МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 2 · 1984

УДК 531.8

ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИКИ МАНИПУЛЯТОРА С УПРУГИМИ ЗВЕНЬЯМИ

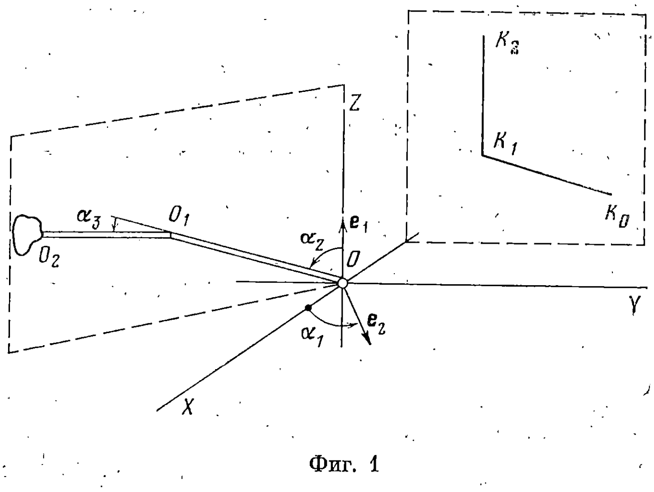
МИХАЙЛОВ С. А., ЧЕРНОУСЬКО Ф. Л.

Как известно, при исследовании динамики манипуляторов обычно применяется механическая модель, в которой звенья считаются абсолютно твердыми телами [1]. Однако при большой длине и малой жесткости звеньев существенное влияние на точность операций манипулятора оказывает упругая податливость его конструкции. Динамика упругого манипулятора рассматривалась, например, в [2—6].

В публикуемой работе исследуются пространственные управляемые движения антропоморфного манипулятора с упругими звеньями. Исследование проводится асимптотическим методом, разработанным в [5] для общего случая многозвенного манипулятора, и численным моделированием [4].

Предлагаемая методика позволяет производить анализ и расчет упругих колебаний манипулятора в процессе его движения, определять силы, действующие в конструкции манипулятора, и моменты, развиваемые двигателями.

1. Рассматриваемая механическая модель упругого манипулятора с грузом характеризуется следующими допущениями (фиг. 1).



Фиг. 1

1. Манипулятор OO_1O_2 представляет собой двузвенник, состоящий из двух стержней одинаковой длины l.

2. В неподвижной точке O совмещены два цилиндрических шарнира. Ось $\mathbf{e}_1$ первого шарнира неподвижна, ось $\mathbf{e}_2$ второго шарнира подвижна и перпендикулярна $\mathbf{e}_1$. В точке O_1 находится локтевой цилиндрический шарнир, ось которого при отсутствии упругих деформаций стержня OO_1 параллельна оси $\mathbf{e}_2$.

3. Груз считается материальной точкой массы m и находится в точке O_2.

4. Звенья манипулятора представляют собой однородные прямолинейные упругие стержни кольцевого поперечного сечения, испытывающие деформации изгиба и кручения.

5. Упругие смещения манипулятора и груза в процессе движения малы по сравнению с длиной звеньев l.

6. Масса манипулятора m_0 мала по сравнению с массой груза m.

7. Углы поворота в шарнирах заданы как функции времени (случай кинематического управления).

Поясним сделанные допущения: 1—3 представляют собой некоторые упрощения реальной кинематической схемы антропоморфного манипулятора. В них во внимание не принимаются размеры кисти и груза, а также расстояние между осями шарниров $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$. Эти размеры обычно малы по сравнению с длиной l плечевого и локтевого звеньев, и поэтому не влияют существенно на упругие колебания, обусловленные главным образом транспортными операциями (поворотами плеча и локтя). Допущение 4 обычно выполняется на практике, 6 — представляет собой ограничение, из которого вытекают следующие свойства спектра упругих колебаний. Обозначим через c характерную жесткость конструкции манипулятора. Тогда частоты собственных упругих колебаний распадаются на две группы: частоты порядка $(c/m)^{1/2}$ и частоты порядка $(c/m_0)^{1/2}$. Частоты первой группы (низкие), равные числу степеней свободы груза m, соответствуют квазистатическим деформациям манипулятора. Частоты второй группы (высокие) отвечают упругим волнам в стержнях OO_1 и O_1O_2 и образуют бесконечный спектр. Колебания второй группы соответствуют малым перемещениям груза по сравнению с перемещениями точек манипулятора, а из-за высоких частот затухают гораздо быстрее, чем частоты первой группы. Поэтому колебаниями второй группы можно пренебречь и учитывать лишь колебания первой, для которых упругие деформации стержней можно считать квазистатическими.

Допущение 7 означает, что управление движением манипулятора задано в виде кинематической программы.

Допущение 5 позволяет пользоваться обычной линейной теорией деформирования упругих стержней. Отметим, что этому допущению можно придать эквивалентный вид — 5′: периоды собственных упругих колебаний малы по сравнению с характерным временем операции манипулятора.

