МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 2 · 1984

УДК 531.38+517.15

МЕТОД УСКОРЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКОГО ДВИЖЕНИЯ В АТМОСФЕРЕ ТВЕРДОГО ПОЧТИ ОСЕСИММЕТРИЧНОГО ТЕЛА

БЕЛОКОНОВ В. М., БЕЛОКОНОВ И. В., ЗАБОЛОТНОВ Ю. М.

Предлагается метод ускоренного расчета на ЭВМ движения в атмосфере твердого осесимметричного тела с малой асимметрией, основанный на использовании неявной схемы метода осреднения. Вместо исходной системы уравнений производится расчет другой системы, быстрые переменные которой колеблются с меньшей частотой, что позволяет уменьшить объем вычислений. Вид этой преобразованной системы определяется из условия инвариантности уравнений первого приближения метода осреднения. В [1, 2] метод применялся для ускорения расчета на ЭВМ системы дифференциальных уравнений с одной быстрой переменной. Однако использование этого метода для расчета движения в атмосфере асимметричного твердого тела требует его дальнейшего обобщения на случай многомерных вращательно-колебательных движений. В публикуемой работе дается развитие метода, позволяющего расширить область его применения, в частности рассчитать околорезонансный режим движения в атмосфере твердого тела с малой асимметрией. В отличие от предыдущих работ проводится обоснование вида преобразованной системы. Численным моделированием исследуется зависимость величины погрешности метода от параметров преобразованной системы и от режима движения твердого тела (нерезонансный и резонансный случаи). Подобный метод неявного использования асимптотических решений можно назвать «методом искусственного увеличения периодов колебаний» [2] или «методом искусственного уменьшения жесткости системы» [1].

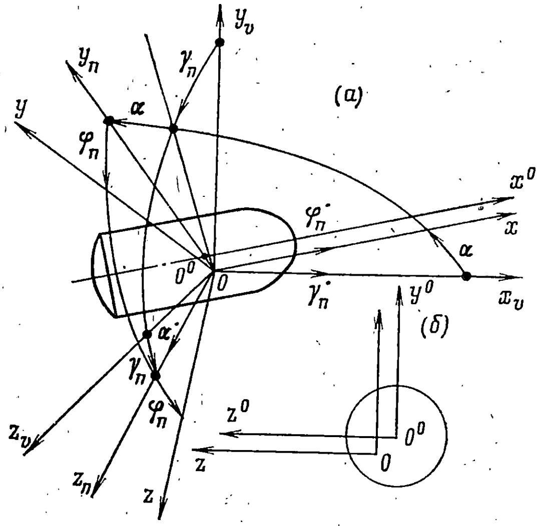
1. Исходную систему дифференциальных уравнений движения в атмосфере твердого почти осесимметричного тела запишем в форме, удобной для применения метода осреднения

$$\frac{dQ_x}{dt}=M_x^a+\Delta M_x,\quad \frac{dQ_v}{dt}=M_v^a+\frac{c_yqS}{mv}\frac{Q_x-Q_v\cos\alpha}{\sin\alpha}+\Delta M_v$$

$$\frac{d\omega_{z_n}}{dt}=\frac{M_{z_n}}{I}+\frac{(Q_x-Q_v\cos\alpha)(Q_x\cos\alpha-Q_v)}{I^2\sin^3\alpha}+\frac{M_{z_n}^a}{I}+\frac{\Delta M_{z_n}}{I}\tag{1.1}$$

$$\frac{d\alpha}{dt}=\omega_{z_n}+\frac{c_yqS}{mv},\quad \frac{d\varphi_n}{dt}=\frac{Q_x}{I_x}+\frac{Q_x\cos\alpha-Q_v}{I\sin^2\alpha}\cos\alpha+\Delta\omega_\varphi$$

Здесь Q_x и Q_v – проекции кинетического момента тела на ось Ox связанной системы координат $Oxyz$ (начало координат O совпадает с центром масс) и направление воздушной скорости v тела (фиг. 1), α и φ_n – пространственный угол атаки (угол нутации) и угол собственного вращения тела (фиг. 1), ω_{z_n} – проекция угловой скорости тела на ось Oz_n системы координат Oxy_nz_n, связанной с плоскостью пространственного угла атаки (фиг. 1), M_{z_n} – проекция статического аэродинамического момента на ось Oz_n, M_x^a, M_v^a и $M_{z_n}^a$ – проекции момента от массовой асимметрии тела на соответствующие оси, ΔM_x, ΔM_v и ΔM_{z_n} – другие малые моменты, действующие на тело в атмосфере, $\Delta\omega_\varphi$ – малая поправка к $d\varphi_n/dt$, обусловленная массовой асимметрией, c_y – коэффициент подъемной силы, q – скоростной напор, S – характерная площадь, m – масса тела, I_x и I_z (I_y или I_z) – осевой и один из экваториальных моментов инерции тела.



