МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 2 · 1984

УДК 531.383

К ОЦЕНКЕ УХОДОВ ГИРОСКОПА В ЗАВИСИМОСТИ ОТ ФАЗОВОГО УГЛА ВРАЩАЮЩЕГОСЯ МАГНИТНОГО ПОЛЯ СИНХРОННОГО ГИРОДВИГАТЕЛЯ

ДЕЛЕКТОРСКИЙ Б. А., НОВОЖИЛОВ И. В.

Замечено, что уходы гироскопа с гиродвигателем гистерезисного типа меняются от запуска к запуску или при кратковременных перебоях питания. Высказано предположение о связи этого явления с изменением фазового угла вращающегося магнитного поля статора относительно ротора. Предложены способы борьбы с этой погрешностью [1].

Количественные модели этого явления в литературе отсутствуют. В [1] при обсуждении результатов эксперимента выдвинута гипотеза о «вибрационной» природе возникновения уходов.

Показано, что этот уход может быть объяснен квадратичным взаимодействием двух видов угловых вибраций ротора, возникающих из-за несовершенства опорных узлов и электродвигателя. Вибрации по экваториальным осям ротора возникают из-за несовершенства опорных узлов. Частоты этих внутренних возмущений кратны собственной частоте вращений ротора, фаза фиксирована в осях кожуха. Вибрации вокруг полярной оси вызываются несовершенствами синхронного электродвигателя. Частота этого возмущения также кратна собственной частоте, а фаза определяется фазой вращающегося магнитного поля двигателя. Величина ухода определяется разностью фаз «экваториального» и «полярного» возмущений. Для гистерезисного гиродвигателя эта разность фаз произвольна в каждом его запуске и при наличии нарушений рабочего режима. В результате оказывается нестабильным дрейф гироскопа.

Такое явление следует ожидать для различных типов гироскопов, снабженных гистерезисным двигателем: гироскопов с традиционным кардановым подвесом, упругим и центральным подвесами.

Рассматривается астатический гироскоп в трехстепенном кардановом подвесе. Все элементы гироскопа, кроме подшипниковых узлов ротора, будем считать абсолютно жесткими.

Составим уравнения движения системы, следуя [2—4]. Предположим, что оси вращения наружной и внутренних рамок подвеса и ось геометрической симметрии ротора пересекаются в одной точке O. Обозначим через $O\xi_1\xi_2\xi_3$, $Ox_1x_2x_3$, $Oy_1y_2y_3$ правые ортогональные трехгранники, связанные, соответственно, с основанием, наружной и внутренней рамками. Трехгранники $x_1x_2x_3$, $y_1y_2y_3$ получаются из $\xi_1\xi_2\xi_3$ последовательными поворотами на углы Γ_1, Γ_2 вокруг осей x_1, y_2, совпадающих с осями наружной и внутренней рамок. Обозначим через $Oz_1z_2z_3$ трехгранник, связанный с ротором, полученный из $Oy_1y_2y_3$ поворотами на углы Δ_1, Δ_2 вокруг соответственно осей y_1 и z_2. Ось z_3 совпадает с осью симметрии ротора, Δ_1, Δ_2 определяются деформациями и погрешностями изготовления опор ротора. Положение ротора зададим углом поворота φ вокруг оси z_3.

Предположим, что трехгранники $x_1x_2x_3$, $y_1y_2y_3$, $z_1z_2z_3$ совпадают с главными центральными осями соответствующих конструктивных элементов, что деформируемые элементы безынерционны. Обозначим через $I_{x_1}, \ldots, I_{y_3}$

[1] См.: Пат. 3.274.837. Control Apparature / R. V. Fenton, W. H. Isely Заявл. 1.06.62, № 199502; опубл. 27.09.1966; Cl. 74—5.7.

Пат. 4.339.703 Two step phase reset gyromotor power supply / W. J. Rolff, S. Costa, W. A. Hendricks Заявл. 03.09.80, № 183686; опубл. 13.07.1982; Cl. 318/702.

моменты инерции рамок относительно осей связанных с ними трехгранников, через A и C — экваториальный и полярный моменты инерции ротора. Предположим, что основание неподвижно. Обозначим через $\Omega_{x_1},\ldots$ $\ldots,\Omega_{z_3}$ проекции абсолютной угловой скорости трехгранников на свои оси, через $G_{x_1},\ldots,\ G_{z_3}$ — проекции векторов кинетического момента рамок и ротора.