Обозначим характерное время операции T_*, тогда характерная величина ускорения груза равна lT_*^{-2}, а характерная величина силы, действующей на груз со стороны манипулятора, равна $\Phi \sim mlT_*^{-2}$. Характерное упругое смещение груза по порядку величины равно

$$u \sim \Phi c^{-1} \sim mlT_*^{-2} c^{-1} \tag{1.1}$$

Обозначая $T_1 \sim (m/c)^{1/2}$ период низшего тона упругих колебаний, получим из (1.1):

$$u/l \sim (T_1/T_*)^2 \ll 1 \tag{1.2}$$

что и доказывает эквивалентность допущений 5 и 5′.

Допущение 5′ означает, что угловая скорость поворота звеньев мала по сравнению с низшей частотой упругих колебаний. Поэтому влияние центробежных сил на жесткость манипулятора можно не учитывать и определять матрицу жесткости согласно статике упругих стержней.

Заметим еще, что соотношение (1.2) позволяет ввести малый параметр $\varepsilon \sim T_1/T_* \ll 1$ и использовать асимптотические методы.

Обозначим через α_1 угол поворота манипулятора вокруг оси шарнира $\mathbf{e}_1$, через α_2 — угол поворота вокруг оси шарнира $\mathbf{e}_2$, через α_3 — угол поворота в локтевом шарнире O_1.

Введем инерциальную декартову систему координат $OXYZ$, ось Z которой направим по неподвижной оси шарнира $\mathbf{e}_1$. Подвижная ось шарнира $\mathbf{e}_2$ лежит в плоскости OXY и образует угол α_1 с осью X. Угол между касательной к стержню OO_1 в точке O и осью Z равен α_2, а угол между касательными к стержням OO_1 и O_1O_2 в точке O_1 равен α_3.

Наряду с упругим манипулятором введем в рассмотрение модель жесткого манипулятора, у которого оба звена — абсолютно твердые стержни.

Для жесткой модели имеем $\varepsilon=0$. Кинематика жесткой модели определяется соотношениями

$$r_X{}^\circ=l\sin\alpha_1[\sin\alpha_2+\sin(\alpha_2+\alpha_3)]$$
$$r_Y{}^\circ=-l\cos\alpha_1[\sin\alpha_2+\sin(\alpha_2+\alpha_3)] \qquad (1.3)$$
$$r_Z{}^\circ=l[\cos\alpha_2+\cos(\alpha_2+\alpha_3)]$$

Здесь $r_X{}^\circ$, $r_Y{}^\circ$, $r_Z{}^\circ$ — проекции радиус-вектора $\mathbf{r}^\circ$ точки O_2 на оси системы координат $OXYZ$ для жесткой модели. Систему (1.3) разрешим относительно углов α_i (индекс i всюду принимает значения $i=1, 2, 3$):

$$\alpha_1=-\operatorname{arctg}(r_X{}^\circ/r_Y{}^\circ)\ \ (r_Y{}^\circ\leqslant 0),\quad \alpha_1=\pi-\operatorname{arctg}(r_X{}^\circ/r_Y{}^\circ)\ \ (r_Y{}^\circ\geqslant 0)$$

$$\alpha_3=\pm 2\arccos[((r_X{}^\circ)^2+(r_Y{}^\circ)^2+(r_Z{}^\circ)^2)^{1/2}/(2l)] \qquad (1.4)$$

$$\alpha_2=\operatorname{arctg}[\{(r_X{}^\circ)^2+(r_Y{}^\circ)^2\}^{1/2}/r_Z{}^\circ]-\alpha_3/2\ \ (r_Z{}^\circ\geqslant 0)$$

$$\alpha_2=\pi+\operatorname{arctg}[\{(r_X{}^\circ)^2+(r_Y{}^\circ)^2\}^{1/2}/r_Z{}^\circ]-\alpha_3/2\ \ (r_Z{}^\circ\leqslant 0)$$

Равенства (1.4) определяют конфигурацию (углы в шарнирах) жесткого манипулятора по известному положению груза. Неоднозначность соотношений (1.4) для α_2, α_3 связана с тем, что внутри зоны обслуживания манипулятора $OO_2<2l$ возможны две конфигурации, при которых перемещаемый груз находится в данной точке.