Фиг. 1

Проекции момента от массовой асимметрии тела определяются из выражений

$$\begin{aligned} M_x^a = {} & c_{y_n}(z^\circ\cos\varphi_n + y^\circ\sin\varphi_n)qS + \frac{\Delta I}{I}\left\{\omega_{z_n}\frac{Q_v - Q_x\cos\alpha}{\sin\alpha}\cos 2\varphi_n + \right.\\ & \left. + \frac{\sin 2\varphi_n}{2}\left[\left(\frac{Q_x\cos\alpha - Q_v}{I\sin\alpha}\right)^2 - \omega_{z_n}^2\right]I\right\} + \frac{I_{yz}}{I}\left\{2\omega_{z_n}\frac{Q_x\cos\alpha - Q_v}{\sin\alpha}\sin 2\varphi_n + \right.\\ & \left. + \cos 2\varphi_n\left[\left(\frac{Q_x\cos\alpha - Q_v}{I\sin\alpha}\right)^2 - \omega_{z_n}^2\right]I\right\} + (I_{xz})_n\frac{Q_x}{I_x}\frac{Q_x\cos\alpha - Q_v}{I\sin\alpha} - \\ & - (I_{xy})_n\frac{Q_x}{I_x}\omega_{z_n} \end{aligned}$$

$$M_v^a = (c_{yn}\cos\alpha + c_x\sin\alpha)(z^\circ\cos\varphi_n + y^\circ\sin\varphi_n)qS$$

$$\begin{aligned} M_{z_n}^a = {} & -c_x(z^0\sin\varphi_n - y^0\cos\varphi_n)qS + \Delta I\left[\left(\frac{Q_x}{I_x} + \frac{Q_x\cos\alpha - Q_v}{I\sin^2\alpha}\cos\alpha\right)\times\right.\\ & \times\left(\omega_{z_n}\sin 2\varphi_n + \frac{Q_x\cos\alpha - Q_v}{I\sin\alpha}\cos 2\varphi_n\right) + \\ & \left. + \frac{(Q_x - Q_v\cos\alpha)(Q_x\cos\alpha - Q_v)}{I^2\sin^3\alpha} + \frac{M_{z_n}}{I}\sin^2\varphi_n\right] - \\ & - I_{yz}\left[2\left(\frac{Q_x}{I_x} + \frac{Q_x\cos\alpha - Q_v}{I\sin^2\alpha}\cos\alpha\right)\left(\frac{Q_x\cos\alpha - Q_v}{I\sin\alpha}\sin 2\varphi_n - \omega_{z_n}\cos 2\varphi_n\right) - \right.\\ & \left. - \frac{M_{z_n}}{I}\sin 2\varphi_n\right] + (I_{xy})_n\frac{Q_x}{I_x}\left[\frac{Q_x}{I_x} + \frac{Q_x(1+\cos^2\alpha) - 2Q_v\cos\alpha}{I\sin^2\alpha}\right] \end{aligned}$$

Здесь y° и z° — координаты центра масс тела в системе координат $O^\circ x^\circ y^\circ z^\circ$ (фиг. 1), оси которой параллельны осям связанной системы координат $Oxyz$ (начало координат O° лежит на оси вращения тела, плоскости $O^\circ y^\circ z^\circ$ и Oyz совпадают), c_{yn} и c_x — коэффициенты аэродинамической силы, соответствующие осям Oy_n и Ox (фиг. 1), $\Delta I = I_z - I_y$, $(I_{xy})_n = I_{xy}\cos\varphi_n - I_{xz}\sin\varphi_n$, $(I_{xz})_n = I_{xz}\cos\varphi_n + I_{xy}\sin\varphi_n$.

