УДК 534.014.4

О ВЛИЯНИИ МАЛОЙ ДИССИПАЦИИ НА УСТОЙЧИВОСТЬ НЕКОНСЕРВАТИВНЫХ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

ДОБРОСЛАВСКИЙ С. В.

Исследуется влияние малой положительной диссипации на устойчивость линейной неконсервативной системы с n степенями свободы. Влияние диссипации на устойчивость неконсервативных систем ранее изучалось в [1–4]. Обширная библиография приведена в [5].

Ниже, используя [6, 7], получены критерии, позволяющие выделить класс матриц жесткостей, при которых введение малой положительной диссипации в первоначально устойчивую систему не нарушает устойчивость последней.

Рассмотрим линейную систему с n степенями свободы без диссипации, описываемую системой уравнений

$$M\mathbf{q}^{\cdot\cdot}+C\mathbf{q}=0 \tag{1}$$

где $M=\operatorname{diag}(m_1,\ldots,m_n)$ – положительно-определенная матрица масс, $C=\|c_{ij}\|_1^n$ – матрица жесткостей, вообще говоря, не являющаяся симметричной, $\mathbf{q}=\operatorname{col}(q_1,\ldots,q_n)$ – вектор обобщенных координат.

Характеристическим уравнением для (1) является

$$\det(M\lambda^2+C)=0 \tag{2}$$

В дальнейшем предполагается, что все корни уравнения (2) просты (некратны) и чисто мнимы; в частности, система (1) устойчива.

Наряду с (1) рассмотрим систему уравнений

$$M\mathbf{q}^{\cdot\cdot}+\varepsilon B\mathbf{q}^{\cdot}+C\mathbf{q}=0 \tag{3}$$

где $B=\operatorname{diag}(b_1,\ldots,b_n)$ – положительно-определенная матрица коэффициентов вязкого трения, ε – положительный малый параметр.

Система уравнений (3) описывает движение неконсервативной системы при наличии малой диссипации. Характеристическим уравнением для (3) является

$$\det(M\lambda^2+\varepsilon B\lambda+C)=0 \tag{4}$$

Пусть $\lambda_1^\circ, \lambda_2^\circ,\ldots,\lambda_{2n}^\circ$ – корни уравнения (2), а $\lambda_1, \lambda_2,\ldots,\lambda_{2n}$ – соответствующие корни уравнения (4).

В дальнейшем для удобства принимаем, что $\lambda_{k+n}^\circ=\bar{\lambda}_k^\circ=-\lambda_k^\circ$, $\lambda_{k+n}=\bar{\lambda}_k$ $(k=1, 2,\ldots,n)$.

Вследствие малости ε и непрерывной зависимости корней характеристического уравнения от коэффициентов имеем с точностью до бесконечно малых высщего порядка

$$\lambda_i=\lambda_i^\circ+\varepsilon\lambda_i^1+o(\varepsilon)\quad (i=1,2,\ldots,n) \tag{5}$$

Для устойчивости системы (3) достаточно, чтобы корни уравнения (4) имели отрицательные вещественные части, т. е. $\operatorname{Re}\lambda_i^1<0$ $(i=1,2,\ldots,n)$.

Подставляя (5) в (4) и записывая полученное выражение в развернутом виде, получим

$$f(\varepsilon)=\det\|f_{kl}(\varepsilon)\|_1^n=0,\quad f_{kl}(\varepsilon)=c_{kl}\ \text{при}\ k\neq l$$

$$f_{kk}(\varepsilon)=m_k[\lambda_i^\circ+\varepsilon\lambda_i^1+o(\varepsilon)]^2+\varepsilon b_k[\lambda_i^\circ+\varepsilon\lambda_i^1+o(\varepsilon)]+c_{kk} \tag{6}$$

Разлагая функцию $f(\varepsilon)$ в степенной ряд по степеням ε в окрестности нуля, получим $f(\varepsilon)=f(0)+f_\varepsilon'(0)\varepsilon+\ldots=0$.

Для определения λ_i^1 получаем уравнение $f_\varepsilon'(0)=0$. Отсюда по правилам дифференцирования определителей имеем

$$2\lambda_i^\circ\lambda_i^1 m_1 A_i\begin{pmatrix}2\ldots n\\2\ldots n\end{pmatrix}+\lambda_i^\circ b_1 A_i\begin{pmatrix}2\ldots n\\2\ldots n\end{pmatrix}+\ldots+2\lambda_i^\circ\lambda_i^1 m_n A_i\begin{pmatrix}1\ldots n-1\\1\ldots n-1\end{pmatrix}+$$
$$+\lambda_i^\circ b_n A_i\begin{pmatrix}1\ldots n-1\\1\ldots n-1\end{pmatrix}=0 \tag{7}$$

где $A_i\begin{pmatrix}2\ldots n\\2\ldots n\end{pmatrix},\ldots,A_i\begin{pmatrix}1\ldots n-1\\1\ldots n-1\end{pmatrix}$ – главные миноры $(n-1)$-го порядка матрицы $A_i=M\lambda_i^{\circ 2}+C$.

