

УДК 531.8

**ОБ УПРАВЛЯЕМОМ ДВИЖЕНИИ УПРУГОГО МАНИПУЛЯТОРА  
С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ**

**БЕРБЮК В. Е., ДЕМИДЮК М. В.**

При исследовании динамики и алгоритмов управления движением манипуляторов обычно используется математическая модель абсолютно твердых тел, соединенных шарнирами [1, 2]. В ряде случаев при движении управляемых систем, предназначенных для перемещения грузов в пространстве, существенное значение имеет упругая податливость конструкций. Манипулятор с учетом упругости звеньев рассматривался, например, в [3-6]. В работе [7] при помощи асимптотических методов решен ряд задач управления вращением нагруженного упругого стержня, возникающих, в частности, при исследовании динамики и алгоритмов управления роботом и манипулятором.

В публикуемой работе получена система интегродифференциальных уравнений в частных производных и граничные условия для манипулятора, осуществляющего как вращательные, так и поступательные движения. Исследуются задачи управления о приведении манипулятора из начального состояния в заданное положение с гашением упругих колебаний. Предложен алгоритм, позволяющий свести задачу управления движением упругого манипулятора к некоторой краевой задаче математической физики и проблеме моментов. Эффективность алгоритма подтверждена числовыми расчетами, результаты которых подтверждены графически и в таблице.

1. Кинетическая схема рассматриваемой механической системы показана на фиг. 1. Манипулятор состоит из твердого тела 1 массы  $m_1$  и жестко связанного с ним тонкого упругого стержня 2 длины  $l$  и массы  $m_2$ . На правом конце стержня (в захвате манипулятора) — твердое тело 3 массы  $m_3$ , линейные размеры которого малы по сравнению с длиной стержня. Под действием управляющего момента  $M$  манипулятор вращается вокруг оси  $O_1Z_1$ , а под действием усилия  $F$  — перемещается вдоль этой же оси инерциального пространства  $O_1X_1Y_1Z_1$ . Для описания движения введем подвижную систему координат с началом в точке  $O$  (фиг. 2). Ось  $O\xi$  зададим по направлению касательной к нейтральной линии стержня в точке  $O_2$ . Направление оси  $O\zeta$  совпадает с направлением оси  $O_1Z_1$ . Предполагается, что движение модели описывается в рамках линейной теории тонких прямолинейных нерастяжимых стержней.

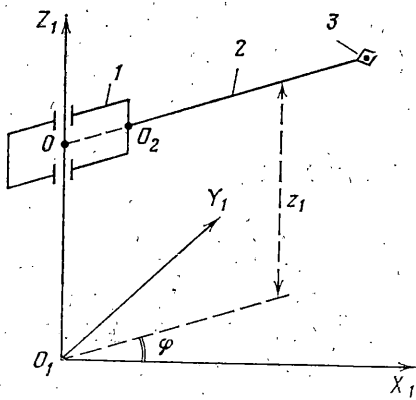
Пусть  $z_1$  — высота подъема,  $\varphi$  — угол поворота манипулятора относительно оси  $O_1Z_1$ . Обозначим через  $u$  вектор перемещения точки  $P_*$  стержня, а через  $u(x, t)$ ,  $v(x, t)$ ,  $w(x, t)$  — его проекции на оси системы координат  $O\xi\eta\zeta$  (фиг. 2). В силу нерастяжимости стержня приходим к соотношению

$$u' = -1/2(v'^2 + w'^2) \tag{1.1}$$

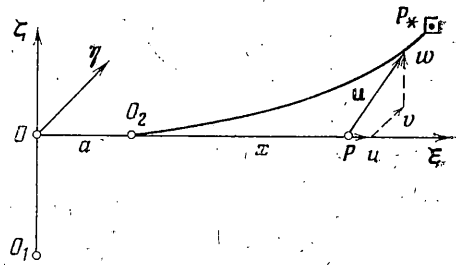
Точкой обозначим дифференцирование по времени  $t$ , а штрихом — по координате  $x$ . Абсолютная скорость точки  $P_*$  равна

$$v_* = v_0 + v_r + \omega \times r \tag{1.2}$$

Здесь  $v_r$  — ее относительная скорость,  $\omega$  — угловая скорость подвижной системы координат относительно инерциальной системы отсчета  $O_1X_1Y_1Z_1$ ,  $r$  — радиус-вектор точки  $P_*$  в системе  $O\xi\eta\zeta$ , которая до деформации стержня находилась в точке  $P$ . Для векторов  $r$ ,  $\omega$ ,  $v_r$  в системе