Система уравнений (1.1) получена из общих уравнений динамики движения твердого тела относительно центра масс. Уравнения (1.1) близки к уравнениям, описывающим движение твердого осесимметричного тела с закрепленной точкой под действием момента силы тяжести. Подобная форма уравнений использовалась во многих работах, например в [2—4].

Систему уравнений (1.1) нужно рассматривать совместно с уравнениями движения центра масс твердого тела, которые характеризуют зависимость решений от медленного времени.

2. Развиваемый в работе метод заключается в замене исходной системы уравнений (1.1) преобразованной системой, определяемой из условия равенства усредненных уравнений обеих систем. Для обоснования вида преобразованной системы рассмотрим систему более общего вида, описывающую вращательно-колебательные одночастотные движения, асимптотические решения которой исследовались в [5]:

$$\frac{dx}{dt}=\varepsilon X_1(\tau,x,y)+\varepsilon^2\ldots,\qquad \frac{dy}{dt}=Y_0(\tau,x,y)+\varepsilon Y_1(\tau,x,y)+\varepsilon^2\ldots \tag{2.1}$$

Здесь ε — малый параметр, $x=\{x_1,\ldots x_n\}$ — вектор медленных переменных системы, $y=\{y_1,\ldots,y_m\}$ — вектор быстрых переменных системы, $X_1(\tau,x,y)$ — n-мерная вектор-функция, $Y_0(\tau,x,y)$, $Y_1(\tau,x,y)$ — m-мерные вектор-функции, $\tau=\varepsilon t$ — медленное время.

Предполагается, что существует общее решение вырожденной системы

$$dy/dt=Y_0(\tau,x,y),\quad x=\mathrm{const},\quad \tau=\mathrm{const} \tag{2.2}$$

в которую переходит система (2.1) при $\varepsilon=0$. Пусть в системе имеются колебательные и вращательные движения, тогда общее решение вырожденной системы (2.2) запишется в виде $y=T\varphi/2\pi+y^\circ(\tau,c,x,\varphi)$.

Здесь $y=\{y^{(1)},y^{(2)}\}$, $y^{(1)}=\{y_1,\ldots,y_s\}$ $(s\leqslant m)$ — колебательные переменные с периодом $T_0(\tau,c,x)$, $y^{(2)}=\{y_{s+1},\ldots,y_m\}$ — вращательные переменные, $T=\{0,\ldots,0,T_{s+1},\ldots,T_m\}$ — совокупность приращений, которые получат компоненты вектора y за промежуток времени $\Delta T=T_0$, $\varphi=2\pi(t-t_0)\times\times T_0^{-1}(\tau,c,x)+c_m$ — фаза, $c=\{c_1,\ldots,c_{m-1}\}$ — совокупность $m-1$ произвольных постоянных, от которых зависит период T_0, c_m — фазовая произвольная постоянная, t_0 — начальное время, $y^\circ(\tau,c,x,\varphi)$ — m-мерная вектор-функция, периодически зависящая от фазы φ с периодом 2π.

Если интегралы порождающей системы (2.2) $c_1,\ldots,c_m$ известны, то, применяя метод вариации произвольных постоянных, нетрудно свести возмущенную систему (2.1) к системе с быстро вращающейся фазой вида [5]:

$$\frac{dr}{dt}=\varepsilon R_1(\tau,r,\varphi)+\varepsilon^2\ldots,\qquad \frac{d\varphi}{dt}=\omega(\tau,r)+\varepsilon\Phi_1(\tau,r,\varphi)+\varepsilon^2\ldots \tag{2.3}$$

Здесь $r=\{x,c\}$ — совокупность векторов x и c, $\omega(\tau,r)=2\pi/T_0(\tau,r)$, $R_1(\tau,r,\varphi)$ и $\Phi_1(\tau,r,\varphi)$ — известные функции, периодические по φ с периодом 2π.

Метод осреднения системы (2.3) заключается в отыскании замены переменных вида

$$r=r^\circ(\tau)+\varepsilon r_1(\tau,r^\circ,\varphi^\circ)+\varepsilon^2,\ldots\ \varphi=\varphi^\circ(\tau)+\varepsilon\varphi_1(\tau,r^\circ,\varphi^\circ)+\varepsilon^2\ldots \tag{2.4}$$

При этом r° и φ° удовлетворяют уравнениям, правые части которых не содержат φ°, т. е.

$$\frac{dr^\circ}{dt}=\varepsilon A_1(\tau,r^\circ)+\varepsilon^2A_2(\tau,r^\circ)+\varepsilon^3\ldots,\qquad \frac{d\varphi^\circ}{dt}=\omega(\tau,r^\circ)+\varepsilon B_1(\tau,r^\circ)+\varepsilon^2\ldots \tag{2.5}$$

После подстановки рядов (2.4) в систему (2.3) находятся неизвестные функции r_1, φ_1, A_1, A_2, B_1.