В дальнейшем наряду с инерциальной системой координат $OXYZ$ будет использоваться подвижная система $O_2X'Y'Z'$. Относительно жесткой модели ее ось Z' направлена по продолжению звена O_1O_2, ось X' параллельна оси шарнира O_1 (т. е. вектору $\mathbf{e}_2$), ось Y' дополняет систему осей до правой ортогональной. Приведем матрицу перехода от системы координат $OXYZ$ к $O_2X'Y'Z'$. Если u_i и u_i' — проекции некоторого вектора на оси систем $OXYZ$ и $O_2X'Y'Z'$ соответственно, то имеем связь

$$\mathbf{u}'=V\mathbf{u},\qquad u_i'=\sum_{j=1}^{3}V_{ij}u_j \qquad (1.5)$$

$$V(\boldsymbol{\alpha})=\begin{bmatrix}\cos\alpha_1 & \sin\alpha_1 & 0\\ -\sin\alpha_1\cos(\alpha_2+\alpha_3) & \cos\alpha_1\cos(\alpha_2+\alpha_3) & \sin(\alpha_2+\alpha_3)\\ \sin\alpha_1\sin(\alpha_2+\alpha_3) & -\cos\alpha_1\sin(\alpha_1+\alpha_3) & \cos(\alpha_2+\alpha_3)\end{bmatrix}$$

Сформулируем задачу. Предполагается, что на манипулятор с грузом действуют моменты $M=(M_1, M_2, M_3)$, развиваемые двигателями в шарнирах, внешняя сила $\mathbf{F}(\mathbf{r}, \mathbf{r}^\cdot, t)$, приложенная к грузу (например, вес или сопротивление среды), и реакция опоры в точке O. Здесь $\mathbf{r}$ — радиус-вектор груза в инерциальной системе координат, t — время. Пусть выполнены допущения 1—7 и заданы зависимости углов в шарнирах от времени $\alpha=\{\alpha_i(t)\}$ или закон движения груза для жесткой модели $\mathbf{r}^\circ(t)$. Требуется определить движение груза $\mathbf{r}(t)$, закон изменения моментов в шарнирах $\mathbf{M}(t)$, обеспечивающий данное движение, а также силу $\boldsymbol{\Phi}(t)$, с которой груз действует на манипулятор. Отметим, что вследствие безынерционности манипулятора сила $\boldsymbol{\Phi}$ с точностью до знака равна реакции опоры в точке O, а также силе, действующей в любом сечении манипулятора.

2. Уравнение движения груза имеет вид

$$m\mathbf{r}^{\cdot\cdot}=\mathbf{F}(\mathbf{r}, \mathbf{r}^\cdot, t)-\boldsymbol{\Phi} \qquad (2.1)$$

Обозначим через $\mathbf{u}$, $\mathbf{u}'$ вектор упругого смещения груза относительно жесткой модели в проекциях на оси систем координат $OXYZ$ и $O_2X'Y'Z'$ соответственно. Имеем

$$\mathbf{r}=\mathbf{r}^\circ+\mathbf{u} \qquad (2.2)$$

Потенциальная энергия деформаций манипулятора Π есть энергия упругого двузвенника OO_1O_2 при фиксированных углах α_i. В рассматриваемом случае малых деформаций имеем

$$\Pi={}^1/_2(C\mathbf{u},\ \mathbf{u})={}^1/_2(C'\mathbf{u}',\ \mathbf{u}'),\quad C=V^TC'V,\quad \mathbf{u}'=V\mathbf{u} \tag{2.3}$$

Здесь C и C' — матрицы жесткости в системах координат $OXYZ$ и $O_2X'Y'Z'$ соответственно, ортогональная матрица V определена в (1.5); символ T означает транспонирование. Матрица жесткости C' вычислена в [6]. Ее элементы не зависят от углов α_1, α_2 и равны

$$c_{ij}'=kc_{ij}^1$$

$$c_{11}^1=(4\xi+3)\,(3\xi\zeta^{-1}\sin^2\alpha_3+\xi+3\cos^2\alpha_3+3\cos\alpha_3+1)^{-1} \tag{2.4}$$

$$c_{22}^1=4,\quad c_{23}^1=c_{32}^1=-2(3+2\cos\alpha_3)/\sin\alpha_3$$

$$c_{33}^1=4(3+\xi+3\cos\alpha_3+\cos^2\alpha_3)/\sin^2\alpha_3$$

$$c_{12}^1=c_{21}^1=c_{13}^1=c_{31}^1=0$$

$$k=3E_1I_1/[l^3(4\xi+3)],\quad \xi=E_1I_1/E_2I_2,\quad \zeta=c_0/E_2I_2$$

Здесь E_1 и E_2 — модули Юнга материала стержней OO_1 и O_1O_2 соответственно, I_1 и I_2 — моменты инерции их сечений относительно диаметра, c_0 — жесткость на кручение стержня OO_1. Заметим, что кручение второго стержня O_1O_2 отсутствует вследствие пренебрежения массой стержней и линейными размерами груза.