Фиг. 1



Фиг. 2

$O\xi\eta\zeta$  и для  $v_0$  в системе  $O_1X_1Y_1Z_1$  имеем следующее координатное представление:

$$r = (a+x+u, v, w), \quad \omega = (0, 0, \dot{\varphi}), \quad v_r = (u', v', w'), \quad v_0 = (0, 0, z_1') \quad (1.3)$$

Из (1.2) с учетом (1.3) для проекций абсолютной скорости на оси инерциальной системы координат имеем выражения

$$v_{*1} = \dot{u} - \dot{\varphi}v, \quad v_{*2} = \dot{v} + (a+x+u)\dot{\varphi}, \quad v_{*3} = \dot{w} + z_1' \dot{\varphi} \quad (1.4)$$

Используя (1.1), (1.4) и сохраняя лишь члены не выше второго порядка малости, после ряда преобразований приведем кинетическую энергию системы 1-2-3 к виду

$$T_1 = \frac{1}{2} \left\{ m_1 z_1'^2 + I_1 \dot{\varphi}^2 + \int_0^l [\rho S (\dot{\varphi}^2 v^2 + (\dot{v} + \dot{\varphi}(a+x))^2 + v_{*3}^2) - b \dot{\varphi}^2 (v'^2 + w'^2)] dx + m_3 [v_1^2 \dot{\varphi}^2 + (\dot{v}_1 + h \dot{\varphi})^2 + v_{*3}^2(l, t)] \right\} \quad (1.5)$$

Потенциальная энергия системы равна

$$\Pi = (mz_1 + m_3 w_1)g + \frac{1}{2} \int_0^l (EI_z v''^2 + EI_y w''^2 + 2g\rho S w) dx \quad (1.6)$$

В формулах (1.5), (1.6)  $I_1$  — момент инерции тела 1 относительно оси  $O_1Z_1$ ,  $\rho(x)$  — объемная плотность,  $E$  — модуль Юнга,  $S(x)$ ,  $I_y(x)$ ,  $I_z(x)$  — площадь и моменты инерции поперечного сечения стержня относительно осей, параллельных осям  $O_1\eta$  и  $O_1\xi$ ,  $g$  — ускорение силы тяжести,  $m = m_1 + m_2 + m_3$ ,  $v_1 = v(l, t)$ ,  $a = OO_2$ ,  $h = a + l$ ,  $w_1 = w(l, t)$ :

$$b = m_3 h + \int_x^l (\xi + a) \rho(\xi) S(\xi) d\xi$$

Для вывода уравнений движения упругого манипулятора используем принцип Гамильтона — Остроградского в форме

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta T_1 - \delta \Pi + \delta^* A) dt = 0 \quad (1.7)$$

где  $\delta T_1$ ,  $\delta \Pi$  — вариации кинетической и потенциальной энергии, а  $\delta^* A$  — элементарная работа непотенциальных задаваемых сил

$$\delta^* A = M \delta \varphi + F \delta z_1 \quad (1.8)$$

С учетом (1.5), (1.6), (1.8) для (1.7) имеем

$$\int_{t_1}^{t_2} \left\{ m_1 z_1 \dot{\delta z}_1 + I_1 \dot{\varphi} \delta \dot{\varphi} + \int_0^l [\rho S (v \dot{\varphi} + \dot{\varphi} \delta v) + \right. \\ \left. + (v + (x+a) \dot{\varphi}) (\delta v + (x+a) \delta \dot{\varphi}) + (z_1 + w) (\delta z_1 + \delta w) \right] dx + m_3 (\dot{\varphi} v_1 (v_1 \delta \dot{\varphi} + \dot{\varphi} \delta v_1) + \\ + (v_1 + h \dot{\varphi}) (\delta v_1 + h \delta \dot{\varphi}) + (z_1 + w_1) (\delta z_1 + \delta w_1)) - (m \delta z_1 + m_3 \delta w_1) g - \\ \left. - \int_0^l (EI_z v'' \delta v'' + EI_y w'' \delta w'') dx + M \delta \varphi + F \delta z_1 - g \int_0^l \rho S \delta w dx \right\} dt = 0 \quad (1.9)$$