Первое и второе приближения метода осреднения для системы (2.3) определяются из следующих выражений [6]:

$$\frac{dr^\circ}{dt}=\varepsilon A_1(\tau,r^\circ)+\varepsilon^2A_2(\tau,r^\circ); \qquad A_1(\tau,r^\circ)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}R_1(\tau,r^\circ,\varphi^\circ)\,d\varphi^\circ$$

$$r_1(\tau,r^\circ,\varphi^\circ)=\frac{1}{\omega(\tau,r^\circ)}\int_{\varphi_0^\circ}^{\varphi^\circ}[R_1(\tau,r^\circ,\varphi^\circ)-A_1(\tau,r^\circ)]\,d\varphi^\circ,$$

$$B_1(\tau,r^\circ)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}h_1(\tau,r^\circ,\varphi^\circ)\,d\varphi^\circ \tag{2.6}$$

$$\varphi_1(\tau,r^\circ,\varphi^\circ)=\frac{1}{\omega(\tau,r^\circ)}\int_{\varphi_0^\circ}^{\varphi^\circ}[h_1(\tau,r^\circ,\varphi^\circ)-B_1(\tau,r^\circ)]\,d\varphi^\circ$$

$$A_2(\tau,r^\circ)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\partial R_1}{\partial r^\circ}r_1-\frac{\partial r_1}{\partial r^\circ}A_1-\frac{\partial r_1}{\partial\varphi^\circ}B_1\right)d\varphi^\circ$$

$$h_1(\tau,r^\circ,\varphi^\circ)=\Phi_1(\tau,r^\circ,\varphi^\circ)+\frac{\partial\omega}{\partial r^\circ}r_1(\tau,r^\circ,\varphi^\circ)$$

Для сокращения трудоемкости интегрирования системы (2.3) период колебаний T_0 искусственно увеличивается в $k(\tau)^{-1}$ раз, т. е. в системе (2.3) период T_0 заменяется на $T_{0*}=T_0/k(\tau)$, где $k(\tau)$ — некоторый коэффициент, такой, что $k(\tau)<1$. В дальнейшем звездочкой обозначаются переменные преобразованной системы. Тогда система (2.3) приводится к виду

$$\frac{dr_*}{dt}=\varepsilon R_1(\tau,r_*,\varphi_*)+\varepsilon^2\ldots, \qquad \frac{d\varphi_*}{dt}=k(\tau)\,\omega(\tau,r_*)+\varepsilon\Phi_1(\tau,r_*,\varphi_*)+\varepsilon^2\ldots \tag{2.7}$$

Здесь R_1 и Φ_1 — функции, периодические по φ_* с периодом 2π.

Для доказательства справедливости используемого приема производится сравнение асимптотических решений систем (2.3) и (2.7). В результате записи решений метода осреднения для системы (2.7) и сравнения полученных выражений с (2.6), справедливых для системы (2.3), определяются простые соотношения между их асимптотическими решениями: $A_1(\tau,r^\circ)=A_1(\tau,r_*^\circ)$, т. е. в первом приближении векторы r и r_* совпадают, а $r_{1*}=r_1/k(\tau)$, $B_1=B_{1*}$, $\varphi_{1*}=\varphi_1/k(\tau)$, т. е. колеблющиеся добавки к первому приближению в рядах (2.4) в $k(\tau)^{-1}$ раз увеличиваются.

Чтобы получить систему первоначального вида, аналогичную (2.1), производится обратный переход с учетом (2.7). Общее решение вырожденной системы при увеличении в $k(\tau)^{-1}$ раз периода колебаний T_0 принимает вид

$$y_*=T\varphi_*/2\pi+y^\circ(\tau,c,x,\varphi_*), \quad \varphi_*=2\pi k(\tau)(t-t_0)/T_0(\tau,c,x)+c_m \tag{2.8}$$

Дифференцируя (2.8) по t при постоянных τ, c, x, приходим к вырожденной системе $dy_*/dt=k(\tau)Y_0(\tau,x,y_*)$, $x=\mathrm{const}$, $\tau=\mathrm{const}$.