Из (7) получим уравнение для определения λ_i^1:

$$2\lambda_i^1\left[m_1A_i\begin{pmatrix}2\ldots n\\2\ldots n\end{pmatrix}+\ldots+m_nA_i\begin{pmatrix}1\ldots n-1\\1\ldots n-1\end{pmatrix}\right]=$$

$$=-\left[b_1A_i\begin{pmatrix}2\ldots n\\2\ldots n\end{pmatrix}+\ldots+b_nA_i\begin{pmatrix}1\ldots n-1\\1\ldots n-1\end{pmatrix}\right]$$

Из последней формулы очевидным образом следует

Теорема 1. Если для каждого $i=1,2,\ldots,n$ все главные миноры $(n-1)$-го порядка матрицы $A_i=M\lambda_i^{\circ 2}+C$ имеют один и тот же знак (зависящий, вообще говоря, от i), то малая диссипация сохраняет устойчивость системы (1).

Если для некоторого $i=1,2,\ldots,n$ главные миноры $(n-1)$-го порядка матрицы $A_i=M\lambda_i^{\circ 2}+C$ имеют разный знак, то существует малая диссипация, нарушающая устойчивость системы (1).

В случае системы с двумя степенями свободы условия теоремы значительно упрощаются.

Теорема 2. Если $c_{12}c_{21}>0$, то малая диссипация сохраняет устойчивость рассматриваемой системы с двумя степенями свободы.

Если $c_{12}c_{21}<0$, то существует малая диссипация, нарушающая устойчивость рассматриваемой системы.

Доказательство. Учитывая, что λ_i° — корень уравнения

$$\det\begin{Vmatrix}m_1\lambda^2+c_{11} & c_{12}\\ c_{21} & m_2\lambda^2+c_{22}\end{Vmatrix}=(m_1\lambda^2+c_{11})(m_2\lambda^2+c_{22})-c_{12}c_{21}=0$$

получим $(m_1\lambda_i^{\circ 2}+c_{11})(m_2\lambda_i^{\circ 2}+c_{22})=c_{12}c_{21}$.

Отсюда следует, что $m_1\lambda_i^{\circ 2}+c_{11}$, $m_2\lambda_i^{\circ 2}+c_{22}$ одного знака тогда и только тогда, когда $c_{12}c_{21}>0$.

Для $n\geqslant 3$ непосредственное использование теоремы 1 затруднительно. Поэтому полезны следующие две теоремы.

Теорема 3. Если матрица C — осцилляционная [6], то наличие малой диссипации не нарушает устойчивости системы (1).

Доказательство. Достаточно заметить, что, согласно [6], для каждого i корни уравнения $\det(M\lambda+C)=0$ разделяются корнями уравнения

$$A_\lambda\begin{pmatrix}1\ 2\ldots i-1\ \ i+1\ldots n\\1\ 2\ldots i-1\ \ i+1\ldots n\end{pmatrix}=0,$$

где A_λ — главный минор $(n-1)$-го порядка матрицы $M\lambda+C$. Отсюда следует, что главные миноры $(n-1)$-го порядка матрицы $M\lambda_i^{\circ 2}+C$ одного знака и, следовательно, по теореме 1 малая диссипация не нарушает устойчивости системы (1).

Теорема 4. Если система (1) обладает такой матрицей жесткостей C, что все миноры матрицы C вида

$$C\begin{pmatrix}p & j_1\ldots j_\nu\\p+1 & j_1\ldots j_\nu\end{pmatrix},\qquad C\begin{pmatrix}p+1 & j_1\ldots j_\nu\\p & j_1\ldots j_\nu\end{pmatrix}$$

($p=1,\ldots,n-1$; $0\leqslant\nu\leqslant n-2$; $j_1,\ldots,j_\nu$ — любые натуральные числа от 1 до n, отличные от p и $p+1$) четного порядка имеют один и тот же знак $\varkappa_p$, а нечетного порядка — противоположный знак $-\varkappa_p$, то малая диссипация не нарушает устойчивость системы (1).

Доказательство. Все главные миноры $(n-1)$-го порядка матрицы $A_i=M\lambda_i^{\circ 2}+C$ одного знака, если

$$A_i\begin{pmatrix}1\ldots p-1\ \ p+1\ldots n\\1\ldots p-1\ \ p+1\ldots n\end{pmatrix}A_i\begin{pmatrix}1\ldots p\ \ p+2\ldots n\\1\ldots p\ \ p+2\ldots n\end{pmatrix}>0,\quad (p=1,2,\ldots,n-1) \tag{8}$$

Воспользовавшись формулой для миноров взаимной матрицы [6], получим

$$A_i\begin{pmatrix}1\ldots p-1\ \ p+1\ldots n\\1\ldots p-1\ \ p+1\ldots n\end{pmatrix}A_i\begin{pmatrix}1\ldots p\ \ p+2\ldots n\\1\ldots p\ \ p+2\ldots n\end{pmatrix}-$$

$$-A_i\begin{pmatrix}1\ldots p-1\ \ p+1\ \ p+2\ldots n\\1\ldots p-1\ \ p\ \ p+2\ldots n\end{pmatrix}A_i\begin{pmatrix}1\ldots p-1\ \ p\ \ p+2\ldots n\\1\ldots p-1\ \ p+1\ \ p+2\ldots n\end{pmatrix}= \tag{9}$$

$$=A_i\begin{pmatrix}1\ldots n\\1\ldots n\end{pmatrix}A_i\begin{pmatrix}1\ldots p-1\ \ p+2\ldots n\\1\ldots p-1\ \ p+2\ldots n\end{pmatrix}$$