Учитывая, что при  $t=t_1$  и  $t=t_2$  сравниваемые траектории не варьируются и левый конец стержня жестко защемлен, имеем

$$\delta \varphi(t_1) = \delta \varphi(t_2) = \delta z_1(t_1) = \delta z_1(t_2) = 0 \\ \delta v(x, t_1) = \delta w(x, t_1) = \delta v(x, t_2) = \delta w(x, t_2) = 0 \\ \delta v'(x, t_1) = \delta w'(x, t_1) = \delta v'(x, t_2) = \delta w'(x, t_2) = 0 \quad (1.10)$$

$$v(0, t) = v'(0, t) = w(0, t) = w'(0, t) = 0 \quad (1.11)$$

После интегрирования по частям в (1.9) с учетом (1.1), (1.10), (1.11) из стационарности полученного выражения следуют уравнения

$$(I_1 + m_3 h^2) \varphi'' + m_3 h v_1 v'' + \int_0^l \rho S [v'' + (a+x) \varphi''] (a+x) dx = M \quad (1.12)$$

$$m(z_1'' + g) + m_3 w_1'' + \int_0^l \rho S w'' dx = F \quad (1.13)$$

$$(EI_z v'')'' + \rho S v'' - [\rho S v + (b v')'] \varphi'^2 = -\rho S (x+a) \varphi'' \quad (1.14)$$

$$(EI_y w'')'' + \rho S w'' - \varphi'^2 (b w')' = -\rho S (z_1'' + g) \quad (1.15)$$

и недостающие граничные условия

$$v_1'' = 0, \quad (EI_z v'')' = m_3 [v_1'' + h \varphi'' + (h v_1' - v_1) \varphi'^2] \quad (1.16)$$

$$w_1'' = 0, \quad (EI_y w_1'')' = m_3 (z_1'' + w_1'' + h \varphi'^2 w_1' + g) \quad (1.17)$$

Для однозначного определения движения системы необходимо задать начальную конфигурацию и скорость точек нейтральной линии стержня при  $0 \leq x \leq l$ , а также начальные значения  $\varphi$ ,  $\dot{\varphi}$ ,  $z_1$ ,  $\dot{z}_1$ :

$$v(x, 0) = f_1(x), \quad v'(x, 0) = g_1(x), \quad \varphi(0) = \varphi_0, \quad \dot{\varphi}(0) = \dot{\varphi}_0 \quad (1.18)$$

$$w(x, 0) = f_2(x), \quad w'(x, 0) = g_2(x) \quad (1.19)$$

$$z_1(0) = z_0, \quad \dot{z}_1(0) = \dot{z}_0, \quad f_i(0) = f_i'(0) = 0 \quad (i=1, 2)$$

Таким образом получена система интегродифференциальных уравнений в частных производных (1.12)–(1.15), которая с учетом краевых (1.11), (1.16), (1.17) и начальных (1.18), (1.19) условий при заданных управлениях  $M$  и  $F$  однозначно определяет движение упругого манипулятора в линейном приближении по относительным отклонениям.

Отметим, что при  $I_1=0$ ,  $a=0$  уравнения (1.12), (1.14) и условия (1.16) совпадают с уравнениями и граничными условиями, полученными в [7] другим способом для управляемого вращения упругого стержня.

2. Сформулируем следующую задачу. Требуется найти допустимые управления  $M \in M_1$ ,  $F \in F_1$ , перемещающие за время  $T$  систему (1.12)–(1.15) с ограничениями (1.11), (1.16), (1.17) из произвольного начального состояния (1.18), (1.19) в конечное с гашением относительных отклонений для всех  $0 \leq x \leq l$

$$\begin{aligned} \varphi(T) = \varphi_*, \quad \dot{\varphi}(T) = 0, \quad v(x, T) = \dot{v}(x, T) = 0, \quad z_1(T) = z_1^*, \quad \dot{z}_1(T) = 0, \\ w(x, T) = \dot{w}(x, T) = 0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

Здесь  $M_1, F_1$  – заданные фиксированные множества допустимых значений управлений,  $T$  – момент времени окончания процесса управления. Исследуем задачу управления движением упругого манипулятора обратным способом [7–9]. Сначала определим функции  $\varphi$  и  $z_1$ , удовлетворяющие цели движения (2.1), а затем из уравнений (1.12), (1.13) вычислим искомые управляющие воздействия  $M$  и  $F$  с учетом упругих колебаний стержня.