Соответствующая ей система общего вида записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} dx_*/dt&=\varepsilon X_1(\tau,x_*,y_*)+\varepsilon^2\ldots\\ dy_*/dt&=k(\tau)Y_0(\tau,x_*,y_*)+\varepsilon Y_1(\tau,x_*,y_*)+\varepsilon^2\ldots \end{aligned} \tag{2.9}$$

Система (2.9) может использоваться вместо исходной системы (2.1), так как она определена из условий инвариантности уравнений первого приближения метода осреднения. Однако интегрирование ее на ЭВМ производится значительно быстрее в связи с тем, что ее быстрые переменные колеблются с меньшей частотой.

Таким образом, рассмотрение системы дифференциальных уравнений достаточно общего вида (2.1) позволило обосновать форму преобразованной системы (2.9) и выявить основные особенности применения метода искусственного увеличения периодов колебаний.

3. Пусть нелинейная колебательная система характеризуется набором частот $\omega_1, \ldots, \omega_m$, тогда она, как правило, представляется в виде

$$\frac{dr}{dt} = \varepsilon R_1(\tau, r, \psi) + \varepsilon^2 \ldots, \qquad \frac{d\psi}{dt} = \omega(\tau, r) + \varepsilon \Psi_1(\tau, r, \psi) + \varepsilon^2 \ldots \tag{3.1}$$

Здесь $r = \{r_1, \ldots, r_n\}$ — вектор медленных переменных системы, $\psi = \{\psi_1, \ldots, \psi_m\}$ — совокупность фаз, соответствующая частотам $\omega(\tau, r) = \{\omega_1(\tau, r), \ldots, \omega_m(\tau, r)\}$, R_1 и Ψ_1 — функции, периодические по $\psi_1, \ldots, \psi_m$ с периодом 2π.

Если резонансные соотношения между частотами

$$\omega_1(\tau, r) n_1^{(j)} + \ldots + \omega_m(\tau, r) n_m^{(j)} = 0 \quad {\scriptstyle (j=1,\ldots k)} \tag{3.2}$$

где $n_i^{(j)}$ — целые числа, k — количество резонансных соотношений, такое, что $k < m$, не выполняются, то усреднение по каждой из фаз $\psi_1, \ldots, \psi_m$ уравнений медленных переменных производится независимо. Поэтому доказательство равенства усредненных уравнений исходной и преобразованной систем (последняя имеет формально тот же вид (2.7)) проводится аналогично одночастотному случаю.

При движении твердого осесимметричного тела с малой асимметрией в атмосфере резонансные соотношения возможны между частотами двух быстрых переменных: пространственного угла атаки α и угла собственного вращения φ_n.

Поэтому для простоты здесь рассматривается околорезонансный случай двух вращающихся фаз γ и φ, соответствующих α и φ_n, хотя распространение метода на случай нескольких вращающихся фаз не представляет принципиальной трудности.

В соответствии с методом осреднения для резонансного случая [5] вводится вспомогательная переменная ϑ, определяющая расстройку фаз γ и φ. Тогда

$$\begin{aligned} dr/dt &= \varepsilon R_1(\tau, r, \vartheta, \varphi) + \varepsilon^2 \ldots \\ d\varphi/dt &= \omega_\varphi(\tau, r) + \varepsilon \Phi_1(\tau, r, \vartheta, \varphi) + \varepsilon^2 \ldots \\ d\vartheta/dt &= \omega_\vartheta(\tau, r) + \varepsilon \theta_1(\tau, r, \vartheta, \varphi) + \varepsilon^2 \ldots \end{aligned} \tag{3.3}$$

Здесь $\omega_\vartheta(\tau, r) = \omega_\gamma(\tau, r) - (n_1/n_2)\omega_\varphi(\tau, r)$, n_1 и n_2 — целые числа (для простоты полагается $n_2 = 1$).