Сила $\mathbf{\Phi}$, с которой груз действует на упругий манипулятор, в силу (2.3) равна

$$\mathbf{\Phi}=\partial\Pi/\partial\mathbf{u}=C\mathbf{u} \tag{2.5}$$

Поскольку масса манипулятора пренебрежимо мала, то в каждый момент времени он находится в равновесии под действием упругих сил и моментов, развиваемых двигателями. Согласно принципу виртуальных перемещений

$$(\mathbf{M},\ \delta\alpha)-\delta\Pi=(\mathbf{M},\ \delta\alpha)-(C\mathbf{u},\ \delta\mathbf{u})=0 \tag{2.6}$$

Здесь в выражении $\delta\Pi$ опущены квадратичные по $\mathbf{u}$ слагаемые. Равенство (2.6) имеет место при фиксированном радиус-векторе груза $\mathbf{r}$, или в силу (2.2) при условии

$$\delta\mathbf{u}=-\delta\mathbf{r}^\circ=-B\delta\alpha,\quad B=\partial\mathbf{r}^\circ/\partial\alpha \tag{2.7}$$

где B — матрица частных производных, вычисленных в силу соотношений (1.3).

Из (2.6), (2.7) получим

$$\mathbf{M}=-B^TC\mathbf{u} \tag{2.8}$$

Из (2.1), (2.2), (2.5) получим уравнение движения в одной из форм

$$m\mathbf{r}^{\cdot\cdot}=\mathbf{F}(\mathbf{r},\ \mathbf{r}^{\cdot},\ t)-C(\alpha)(\mathbf{r}-\mathbf{r}^\circ) \tag{2.9}$$

$$m\mathbf{u}^{\cdot\cdot}=-C(\alpha)\mathbf{u}+\mathbf{F}(\mathbf{r},\ \mathbf{r}^{\cdot},\ t)-m(\mathbf{r}^\circ)^{\cdot\cdot},\quad \mathbf{r}=\mathbf{r}^\circ+\mathbf{u} \tag{2.10}$$

Пусть задана зависимость $\alpha(t)$ или $\mathbf{r}^\circ(t)$ (случай кинематического управления); взаимосвязь между ними дана соотношениями (1.3), (1.4). Тогда, интегрируя уравнение (2.9) или (2.10) при соответствующих начальных условиях для $\mathbf{r}$, $\mathbf{r}^{\cdot}$ или $\mathbf{u}$, $\mathbf{u}^{\cdot}$, определим движение груза $\mathbf{r}(t)$ и его упругое смещение $\mathbf{u}(t)$. После этого сила $\mathbf{\Phi}$ и моменты двигателей $\mathbf{M}$ можно подсчитать по формулам (2.5), (2.8). Заметим, что уравнение в форме (2.9) не требует вычисления производной $(\mathbf{r}^\circ)^{\cdot\cdot}$, и поэтому может быть удобнее при численном счете.

3. Асимптотическое решение построим, следуя [5], где оно дано для общего случая многозвенного манипулятора. Введем малый параметр $\varepsilon \sim T_1/T_*$ согласно (1.2); тогда для матрицы жесткости и упругого смещения имеем $C \sim \varepsilon^{-2}$, $u \sim \varepsilon^2$, а величина M из (2.8) оказывается конечной. Положим

$$C = \varepsilon^{-2} C^\circ, \quad \mathbf{u} = \mathbf{y} + \mathbf{z}, \quad \mathbf{y} = \varepsilon^2 \mathbf{y}', \quad \mathbf{z} = \varepsilon^2 \mathbf{z}'(t), \quad t = \varepsilon t' \tag{3.1}$$

Быстрое время t' изменяется на величину порядка единицы за период колебаний. Слагаемое $\mathbf{y}(t)$ в (3.1) определим равенством

$$\mathbf{y} = C^{-1}(\alpha) [\mathbf{F}(\mathbf{r}^\circ, (\mathbf{r}^\circ)^{\cdot}, t) - m(\mathbf{r}^\circ)^{\cdot\cdot}] \tag{3.2}$$

Сопоставляя (3.2) и (2.10), видим, что $\mathbf{y}$ есть квазистатическое (медленно меняющееся) упругое смещение. Согласно (3.1), имеем $y \sim \varepsilon^2$. Подставляя равенства (3.1), (3.2) в уравнение (2.10), получим после упрощений уравнение для быстрой (колебательной) части упругого смещения

$$m \frac{d^2 \mathbf{z}'}{dt'^2} + C^\circ(\alpha) \mathbf{z}' = \varepsilon R(t) \frac{d\mathbf{z}'}{dt'} + O(\varepsilon^2), \qquad R(t) = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \dot{\mathbf{r}}} \tag{3.3}$$

Матрица частных производных $R(t)$ и матрица $C^\circ(\boldsymbol{\alpha}(t))$ зависят от медленного (в сравнении с t') времени t. Асимптотическое решение уравнения (3.3) с медленно меняющимися коэффициентами строится по общей схеме метода усреднения [7] и в первом приближении имеет вид [5]:

$$z = \sum_{i=1}^{3} \boldsymbol{\varphi}^i(t) a_i(t) \cos \psi_i, \quad a_i(t) = a_{i0} \left[\frac{\omega_i(0)}{\omega_i(t)} \right]^{1/2} \exp \int_0^t \frac{s_i(t_1)\, dt_1}{2} \tag{3.4}$$

$$\psi_i(t) = \int_0^t \omega_i(t_1)\, dt_1 + \psi_{i0}, \qquad s_i(t) = (R(t) \boldsymbol{\varphi}^i(t), \boldsymbol{\varphi}^i(t))$$