Предположим, что угловая скорость манипулятора мала по сравнению с низшими частотами упругих колебаний системы. Тогда эффектами, обусловленными действием продольных центробежных сил инерции на упругий стержень, можно пренебречь [10], т. е. в уравнениях (1.14), (1.15) и в (1.16), (1.17) можно не учитывать члены с  $\varphi^2$ .

В практически важном частном случае  $\rho = \rho_0 = \text{const}$ ,  $S = S_0 = \text{const}$  определение тангенциальных  $v(x, t)$  и аксиальных  $w(x, t)$  отклонений по известным функциям  $\varphi$  и  $z_1$  сводится к решению краевой задачи математической физики следующего вида:

$$\begin{aligned} a_0^2 Q^{IV} + Q'' = -C(x)p(t) - \beta, \quad Q(0, t) = Q'(0, t) = Q''(l, t) = 0 \\ \alpha Q'''(l, t) = Q''(l, t) + C(l)p(t) + \beta, \quad Q(x, 0) = \Phi(x), \quad Q'(x, 0) = G(x), \\ 0 \leq x \leq l \end{aligned} \quad (2.2)$$

Здесь  $C(x)$ ,  $\Phi(x)$ ,  $G(x)$ ,  $p(t)$  – некоторые заданные функции,  $\alpha, \beta$ ,  $a_0^2$  – постоянные параметры,  $Q(x, t)$  – искомая функция.

Запишем решение краевой задачи (2.2), используя метод Фурье

$$\begin{aligned} Q(x, t) = Q_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) \left[ A_n \cos k_n t + \frac{B_n}{k_n} \sin k_n t - \right. \\ \left. - \frac{C_n}{k_n} \int_0^t p(\xi) \sin k_n(t - \xi) d\xi \right], \quad Q_0(x) = \frac{\beta x^2(x - 3l)}{6\alpha} + Q_* \end{aligned} \quad (2.3)$$

где  $X_n(x)$  – собственные функции однородной краевой задачи [11]:

$$\begin{aligned} X_n(x) = D_n [\text{ch } \lambda_n x - \cos \lambda_n x + \gamma_n (\sin \lambda_n x - \text{sh } \lambda_n x)] \\ \gamma_n = (\text{ch } \mu_n + \cos \mu_n) / (\text{sh } \mu_n + \sin \mu_n), \quad \mu_n = \lambda_n l \end{aligned} \quad (2.4)$$

Собственные частоты системы равны  $k_n = a_0 \mu_n^2 / l^2$ , где  $\mu_n$  – решение уравнения

$$l\alpha(1 + \text{ch } \mu_n \cos \mu_n) + a_0^2 \mu_n (\text{sh } \mu_n \cos \mu_n - \text{ch } \mu_n \sin \mu_n) = 0 \quad (2.5)$$

В формуле (2.3)  $A_n, B_n, C_n$  – коэффициенты разложения  $f_*(x) = \Phi(x) - Q_0(x)$ ,  $G(x)$ ,  $C(x)$  в ряды по собственным функциям  $X_n(x)$ . Константы  $D_n$  можно определить, например, из условия ортонормированности функций  $X_n(x)$ ,  $Q_* = \beta x^2(4lx - x^2 - 6l^2) / 24a_0^2$ .

Если принять в краевой задаче (2.2)

$$\begin{aligned} C = x + a, \quad p = \varphi''(t), \quad \Phi = f_1(x), \quad G = g_1(x), \quad a_0^2 = EI_2 / \rho_0 S_0, \\ \alpha = EI_2 / m_3, \quad \beta = 0 \end{aligned} \quad (2.6)$$

то соотношение (2.3) определяет тангенциальные отклонения  $v(x, t) = Q(x, t)$ .

В случае, если

$$C=1, \quad p=z_1''(t), \quad \Phi=f_2(x), \quad G=g_2(x), \quad a_0^2=EI_y/\rho_0 S_0, \quad \alpha=EI_y/m_3, \quad \beta=g \quad (2.7)$$

формулой (2.3) определяются аксиальные отклонения  $w(x, t)=Q(x, t)$  упругого манипулятора. При этом

$$\begin{aligned} A_n &= m_3 f_*(l) X_n(l) + \rho_0 S_0 \int_0^l f_*(x) X_n(x) dx \\ B_n &= m_3 G(l) X_n(l) + \rho_0 S_0 \int_0^l G(x) X_n(x) dx \\ C_n &= m_3 C(l) X_n(l) + \rho_0 S_0 \int_0^l C(x) X_n(x) dx \\ D_n &= \left[ m_3 X_{n*}^2(l) + \rho_0 S_0 \int_0^l X_{n*}^2(x) dx \right]^{-1/2}, \quad X_{n*} = X_n|_{D_n=1} \end{aligned} \quad (2.8)$$

