скобками) приводит к детерминистическому уравнению относительно математического ожидания $m_V=\langle V(t)\rangle$ процесса $V(t)$. При выполнении неравенства $\alpha-4B_\xi>0$, которое представляет собой условие устойчивости системы (1) в среднем квадратичном, это уравнение относительно m_V имеет стационарное решение [5]:

$$m_V=2B_\zeta/(\alpha-4B_\xi) \tag{3}$$

Перейдем к определению корреляционной функции $K_{V_0V_0}(\tau)$ и спектральной плотности $\Phi_{V_0V_0}(\omega)$ центрированной компоненты $V_0(t)=V(t)-m_V$ квадрата амплитуды $V(t)$ (имеется в виду стационарное решение уравнения (2), соответствующее установившимся колебаниям; условия существования такого решения, соответствующие устойчивости исходной системы (1) по моментам четвертого порядка, будут получены позднее). Эту задачу можно привести к общей схеме метода моментов [5] при помощи метода измерительных фильтров [6]. В соответствии с этим методом уравнение (2) дополняется следующей системой двух уравнений первого порядка, описывающей динамику измерительного фильтра

$$y_1^{\bullet}=y_2,\quad y_2^{\bullet}=-2\beta y_2-\omega^2 y_1+V-m_V \tag{4}$$

Обычными методами корреляционной теории легко показать, что при стремлении к нулю параметра β, характеризующего ширину полосы пропускания фильтра, в пределе получим

$$2\pi\Phi_{V_0V_0}(\omega)=\lim_{\beta\to 0}4\beta\langle y_1^2\rangle\omega^2 \tag{5}$$

Таким образом задача сведена к анализу расширенной системы уравнений (2), (4) методом моментов, в соответствии с которым вводится шесть переменных состояния $u_{ij}=y_iy_j$, $u_{iV}=y_iV$, $u=V^2$, $i,j=1,2$ и на основании формулы дифференцирования Ито составляется, исходя из (2), (4), система стохастических уравнений Ито относительно этих переменных. Последующее применение операции определения математического ожидания приводит к следующей системе уравнений относительно искомых моментов $K_{ij}=\langle u_{ij}\rangle$, $K_{iV}=\langle u_{iV}\rangle$, $K_{VV}=\langle u\rangle$:

$$K_{11}^{\bullet}=2K_{12},\quad K_{12}^{\bullet}=K_{22}-2\beta K_{12}-\omega^2K_{11}+K_{1V}$$
$$K_{22}^{\bullet}=-4\beta K_{22}-\omega^2K_{12}+2K_{2V},\quad K_{1V}^{\bullet}=K_{2V}-2(\alpha-4B_\xi)K_{1V}$$
$$K_{2V}^{\bullet}=-2(\alpha+\beta-4B_\xi)K_{2V}-\omega^2K_{1V}+K_{VV}-m_V^2 \tag{6}$$

$$K_{VV}^{\bullet}=-4(\alpha-6B_\xi)K_{VV}+16B_\xi m_V$$

При выполнении неравенства $\alpha-6B_\xi>0$, которое представляет собой условие устойчивости системы (1) по моментам четвертого порядка, система детерминистических уравнений (6) имеет стационарное ($K_{ij}^{\bullet}=K_{iV}^{\bullet}=K_{VV}^{\bullet}=0$) решение, из которого, в частности, получаем

$$K_{VV}=4B_\xi m_V/(\alpha-6B_\xi),\quad 2\pi\Phi_{V_0V_0}(\omega)=\lim_{\beta\to 0}4\beta\omega^2K_{11}=2K_{2V}|_{\beta=0}=$$
$$=4(\alpha-4B_\xi)\sigma^2[4(\alpha-4B_\xi)^2+\omega^2]^{-1}$$
$$K_{V_0V_0}(\tau)=2\int_0^\infty\Phi_{V_0V_0}(\omega)\cos\omega\tau\,d\omega=\sigma^2\exp[-2(\alpha-4B_\xi)\tau],\qquad \tau\geqslant 0,\qquad \sigma^2=K_{VV}-m_V^2 \tag{7}$$

Таким образом, показатель затухания корреляционной функции квадрата амплитуды колебательного процесса в системе уменьшается по мере роста интенсивности случайного параметрического возбуждения. Это обстоятельство может использоваться при решении задач идентификации систем вида (1). Во-первых, указанный выше показатель затухания $\gamma_V=2(\alpha-4B_\xi)$, найденный на основании анализа замеренной в эксперименте реализации процесса $x(t)$, непосредственно представляет запас устойчивости системы (1) в среднем квадратичном. В то же время показатель затухания огибающей корреляционной функции самого процесса $x(t)$ (обозначим его γ_x) равен просто коэффициенту демпфирования α независимо от уровня случайного параметрического возбуждения [1] и, следовательно, не может использоваться в качестве характеристики запаса устойчивости системы (1).

Полученные результаты могут быть использованы также для оценки уровня параметрического усиления колебаний в системе (1) на основании статистического анализа наблюдаемой реализации процесса (постановку этой задачи идентификации и ее решение на основе анализа одномерной плотности вероятности амплитуды колебаний в системе (1) см. в [4]). Если характеризовать уровень колебаний системы (1) величиной $\langle x^2\rangle$, то можно ввести коэффициент параметрического усиления колебаний $\lambda=\langle x^2\rangle/\langle x^2\rangle_0=m_V/m_{V0}$, где нуль в индексе относится к значениям, соответствующим случаю отсутствия параметрического возбуждения. Согласно (3), (7), можно записать

$$\lambda=m_V/m_{V0}=\alpha/(\alpha-4B_\xi)=2\gamma_x/\gamma_V \tag{8}$$

причем входящие в формулу (8) показатели затухания $\gamma_V=2(\alpha-4B_\xi)$ и $\gamma_x=\alpha$ определяются непосредственно на основании корреляционного анализа процесса $x(t)$ и центрированной компоненты квадрата амплитуды этого процесса. Отметим лишь, что изложенный метод идентификации справедлив, строго говоря, лишь при условии $\alpha-6B_\xi>0$, в противном случае процесс $V(t)$ не является стационарным в широком смысле, хотя и имеет стационарную плотность вероятности; в такой ситуации решение задачи идентификации возможно на основе анализа стационарной плотности вероятности амплитуды колебаний [4].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Евланов Л. Г., Константинов В. М.* Системы со случайными параметрами. М.: Наука, 1976. 568 с.
2. *Кляцкин В. И.* Стохастические уравнения и волны в случайно неоднородных средах. М.: Наука, 1980. 336 с.
3. *Хасьминский Р. З.* Предельная теорема для решений дифференциальных уравнений со случайной правой частью.— Теория вероятностей и ее применения, 1966, т. 11, № 3, с. 444–462.
4. *Диментберг М. Ф.* Нелинейные стохастические задачи механических колебаний. М.: Наука, 1980. 368 с.
5. *Диментберг М. Ф.* Метод моментов в задачах динамики систем со случайно изменяющимися параметрами.— ПММ, 1982, т. 46, вып. 2, с. 218–224.
6. *Wedig W.* The integration of nonlinear stochastic systems with applications to the damage and ambiguity identification.— Z. angew. Math. und Mech., 1981, B. 61, H. 1, S. 7–20.

Москва

Поступила в редакцию
7.II.1983