Уменьшая искусственно частоты ω_γ и ω_φ в $k(\tau)^{-1}$ раз, приходим к преобразованной системе

$$\begin{aligned} dr_*/dt &= \varepsilon R_1(\tau, r_*, \vartheta_*, \varphi_*) + \varepsilon^2 \ldots \\ d\varphi_*/dt &= k(\tau)\omega_\varphi(\tau, r_*) + \varepsilon \Phi_1(\tau, r_*, \vartheta_*, \varphi_*) + \varepsilon^2 \ldots \\ d\vartheta_*/dt &= k(\tau)\omega_\vartheta(\tau, r_*) + \varepsilon \theta_1(\tau, r_*, \vartheta_*, \varphi_*) + \varepsilon^2 \ldots \end{aligned} \tag{3.4}$$

Для определения первого приближения в резонансном случае достаточно осреднить (3.3) и (3.4) соответственно по φ и φ_* и далее рассмотреть асимптотические разложения решений в окрестности поверхности $\omega_\vartheta(\tau, r) = 0$, определяющей резонансную область.

После осреднения по φ система (3.3) переходит в систему

$$\frac{dr}{dt} = \varepsilon R_1^\circ(\tau, r, \vartheta), \qquad \frac{d\vartheta}{dt} = \omega_\vartheta(\tau, r) + \varepsilon \theta_1^\circ(\tau, r, \vartheta) \tag{3.5}$$

Здесь R_1° и θ_1° — функции R_1 и θ_1, осредненные по φ.

Аналогично для преобразованной системы имеем

$$\frac{dr_*}{dt}=\varepsilon R_1^\circ(\tau, r_*, \vartheta_*), \qquad \frac{d\vartheta_*}{dt}=k(\tau)\,\omega_\vartheta(\tau, r_*)+\varepsilon\theta_1^\circ(\tau, r_*, \vartheta_*) \qquad (3.6)$$

Уравнение поверхности $\omega_\vartheta(\tau, r)=0$, определяющее резонансную область, одинаково для исходной и преобразованной систем уравнений. При пересечении траектории поверхности $\omega_\vartheta(\tau, r)=0$ в нелинейных системах возможны два случая: прохождение через резонанс и захват траектории в резонансный режим. Для захвата траектории в длительный резонансный режим необходимо и достаточно выполнения условия возможности захвата траектории в резонанс и условий устойчивости длительного резонансного режима. Эти условия имеют следующий вид [4, 5]:

$$\max_\vartheta f \min_\vartheta f\leqslant 0, \qquad -\frac{\partial\omega_\vartheta}{\partial r}\frac{\partial R_1^\circ}{\partial\vartheta}>0$$
$$\frac{\partial R_1^\circ}{\partial r}+\frac{\partial\theta_1^\circ}{\partial\vartheta}<0, \qquad f(r,\vartheta)=\frac{\partial\omega_\vartheta}{\partial r}R_1^\circ(r,\vartheta) \qquad (3.7)$$

Здесь и далее медленное время τ включено в вектор r медленных переменных. Нетрудно показать, что введение коэффициента $k(\tau)$ не изменяет условий (3.7), а значит, не оказывает влияния на закономерности фазовой траектории системы при прохождении через резонанс, захвате в резонансный режим и выходе из резонансной области.

В окрестности поверхности $\omega_\vartheta(r)=0$ можно представить решение системы (3.5) в виде [4]:

$$r=r^\circ(\tau)+\varepsilon r_1(\tau)+\varepsilon^2\ldots, \qquad \vartheta=\vartheta^\circ(\tau)+\varepsilon\vartheta_1(\tau)+\varepsilon^2\ldots \qquad (3.8)$$

Подставляя ряды (3.8) в систему (3.5) и приравнивая члены при одинаковых степенях ε, найдем для первого приближения

$$dr^\circ/d\tau=R_1^\circ(r^\circ, \vartheta^\circ), \qquad \omega_\vartheta(r^\circ)=0 \qquad (3.9)$$

Дифференцируя последнее равенство по τ, получим

$$f(r^\circ, \vartheta^\circ)=(\partial\omega_\vartheta/\partial r^\circ)R_1^\circ(r^\circ, \vartheta^\circ)=0 \qquad (3.10)$$

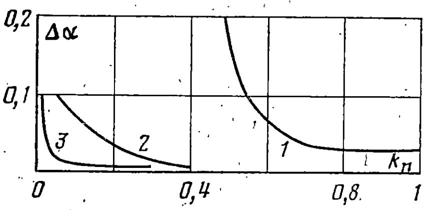
Первое из соотношений (3.9) и уравнение (3.10) определяют в первом приближении траекторию системы, располагающуюся на поверхности $\omega_\vartheta(r)=0$. Эти соотношения, записанные для исходной (3.5) и преобразованной (3.6) систем, тождественно равны, что обусловливает совпадение в первом приближении движений этих систем при захвате траектории в длительный резонансный режим. Частота колебаний траектории преобразованной системы относительно поверхности $\omega_\vartheta(r)=0$ при этом уменьшается.