Где уже проведен переход к исходным (без штрихов) переменным согласно (3.1), скобки означают скалярное произведение, ω_i, $\boldsymbol{\varphi}^i$, a_i, ψ_i — соответственно частоты, амплитудные векторы, амплитуды и фазы нормальных колебаний, a_{i0}, ψ_{i0} — произвольные постоянные. Частоты и амплитудные векторы определяются из решения задачи на собственные значения

$$[C(\alpha) - \omega_i^2 m E] \boldsymbol{\varphi}^i = 0 \tag{3.5}$$

где E — единичная матрица порядка 3×3. Так как $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}(t)$, то ω_i, $\boldsymbol{\varphi}^i$ также зависят от t.

Задача (3.5) о собственных колебаниях упругого манипулятора с грузом решена в [6]. Решение имеет вид

$$\omega_1^2 = \frac{3E_1 I_1}{m l^3} \zeta [3(\zeta - \xi) \cos^2 \alpha_3 + 3\zeta \cos \alpha_3 + 3\xi + \zeta(\xi + 1)]^{-1}$$

$$\omega_{2,3}^2 = \frac{6E_1 I_1}{m l^3} [3 \cos \alpha_3 + \xi + 4 \pm P(\xi, \cos \alpha_3)]^{-1}$$

$$\{\boldsymbol{\varphi}^1, \boldsymbol{\varphi}^2, \boldsymbol{\varphi}^3\} = [V^T G(\beta)], \qquad G(\beta) = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\beta & -\sin\beta \\ 0 & \sin\beta & \cos\beta \end{Vmatrix} \tag{3.6}$$

$$\beta = \operatorname{sgn}(\sin \alpha_3) \arccos [(P(\xi, \cos \alpha_3) + 2 + 3 \cos \alpha_3 + \xi + 2 \cos^2 \alpha_3) / \\ /2P(\xi, \cos \alpha_3)]^{1/2}$$

$$P = [4(\xi + 3) \cos^2 \alpha_3 + 6(\xi + 4) \cos \alpha_3 + 13 + \xi^2 + 4\xi]^{1/2}$$

Векторы φ^i есть столбцы матрицы V^TG, причем столбцами матрицы G являются амплитудные векторы в системе координат $O_2X'Y'Z'$. Система нормальных координат представляет собой декартову систему, повернутую относительно $O_2X'Y'Z'$ на угол β вокруг оси X'. Колебания груза с частотами ω_2, ω_3 происходят в плоскости недеформированного манипулятора, а колебания с наиболее низкой частотой ω_1 — перпендикулярно этой плоскости. В предельных случаях распрямленного $\alpha_3=0$ и сложенного $\alpha_3=\pi$ манипулятора имеем $\omega_3\to\infty$.

Преобразуем решение (3.4), используя (3.6) и ограничиваясь для простоты случаем $\partial\mathbf{F}/\partial\mathbf{r}^{\boldsymbol\cdot}=R\equiv0$:

$$\mathbf{z}=V^T(\alpha)G(\beta)\mathbf{f},\quad f_i=a_{i0}\left[\frac{\omega_i(0)}{\omega_i(t)}\right]^{1/2}\cos\left[\int_0^t\omega_i(t_1)\,dt_1+\psi_{i0}\right]\tag{3.7}$$

Определим постоянные a_{i0}, ψ_{i0} в (3.7) по начальным данным $\mathbf{u}(0)$, $\mathbf{u}^{\boldsymbol\cdot}(0)$. Из (3.1) имеем

$$\mathbf{z}(0)=\mathbf{u}(0)-\mathbf{y}(0),\quad \mathbf{z}^{\boldsymbol\cdot}(0)=\mathbf{u}^{\boldsymbol\cdot}(0)\tag{3.8}$$

где величина $\mathbf{y}^{\boldsymbol\cdot}(0)$ опущена, так как она согласно (3.1) меньше по порядку величины, чем $\mathbf{z}^{\boldsymbol\cdot}(0)$. Подставляя решение (3.7) в (3.8) и учитывая ортогональность матриц, получим

$$\mathbf{f}(0)=[G^TV(\mathbf{u}-\mathbf{y})]_{t=0},\quad \mathbf{f}^{\boldsymbol\cdot}(0)=[G^TV\mathbf{u}^{\boldsymbol\cdot}]_{t=0}\tag{3.9}$$

На основании (3.7) выразим постоянные a_{i0}, ψ_{i0} через $f_i(0)$, $f_i^{\boldsymbol\cdot}(0)$:

$$a_{i0}=\{f_i^2(0)+[f_i^{\boldsymbol\cdot}(0)\,\omega_i^{-1}(0)]^2\}^{1/2}$$

$$\psi_{i0}=-\operatorname{arctg}\frac{f_i^{\boldsymbol\cdot}(0)}{f_i(0)\,\omega_i(0)}\quad(f_i(0)\geqslant0),\qquad \psi_{i0}=\pi-\operatorname{arctg}\frac{f_i^{\boldsymbol\cdot}(0)}{f_i(0)\,\omega_i(0)}\quad(f_i(0)\leqslant0)\tag{3.10}$$

При получении формул (3.9), (3.10) пренебрегаем скоростями изменения величин V, G, ω_i, зависящих от α, по сравнению со скоростью упругих колебаний $\mathbf{u}^{\boldsymbol\cdot}$.