Потребуем, чтобы решение краевой задачи (2.2) для всех  $0 \leq x \leq l$  удовлетворяло условиям

$$Q(x, T) = 0, \quad Q'(x, T) = 0 \quad (2.9)$$

Тогда, выбирая параметры краевой задачи (2.2) последовательно в соответствии с (2.6), (2.7), обеспечим выполнение условий гашения относительных отклонений упругого манипулятора (2.1).

Из (2.9) с учетом (2.3) получаем

$$C_n \int_0^T p(t) \sin k_n(T-t) dt = k_n(Q_n + A_n \cos k_n T) + B_n \sin k_n T \quad (2.10)$$

$$C_n \int_0^T p(t) \cos k_n(T-t) dt = B_n \cos k_n T - k_n A_n \sin k_n T$$

где  $Q_n$  — коэффициенты разложения  $Q_0(x)$  в ряд по собственным функциям  $X_n(x)$

$$Q_n = m_3 Q_0(l) X_n(l) + \rho_0 S_0 \int_0^l Q_0(x) X_n(x) dx \quad (n=1, 2, \dots)$$

После преобразований (2.10) имеем

$$\begin{aligned} \int_0^T p(t) \sin k_n t dt &= a_n, \quad \int_0^T p(t) \cos k_n t dt = b_n \\ a_n &= \frac{-k_n(Q_n \cos k_n T + A_n)}{C_n}, \quad b_n = \frac{Q_n k_n \sin k_n T + B_n}{C_n} \quad (n=1, 2, \dots) \end{aligned} \quad (2.11)$$

Итак, для выполнения условия (2.9) функция  $p(t)$  должна быть решением бесконечномерной проблемы моментов (2.11). Для рассматриваемой механической системы  $p=\varphi''$ , либо  $p=z_1''$ . Поэтому в связи с необхо-

димостью выполнения условий (2.1) для  $\varphi, \dot{\varphi}, z_1, \dot{z}_1$  функция  $p$  должна удовлетворять помимо (2.11) еще двум моментным равенствам

$$\int_0^T p(t) dt = p_*^*, \quad \int_0^T t p(t) dt = T p_*^* - p_*^* \quad (2.12)$$

$$p_*^* = -z_0^*, \quad p_*^* = z_*^* - z_0^* - T z_0^*, \quad p_*^* = z_1^* \quad (2.13)$$

$$p_*^* = -\varphi_0^*, \quad p_*^* = \varphi_*^* - \varphi_0^* - T \varphi_0^*, \quad p_*^* = \varphi^* \quad (2.14)$$

На практике обычно достаточно погасить упругие колебания с низшими частотами. Выполняя конечное число моментных равенств (2.11), можно устранить любое счетное количество мод упругих колебаний. Пусть  $N$  — число первых мод колебаний упругого манипулятора, подлежащих гашению. Для решения конечномерной проблемы моментов (2.11), (2.12) ( $n=1, 2, \dots, N < \infty$ ) применим прямой метод. Будем искать функцию  $p(t)$  в виде

$$p(t) = \sum_{m=1}^N (P_{2m-1} \cos \omega_m t + P_{2m} \sin \omega_m t) + \sum_{v=1}^L P_{2N+v} t^{v-1} \quad (2.15)$$

где  $\omega_m$  — некоторые заданные величины,  $P_j$  ( $j=1, 2, \dots, 2N+L$ ) — неизвестные коэффициенты. Подставляя выражение  $p(t)$  в (2.12) и в первые  $N$  пар соотношений (2.11), получим алгебраическую систему  $2N+2$  уравнений относительно  $2N+L$  неизвестных  $P_j$ :