Так как $A_i\begin{pmatrix}1\dots n\\1\dots n\end{pmatrix}=\det(M\lambda_i^{\circ 2}+C)=0$, следовательно, из (9) получаем, что (8) эквивалентно

$$A_i\begin{pmatrix}1\dots p-1 & p+1 & p+2\dots n\\1\dots p-1 & p & p+2\dots n\end{pmatrix}A_i\begin{pmatrix}1\dots p-1 & p & p+2\dots n\\1\dots p-1 & p+1 & p+2\dots n\end{pmatrix}>0 \qquad (10)$$

Следуя [7], выпишем в явном виде сомножители левой части (10):

$$\begin{aligned}A_i\begin{pmatrix}1\dots p-1 & p+1 & p+2\dots n\\1\dots p-1 & p & p+2\dots n\end{pmatrix}&=\overset{\circ}{\lambda_i}{}^{2n-4}\delta_{11}C\begin{pmatrix}p+1\\p\end{pmatrix}+\\&+\overset{\circ}{\lambda_i}{}^{2n-6}\sum_{j_1\neq p,p+1}\delta_{12}(j_1)C\begin{pmatrix}p+1 & j_1\\p & j_1\end{pmatrix}+\\&+\overset{\circ}{\lambda_i}{}^{2n-8}\sum_{j_1,j_2\neq p,p+1;j_1<j_2}\delta_{13}(j_1,j_2)C\begin{pmatrix}p+1 & j_1 & j_2\\p & j_1 & j_2\end{pmatrix}+\dots\\&\dots+C\begin{pmatrix}1\dots p-1 & p+1 & p+2\dots n\\1\dots p-1 & p & p+2\dots n\end{pmatrix}\end{aligned} \qquad (11)$$

$$\begin{aligned}A_i\begin{pmatrix}1\dots p-1 & p & p+2\dots n\\1\dots p-1 & p+1 & p+2\dots n\end{pmatrix}&=\overset{\circ}{\lambda_i}{}^{2n-4}\delta_{21}C\begin{pmatrix}p\\p+1\end{pmatrix}+\\&+\overset{\circ}{\lambda_i}{}^{2n-6}\sum_{j_1\neq p,p+1}\delta_{22}(j_1)C\begin{pmatrix}p & j_1\\p+1 & j_1\end{pmatrix}+\\&+\overset{\circ}{\lambda_i}{}^{2n-8}\sum_{j_1,j_2\neq p,p+1;j_1<j_2}\delta_{23}(j_1,j_2)C\begin{pmatrix}p & j_1 & j_2\\p+1 & j_1 & j_2\end{pmatrix}+\dots\\&\dots+C\begin{pmatrix}1\dots p-1 & p & p+2\dots n\\1\dots p-1 & p+1 & p+2\dots n\end{pmatrix}\end{aligned} \qquad (12)$$

где δ_{ij} — положительные функции масс. Из условий теоремы и (11), (12) получим

$$\operatorname*{sign}_{\lambda_i^{\circ 2}<0} A_i\begin{pmatrix}1\dots p-1 & p+1 & p+2\dots n\\1\dots p-1 & p & p+2\dots n\end{pmatrix}=(-1)^{n-1}\varkappa_p$$

$$\operatorname*{sign}_{\lambda_i^{\circ 2}<0} A_i\begin{pmatrix}1\dots p-1 & p & p+2\dots n\\1\dots p-1 & p+1 & p+2\dots n\end{pmatrix}=(-1)^{n-1}\varkappa_p$$

Из (10), (8) и теоремы 1 следует справедливость теоремы 3.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Циглер Г.* Основы теории устойчивости конструкций. М.: Мир, 1971. 192 с.
2. *Болотин В. В.* Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М.: Физматгиз, 1961. 339 с.
3. *Жинжер Н. И.* О дестабилизирующем влиянии трения на устойчивость неконсервативных упругих систем.— Инж. ж. МТТ, 1968, № 3, с. 44–47.
4. *Жинжер Н. И.* Об устойчивости неконсервативных упругих систем при наличии трения.— Изв. вузов. Машиностроение, 1968, № 4, с. 65–68.
5. *Пановко Я. Г., Губанова И. И.* Устойчивость и колебания упругих систем. М.: Наука, 1979. 384 с.
6. *Гантмахер Ф. Р., Крейн М. Г.* Осцилляционные матрицы и ядра и малые колебания механических систем. М.— Л.: Гостехиздат, 1950. 360 с.
7. *Котелянский Д. М.* О некоторых достаточных признаках вещественности и простоты матричного спектра.— Матем. сб., 1955, т. 36, № 1, с. 163–168.

Ленинград

Поступила в редакцию
1.III.1982