Итак, расчет динамики упругого манипулятора асимптотическим методом сводится к следующему.

Пусть задана одна из зависимостей $\alpha(t)$ или $\mathbf{r}^\circ(t)$; по формулам (1.3) или (1.4) определяем вторую из этих зависимостей, затем подсчитываем квазистатическое смещение $\mathbf{y}(t)$ согласно (3.2). По начальным данным $\mathbf{u}(0)$, $\mathbf{u}^{\boldsymbol\cdot}(0)$ определяем $\mathbf{f}(0)$, $\mathbf{f}^{\boldsymbol\cdot}(0)$ и a_{i0}, ψ_{i0} согласно формулам (3.9), (3.10). После этого подсчитывается функция $\mathbf{z}(t)$ по формуле (3.7) и определяются полное упругое смещение $\mathbf{u}(t)=\mathbf{y}(t)+\mathbf{z}(t)$ и положение груза $\mathbf{r}(t)=\mathbf{r}^\circ(t)+\mathbf{u}(t)$ в любой момент времени. Сила $\mathbf{\Phi}$, действующая на манипулятор со стороны груза и равная (с точностью до знака) реакции опоры O, определяется по формуле (2.5), а моменты в шарнирах — по формуле (2.8). Весь расчет требует лишь вычислений по явным формулам и взятия трех квадратур в (3.7). Функции и матрицы V, C, ω_i, G, фигурирующие в расчетных формулах, заданы в зависимости от углов α_i соотношениями (1.5), (2.4), (3.6).

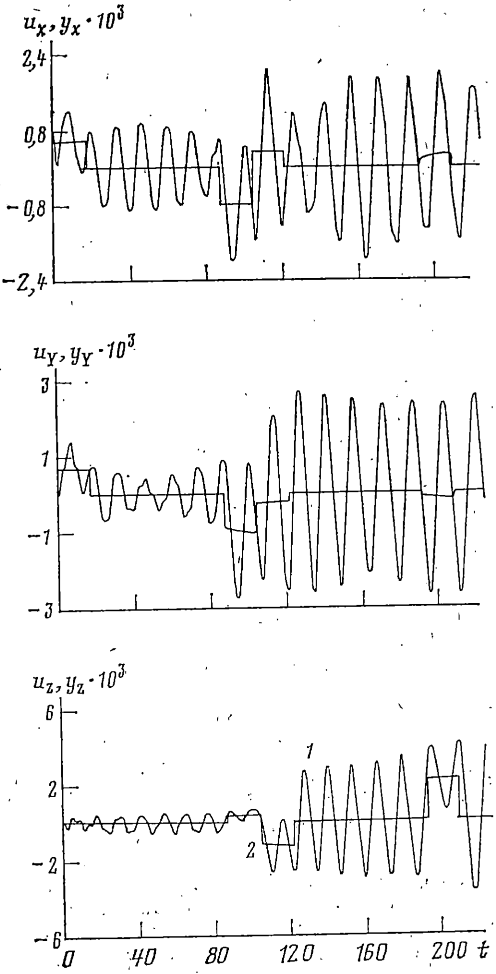
Заметим, что законы изменения $\alpha_i(t)$, $\mathbf{r}^\circ(t)$ предполагались достаточно гладкими. Однако на практике часто встречаются программы движения, в которых ускорение $(\mathbf{r}^\circ(t))^{\boldsymbol{\cdot\cdot}}$ испытывает разрывы (скачки). В момент t_* скачка $(\mathbf{r}^\circ(t))^{\boldsymbol{\cdot\cdot}}$ смещение $\mathbf{y}(t)$ также испытывает скачок согласно (3.2), и поэтому не может считаться медленной переменной. Методика расчета в окрестности момента t_* видоизменяется: вектор $\mathbf{y}$ определяется по-прежнему формулой (3.2), а постоянные a_{i0}, ψ_{i0} в (3.7) испытывают скачки в момент t_*. Новые значения постоянных при $t>t_*$ определяются аналотично (3.8)—(3.10) из условий непрерывности полного упругого смещения $\mathbf{u}(t)$ и скорости $\mathbf{u}^{\cdot}(t)$ в момент t_*.