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^N \frac{1}{\omega_m} [P_{2m-1} \sin \omega_m T + P_{2m} (1 - \cos \omega_m T)] + \sum_{v=1}^L P_{2N+v} \frac{T^v}{v} &= p_*^* \\ \sum_{m=1}^N \frac{1}{\omega_m^2} [P_{2m-1} (1 - \cos \omega_m T) + P_{2m} (\omega_m T - \sin \omega_m T)] + \sum_{v=1}^L P_{2N+v} \frac{T^{v+1}}{v(v+1)} &= p_*^* \\ \sum_{m=1}^N (P_{2m-1} I_{m,n}^{11} + P_{2m} I_{m,n}^{21}) + \sum_{v=1}^L P_{2N+v} I_{v,n}^1 &= b_n \\ \sum_{m=1}^N (P_{2m-1} I_{m,n}^{12} + P_{2m} I_{m,n}^{22}) + \sum_{v=1}^L P_{2N+v} I_{v,n}^2 &= a_n \end{aligned} \quad (2.16)$$

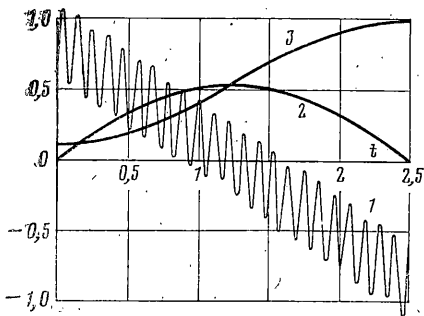
В (2.16) приняты обозначения

$$I_{m,n}^{11} = \int_0^T \cos \omega_m t \cos k_n t dt, \quad I_{m,n}^{21} = \int_0^T \sin \omega_m t \cos k_n t dt,$$

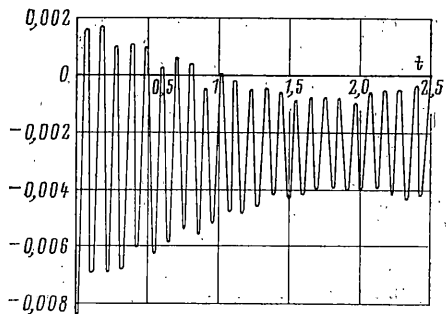
$$I_{m,n}^{12} = \int_0^T \cos \omega_m t \sin k_n t dt, \quad I_{m,n}^{22} = \int_0^T \sin \omega_m t \sin k_n t dt,$$

$$I_{v,n}^1 = \int_0^T t^{v-1} \cos k_n t dt, \quad I_{v,n}^2 = \int_0^T t^{v-1} \sin k_n t dt \quad (n=1, 2, \dots, N; v=1, 2, \dots, L)$$

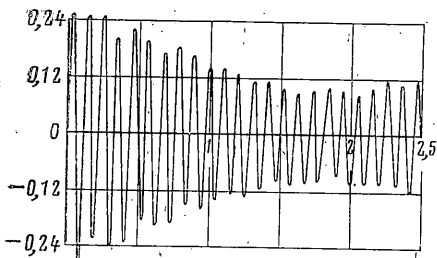
Решив систему (2.16), например, относительно  $P_1, P_2, \dots, P_{2N+2}$ , получим искомую функцию  $p(t)$ , зависящую от  $L-2$  свободных параметров  $P_{2N+3}, \dots, P_{2N+L}$ , которые могут быть использованы в дальнейшем.



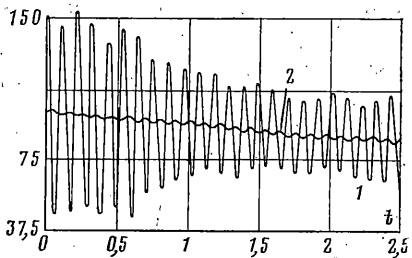
Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5



Фиг. 6

Таким образом, алгоритм решения задачи управления движением упругого манипулятора следующий. При помощи трансцендентного уравнения (2.5) определяем собственные частоты  $k_n$  изгибных колебаний стержня 2. Из алгебраической системы (2.16) находим  $P_1, P_2, \dots, P_{2N+2}$  и в соответствии с формулой (2.15) получаем функцию  $p(t)$ , решающую проблему моментов (2.11), (2.12). Учитывая (2.6), (2.14) и (2.7), (2.13), вычисляем по формулам (2.3), (2.4), (2.8) тангенциальные  $v(x, t)$  и аксиальные  $w(x, t)$  упругие отклонения. Далее по известным  $z_1^*$ ,  $\varphi^*$  и относительным отклонениям при помощи уравнений (1.12), (1.13) определяем искомые управления  $M$  и  $F$ , перемещающие упругий манипулятор, за время  $T$  из состояния (1.18), (1.19) в (2.1) с гашением относительных отклонений.