Таким образом, доказано, что и в околорезонансном режиме изменения переменных уравнения первого приближения метода осреднения исходной и преобразованной систем равны.

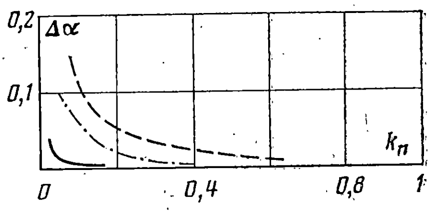
Можно отметить следующие преимущества метода искусственного увеличения периодов колебаний по сравнению с применением явных схем метода осреднения: универсальность метода (форма преобразованной системы уравнений одинакова для различных типов систем дифференциальных уравнений); простота реализации на ЭВМ (отсутствие необходимости предварительных замен переменных исходной системы уравнений); одинаковая реализация метода для нерезонансного и резонансного режимов движения тела.

4. В работе [4] показано, что система уравнений (1.1), описывающая движение в атмосфере твердого тела, близкого к осесимметричному, приводится к системе с двумя вращающимися фазами. Поэтому для ускорения

ее расчета на ЭВМ может быть применен метод искусственного увеличения периодов колебаний. Коэффициент $k(\tau)$ для системы (1.1) рационально задать в виде $k(\tau)=k_n\cdot k_q=k(q)$, где k_n — постоянный по траектории коэффициент, определяемый инерционно-массовыми и аэродинамическими параметрами тела, $k_q=k_q(q)$ — коэффициент, учитывающий изменение частоты колебаний тела по траектории, q — скоростной напор. Коэффициент k_q определяется как отношение частоты колебаний тела на высоте



Фиг. 2



Фиг. 3

начала применения метода искусственного увеличения периодов колебаний ($H_n\approx75-80$ км) к текущей частоте. Принимая во внимание, что частота колебаний тела приблизительно пропорциональна $\sqrt{q}$, получим $k_q=$ $=[q(H_n)/q(H)]^{1/2}$, где $q(H_n)$ — скоростной напор на высоте H_n, $q(H)$ — текущий скоростной напор. Учитывая (2.9) и (3.4), приходим к системе дифференциальных уравнений

$$dQ_x/dt=k(q)M_x^a+\Delta M_x$$

$$\frac{dQ_v}{dt}=k(q)M_v^a+\frac{c_yqS}{mv}\frac{Q_x-Q_v\cos\alpha}{\sin\alpha}+\Delta M_v$$

$$\frac{d\omega_{zn}}{dt}=k(q)\left[\frac{M_{zn}}{I}+\frac{(Q_x-Q_v\cos\alpha)(Q_x\cos\alpha-Q_v)}{I^2\sin^3\alpha}+\frac{M_{zn}^a}{I}\right]+\frac{\Delta M_{zn}}{I} \quad (4.1)$$

$$d\alpha/dt=k(q)\,\omega_{zn}+c_yqS/mv$$

$$\frac{d\varphi_n}{dt}=k(q)\left(\frac{Q_x}{I_x}+\frac{Q_x\cos\alpha-Q_v}{I\sin^2\alpha}\cos\alpha\right)+\Delta\omega_\varphi$$

Ниже приводится сравнение нескольких форм преобразованной системы (4.1):

1) коэффициент $k(q)$ остается в третьем и четвертом уравнениях системы (4.1) (M_{zn}^a на него не умножается), в остальных уравнениях полагается $k(q)=1$ (метод [1]);

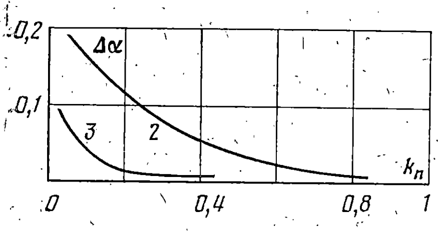
2) коэффициент $k(q)$ остается в третьем, четвертом и пятом уравнениях системы (4.1) (M_x^a, M_v^a и M_{zn}^a на него не умножаются);

3) коэффициент $k(q)$ входит во все уравнения системы согласно (4.1).