4. Наряду с асимптотическим решением для сравнения и контроля строилось также численное решение непосредственным интегрированием на ЭВМ уравнения (2.10). Задавались начальные данные $\mathbf{u}(0)$, $\mathbf{u}^{\cdot}(0)$ и функция $\mathbf{r}^{\circ}(t)$; углы $\alpha_i(t)$ рассчитывались по формулам (1.4). Интегрирование проводилось по методу Рунге – Кутта с автоматическим выбором шага и контролем точности. После определения упругого смещения $\mathbf{u}(t)$ сила $\mathbf{\Phi}$ и моменты $\mathbf{M}$ определялись, как и в п. 3, по формулам (2.5), (2.8).

Отметим преимущества и недостатки обоих методов. В отличие от асимптотического метода численный не требует определения собственных частот и форм колебаний, а также обращения матрицы жесткости (см. (3.2)) и расчета начальных данных (3.8)—(3.10). С другой стороны, асимптотический метод позволяет получить решение в виде явных формул и требует лишь вычисления квадратур в (3.7); эти квадратуры можно считать со значительно большим шагом, чем численное интегрирование уравнения упругих колебаний (2.10). Расчет частот и форм колебаний и обращение матрицы C в данном случае выполнены раз и навсегда в аналитическом виде.

В качестве примера приведем результаты расчетов одного пространственного движения упругого манипулятора. Геометрические и механические параметры манипулятора считались равными $l=1$, $m=1$, $E_1I_1={}^1/_3$, $\xi=1{,}5$, $\zeta=1{,}1$.

Внешняя сила $\mathbf{F}$ полагалась равной нулю: $\mathbf{F}\equiv 0$. Программа движения груза для жесткой модели $\mathbf{r}^{\circ}(t)$ задавалась следующим образом. Траектория точки $\mathbf{r}^{\circ}(t)$ представляет собой ломаную $K_0K_1K_2$, состоящую из двух отрезков прямых, имеющих одинаковую длину, образующих угол 120° и лежащих в плоскости $X=-0{,}45$. Координаты концов отрезков в инерциальной системе $OXYZ$ равны (см. фиг. 1) $K_0=(-0{,}45;\ 0{,}84;\ 0{,}52)$; $K_1=(-0{,}45;\ 0{,}33;\ 0{,}82)$, $K_2=(-0{,}45;\ 0{,}33,\ 1{,}42)$.