3. Численные расчеты на ЭВМ подтвердили эффективность полученного алгоритма. Приведем отдельные результаты численного моделирования системы управления поступательными движениями упругого манипулятора с параметрами:  $m_1=5$  кг,  $m_2=1,44$  кг,  $m_3=3$  кг,  $l=1$  м,  $E=2,1 \cdot 10^{11}$  Н·м<sup>-2</sup>,  $\rho_0=7850$  кг·м<sup>-3</sup>,  $T=2,5$  с. Внешний и внутренний диаметры кольцевого сечения стержня 2 выбирались равными  $d_1=0,03$  м,  $d_2=0,026$  м. Начальное и конечное состояния системы определялись соотношениями

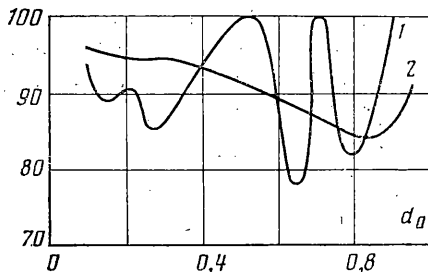
$$z_0=0,1 \text{ м}, \quad z_0^*=0, \quad f_2(x)=\frac{\beta x^2(x-3l)}{2\alpha}, \quad g_2(x)=0 \quad (3.1)$$

$$z_*^*=1 \text{ м}, \quad z_*^*=0, \quad w(x, T)=w^*(x, T)=0 \quad (3.2)$$

Как показали расчеты, для выполнения условий гашения (3.2) с точностью до седьмого знака после запятой достаточно погасить первые две моды упругих колебаний. В формуле (2.15) принималось  $N=L=2$ ,  $\omega_m=k_m$ . Неизвестные  $P_j$ ,  $j=1, 2, \dots, 6$ , определенные из решения системы шести уравнений (2.16), имеют значения соответственно:  $-0,09545$ ,  $0,25763$ ,  $-0,00297$ ,  $-0,00683$ ,  $0,85443$ ,  $-0,68392$ . На фиг. 3 представлены графики найденных функций  $p=z_1^{**}(t)$ ,  $z_1^*(t)$ ,  $z_1(t)$ , отвечающих поступательному движению упругого манипулятора с гашением относительных отклонений  $w(x, t)$  (кривые 1, 2, 3 соответствуют функциям  $z_1^{**}$ , м/с<sup>2</sup>;  $z_1^*$ , м/с;  $z_1$ , м, время  $t$  дано в с). Построенный закон движения удовлетворяет условиям (3.1), (3.2) и характеризуется отсутствием возвратных движений манипулятора ( $z_1^* > 0$  при  $0 < t < T$ ). Графики относительных отклонений груза  $w_1=w(l, t)$  и скорости  $w_1^*=w^*(l, t)$ , возникающих при

найденном законе движения манипулятора, изображены соответственно на фиг. 4 и 5 ( $\omega_1$ , м;  $\omega_1^*$ , м/с). Видно, что упругие колебания груза низкочастотны с частотой порядка 9 Гц. В момент  $t=T$  выполнены условия гашения (3.2). Максимальное отклонение груза от равновесного состояния  $-0,007$  м. Зависимость от времени управляющего усилия  $F$ , перемещающего манипулятор из состояния (3.1) в (3.2) в соответствии с найденным законом движения, изображена на фиг. 6 (кривая 1). Управление  $F$  рассчитывалось в силу уравнения (1.13). Для сравнения на той же фигуре представлено управление, необходимое для перемещения жесткого манипулятора из состояния (3.1) в (3.2) согласно тому же закону движения  $z_1(t)$  (кривая 2,  $F$  дано в Н). Из анализа графиков фиг. 6 следует, что найденные управления осциллирующего характера, а гашение относительных отклонений требует значительных дополнительных усилий.

При определении энергозатрат манипулятора предполагалось, что приводы идеальны (отсутствуют силы трения, люфты и т. п.), а коэффициент рекуперации энергии равен нулю. Энергоустановка совершает работу только в случае, если механическая мощность положительна. В противном случае энергия рассеивается в тепло. Это имеет место, например, при использовании гидропривода с дроссельным принципом управления [12]. Важными энергетическими характеристиками движения манипулятора являются механическая работа  $e$  и максимальная механическая мощность приводов управления  $W_*$ . В случае поступательных перемещений манипулятора имеем