В последнем случае в преобразованной системе (4.1) полагается формально, что моменты M_x^a, M_v^a и M_{zn}^a от массовой асимметрии тела не являются малыми.

Сравнение различных вариантов метода показывает более высокую точность и меньшую трудоемкость при счете на ЭВМ варианта 3) по сравнению с вариантами 2) и 1), а варианта 2) по сравнению с вариантом 1). Некоторые результаты расчетов на ЭВМ иллюстрируются на фиг. 2—4. В качестве контролируемой характеристики движения в атмосфере тела, близкого к осесимметричному, на графиках фиг. 2, 3 показан максимальный угол атаки α_m (амплитуда колебаний) в момент прохождения телом максимального скоростного напора $q_{\max}$. На фиг. 2, 3 приводится зависимость относительной погрешности $\Delta\alpha=|(\alpha_{m*}-\alpha_m)/\alpha_m|$ вычисления

α_m по преобразованной системе (4.1) для вариантов 1), 2), 3) и различных величинах асимметрии тела от коэффициента k_n в случае нерезонансного режима движения. Расчеты, представленные на фиг. 2, проводились при асимметрии тела, характеризуемой отношением $I_{yz}/I=0{,}05$. На фиг. 3 показано влияние величины массовой асимметрии тела вращения вида $y^\circ \neq 0$ на погрешность вычисления α_m. Пунктирная кривая на фиг. 3 соответствует асимметрии $y^\circ/l=0{,}005$, а штрихпунктирная — $y^\circ/l=0{,}01$, где l — длина тела. Обе кривые получены в результате расчетов по варианту 2). Если при отсутствии асимметрии точность во всех трех вариантах практически совпадает, то для асимметричного тела погрешность варианта 1) значительно больше (фиг. 2). Точность варианта 2) зависит от величины асимметрии, что иллюстрируется фиг. 3, и при увеличении асимметрии погрешность варианта 2) возрастает. Точность варианта 3) практически не зависит от величины асимметрии (на фиг. 3 кривые, соответствующие $y^\circ/l=0{,}005$ и $y^\circ/l=0{,}01$, слились в одну) и значение k_n ограничивается снизу лишь условием применения асимптотического метода [2]. На фиг. 4 приводится зависимость относительной погрешности вычисления максимального угла атаки $\Delta\alpha=|(\alpha_{m*}-\alpha_m)/\alpha_m|$ при прохождении тела, близкого к осесимметричному, через резонанс от коэффициента k_n. Рассматривается асимметрия с параметром $y^\circ/l=0{,}008$. Графики показывают большую точность вариантов 2) и 3) и в этом случае, хотя погрешность вычислений возрастает по сравнению с нерезонансным режимом движения. Аналогично может быть рассмотрен расчет по преобразованной системе других характеристик движения в атмосфере твердого почти осесимметричного тела: времени движения, перегрузки, дальности полета и др. В качественном отношении зависимость погрешности их вычисления от коэффициента k_n остается той же.



Фиг. 4

Предлагаемый метод ускоренного расчета на ЭВМ системы (1.1) дает существенный выигрыш в объеме вычислений, если исходные частоты тела велики. При моделировании неуправляемого движения в атмосфере тела, близкого к осесимметричному, удалось достигнуть 20-кратного уменьшения объема вычислений.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ярошевский В. А., Воейков В. В.* Метод ускорения расчета быстрых квазипериодических движений на ЦВМ.– Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1964, т. 4, № 1, с. 168–171.
2. *Кузмак Г. Е.* Динамика неуправляемого движения летательных аппаратов при входе в атмосферу. М.: Наука, 1970. 347 с.
3. *Лурье А. И.* Аналитическая механика. М.: Физматгиз, 1961. 824 с.
4. *Ярошевский В. А.* Движение неуправляемого тела в атмосфере. М.: Машиностроение, 1978. 167 с.
5. *Волосов В. М., Моргунов Б. И.* Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем. М.: Изд-во МГУ, 1971. 507 с.
6. *Моисеев Н. Н.* Асимптотические методы нелинейной механики. М.: Наука, 1981. 400 с.

Куйбышев

Поступила в редакцию 2.III.1982