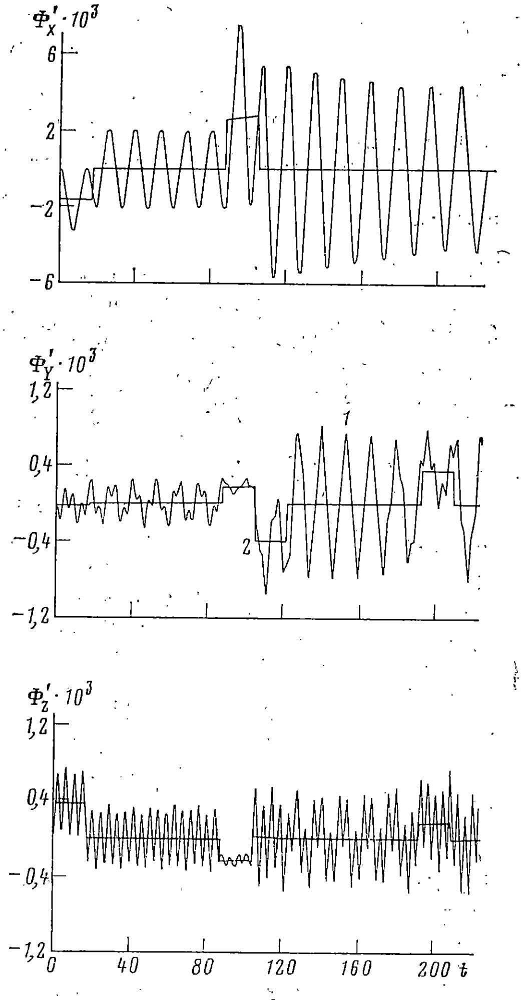


Фиг. 2

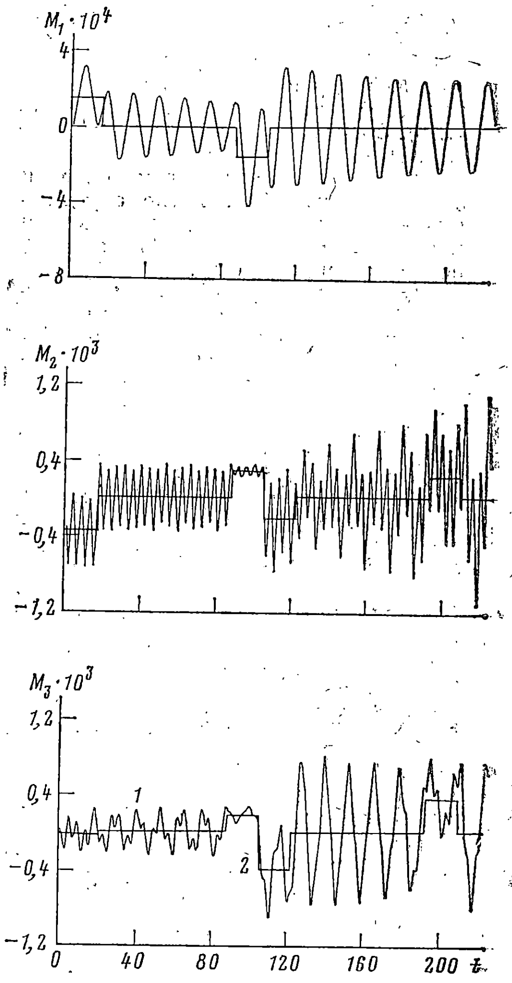
Вдоль каждого из отрезков K_0K_1, K_1K_2 движение конца вектора $\mathbf{r}^{\circ}(t)$ происходило по одному и тому же закону и состояло из участка разгона длительностью $\tau_1=17$, участка движения с постоянной скоростью, длительностью $\tau_2=71$ и участка торможения, длительностью $\tau_1=17$. Постоянная скорость на средних участках равна $|(\mathbf{r}^{\circ})^{\cdot}|=v=0{,}0068$, на участках разгона скорость $|(\mathbf{r}^{\circ})^{\cdot}|$ изменялась линейно от 0 до v, на участках торможения – линейно от v до 0. Полная длительность операции составляла $T_*=4\tau_1+2\tau_2=210$. В течение операции ускорение $(\mathbf{r}^{\circ})^{\cdot\cdot}$ испытывало ряд скачков, что требовало пересчета начальных данных, как описано в конце п. 3. Расчеты проводились асимптотическим и численным методами (пп. 3, 4). Результаты получились весьма близкими: расхождения в величинах упругих смещений, сил и моментов не превышали величин порядка 1%, что лежит в пределах точности методов.

Некоторые результаты представлены на фиг. 2–4. На фиг. 2 даны проекции вектора упругого смещения $\mathbf{u}(t)$ на оси инерциальной системы координат $OXYZ$ (кривая 1). На этих же фигурах даны проекции вектора квазистатического смещения $\mathbf{y}(t)$ на те же оси (кривая 2). Видно, что зависимость $\mathbf{y}(t)$ имеет скачки в точках разрыва ускорения $(\mathbf{r}^{\circ})^{\cdot\cdot}$; полное же упругое смещение $\mathbf{u}(t)$ – непрерывная и гладкая функция. Зависимость $\mathbf{u}(t)$ имеет характер колебаний переменной амплитуды с медленно меняющейся частотой. Эти колебания отвечают в основном низшим частотам ω_1, ω_2.

На фиг. 3 даны проекции силы $\mathbf{\Phi}$ на оси подвижной системы координат $O_2X'Y'Z'$ (кривая 1). В проекции $\mathbf{\Phi}$ на ось Z' существенно проявляются колебания высшего



Фиг. 3



Фиг. 4

тона с частотой ω_3. На фиг. 4 представлены зависимости моментов в шарнирах $M_i(t)$, $i=1, 2, 3$. Графики этих функций отмечены цифрой 1. Здесь колебания высшей частоты особенно заметны в зависимости $M_2(t)$.

На фиг. 3, 4 для сравнения указаны также зависимости сил Ф и моментов M в случае жесткой модели (кривые 2). Эти зависимости не содержат колебаний и имеют разрывы в моменты скачков ускорения $(\mathbf{r}^\circ)^{\cdot\cdot}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Попов Е. П., Верещагин А. Ф., Зенкевич С. А.* Манипуляционные роботы: динамика и алгоритмы. М.: Наука, 1978. 398 с.
2. *Book W. J.* Analysis of massless elastic chains with servo controlled joints.— Trans. ASME. J. Dynamic Syst. Measurem. and Control, 1979, v. 101, No. 3, p. 187—192.
3. *Лакота Н. А., Рахманов Е. В., Шведов В. Н.* Управление упругим манипулятором на траектории.— Изв. АН СССР. Техническая кибернетика, 1980, № 2, с. 53—59.
4. *Акуленко Л. Д., Михайлов С. А., Черноусько Ф. Л.* Моделирование динамики манипулятора с упругими звеньями.— Изв. АН СССР. МТТ, 1981, № 3, с. 118—124.
5. *Черноусько Ф. Л.* Динамика управляемых движений упругого манипулятора.— Изв. АН СССР. Техническая кибернетика, 1981, № 5, с. 142—152.
6. *Михайлов С. А.* Собственные колебания упругого двузвенника с точечной массой.— Изв. АН СССР. МТТ, 1983, № 2, с. 72—75.
7. *Митропольский Ю. А.* Проблемы асимптотической теории нестационарных колебаний. М.: Наука, 1964. 431 с.

Москва

Поступила в редакцию
20.X.1982