Фиг. 7

$$e = \int_0^T W_+(t) dt, \quad W_* = \max_t W_+(t);$$

$$W_+ = W(t) \text{ при } W(t) > 0, \quad W_+ = 0$$

$$\text{при } W(t) \leq 0, \quad W(t) = F(t) z_1^*(t)$$

Ниже представлены рассчитанные значения  $W_*$  для управляемых движений манипулятора при различных параметрах  $l$  и  $m_3$  ( $W_*$  дано в Вт,  $l$  — в м,  $m_3$  — в кг). Во всех вариантах начальное и конечное состояние системы определялось формулами (3.1), (3.2). Анализ данных таблицы показывает, что с увеличением длины стержня 2 манипулятора и массы груза требования к мощности привода управления возрастают. В рассмотренной области изменения параметров  $l$  и  $m_3$  функция  $W_*$  изменяется немонотонно и имеет ряд локальных экстремумов.

Ниже представлены рассчитанные значения  $W_*$  для управляемых движений манипулятора при различных параметрах  $l$  и  $m_3$  ( $W_*$  дано в Вт,  $l$  — в м,  $m_3$  — в кг). Во всех вариантах начальное и конечное состояние системы определялось формулами (3.1), (3.2). Анализ данных таблицы показывает, что с увеличением длины стержня 2 манипулятора и массы груза требования к мощности привода управления возрастают. В рассмотренной области изменения параметров  $l$  и  $m_3$  функция  $W_*$  изменяется немонотонно и имеет ряд локальных экстремумов.

$l$	$m_3=1$	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0,6	40	59	60	87	79	114	99	115	122	179
0,7	43	60	68	75	104	93	107	130	143	182
0,8	47	61	74	93	95	122	109	152	180	199
0,9	48	65	75	79	116	119	146	143	165	198
1	52	67	76	99	117	115	156	170	151	176
1,1	52	62	71	110	106	148	165	175	157	231
1,2	51	70	95	111	112	143	144	160	231	193
1,3	55	73	96	117	126	142	186	176	215	221
1,4	52	76	98	100	118	137	191	200	238	231
1,5	60	90	102	113	130	147	211	203	275	262

На фиг. 7 изображены графики работы  $e$  и максимальной механической мощности  $W_*$  в зависимости от безразмерного параметра  $d_0 = d_2/d_1$  при  $d_1 = 0,02$  м ( $W_*$ , Вт — кривая 1,  $e$ , Дж — кривая 2). Видно, что существуют оптимальные соотношения между величиной внутреннего и внешнего диаметров сечения стержня 2, при которых механическая работа и требования к мощности привода управления манипулятора минимальны.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Попов Е. П., Верещагин А. Ф., Зенкевич С. А. Манипуляционные роботы: динамика и алгоритмы. М.: Наука, 1978. 398 с.
2. Кулешов В. С., Лакога Н. А. Динамика систем управления манипуляторами. М.: Энергия, 1971. 304 с.
3. Кузнецов Н. К. О демпфировании упругих колебаний манипуляторов. — Управляемые механические системы: Сб. статей. Иркутск, Иркут. политехн. ин-т, 1978, с. 89—101.



4. Лакота Н. А., Разманов Е. В., Шведов В. Н. Управление упругим манипулятором на траектории.— Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1980, № 2, с. 53–59.
5. Акуленко Л. Д., Михайлов С. А., Черноуцко Ф. Л. Моделирование динамики манипулятора с упругими звеньями.— Изв. АН СССР. МТТ, 1981, № 3, с. 118–124.
6. Черноуцко Ф. Л. Динамика управляемых движений упругого манипулятора.— Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1981, № 5, с. 142–152.
7. Акуленко Л. Д., Вологник Н. Н. Об управляемом вращении упругого стержня.— ПММ, 1982, т. 46, вып. 4, с. 587–595.
8. Белецкий В. В., Бербюк В. Е., Самсонов В. А. Параметрическая оптимизация движений двуногого шагающего аппарата.— Изв. АН СССР. МТТ, 1982, № 1, с. 28–40.
9. Бербюк В. Е. Программный уровень системы управления шагающего аппарата при движении с заданной скоростью.— Изв. АН СССР. МТТ, 1982, № 5, с. 45–50.
10. Пановко Я. Г., Губанова И. И. Устойчивость и колебания упругих систем. М.: Наука, 1979. 384 с.
11. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977. 735 с.
12. Льюис Э., Стерн Х. Гидравлические системы управления. М.: Мир, 1966. 407 с.

Львов

Поступила в редакцию  
27.I.1983