Уравнения движения системы запишем в виде пяти следующих уравнений моментов: для системы наружная рамка+внутренняя рамка относительно оси x_1 трехгранника $x_1x_2x_3$; для внутреннего кольца относительно оси y_2 трехгранника $y_1y_2y_3$, для ротора относительно осей трехгранника $z_1z_2z_3$:

$$\frac{d}{dt}(G_{x_1}+G_{y_1}\cos\Gamma_2+G_{y_3}\sin\Gamma_2)=M_{x_1}-N\Gamma_1^{\bullet}$$

$$\frac{d}{dt}G_{y_2}+\Omega_{y_3}G_{y_1}-\Omega_{y_1}G_{y_3}=M_{y_2}-N\Gamma_2^{\bullet}\tag{1}$$

$$\frac{d}{dt}G_{z_1}+\Omega_{z_2}G_{z_3}-\Omega_{z_3}G_{z_2}=M_{z_1},\qquad \frac{d}{dt}G_{z_2}+\Omega_{z_3}G_{z_1}-\Omega_{z_1}G_{z_3}=M_{z_2}$$

$$\frac{d}{dt}G_{z_3}=M_{z_3},\quad G_{x_1}=I_{x_1}\Omega_{x_1},\quad G_{y_1}=I_{y_1}\Omega_{y_1},\quad G_{y_2}=I_{y_2}\Omega_{y_2},\quad G_{y_3}=I_{y_3}\Omega_{y_3},\quad G_{z_1}=A\Omega_{z_1}$$

$$G_{z_2}=A\Omega_{z_2},\quad G_{z_3}=C(\Omega_{z_3}+\Omega),\quad \Omega=\varphi^{\bullet},\quad \Omega_{x_1}=\Gamma_1^{\bullet},\quad \Omega_{y_1}=\Gamma_1^{\bullet}\cos\Gamma_2,\quad \Omega_{y_2}=\Gamma_2^{\bullet},$$

$$\Omega_{y_3}=\Gamma_1^{\bullet}\sin\Gamma_2$$

$$\Omega_{z_1}=(\Gamma_1^{\bullet}\cos\Gamma_2+\Delta_1^{\bullet})\cos\Delta_2-(\Gamma_1^{\bullet}\sin\Gamma_2\cos\Delta_1-\Gamma_2^{\bullet}\sin\Delta_1)\sin\Delta_2$$

$$\Omega_{z_2}=\Gamma_2^{\bullet}\cos\Delta_1+\Gamma_1^{\bullet}\sin\Gamma_2\sin\Delta_1+\Delta_2^{\bullet}$$

$$\Omega_{z_3}=(\Gamma_1^{\bullet}\sin\Gamma_2\cos\Delta_1-\Gamma_2^{\bullet}\sin\Delta_1)\cos\Delta_2+(\Gamma_1^{\bullet}\cos\Gamma_2+\Delta_1^{\bullet})\sin\Delta_2$$

Здесь точкой обозначено дифференцирование по времени t; через N обозначен принятый для упрощения одинаковым коэффициент вязкого трения в осях подвеса, M_{x_1}, M_{y_2}, M_{z_1}, M_{z_2}, M_{z_3} — моменты внутренних сил взаимодействия элементов системы. Эти моменты определяются силами упругости в опорах ротора и электромагнитными силами взаимодействия между ротором и статором электродвигателя.

Если не учитывать несовершенства изготовления подшипников и гиродвигателя, то система (1) имеет решение

$$\Gamma_1=\Gamma_2=\Delta_1=\Delta_2=0,\qquad \Omega=\varphi^{\bullet}=\omega_0,\qquad G_{z_3}=C\omega_0=H\tag{2}$$

где ω_0 — синхронная частота вращения ротора электродвигателя.

Будем рассматривать случай малых несовершенств, малых начальных отклонений системы от (2) и оценивать движение на малом интервале времени. Тогда в (1) будут малыми M_{x_1}, M_{y_2}, M_{z_1}, M_{z_2}, M_{z_3}, Γ_1, Γ_2, Δ_1, Δ_2, $\Delta\Omega=\Omega-\omega_0$, соответствующие угловые скорости и кинетические моменты.

Сделаем в (1) замену $\Omega=\omega_0+\Delta\Omega$. Введем в полученную систему уравнений малый параметр ε, проделав нормализацию переменных

$$\Gamma_1=\varepsilon\gamma_1,\quad \Gamma_2=\varepsilon\gamma_2,\quad \Delta_1=\varepsilon\delta_1,\quad \Delta_2=\varepsilon\delta_2,\quad \Delta\Omega=\varepsilon\Delta\omega,\quad \Omega_{x_1}=\varepsilon\omega_{x_1},\ldots,\quad \Omega_{z_3}=\varepsilon\omega_{z_3}$$

$$G_{x_1}=\varepsilon I_{x_1}\omega_{x_1},\ldots,\quad G_{z_3}=H+\varepsilon C(\omega_{z_3}+\Delta\omega),\quad M_{x_1}=\varepsilon m_{x_1},\ldots,\quad M_{z_3}=\varepsilon m_{z_3}\tag{3}$$

Если в (1) сделать замену (3), то полученная система будет регулярно зависеть от ε. Ее решение будем отыскивать в виде разложения по степеням малого параметра

$$\gamma_1=\gamma_1^{(0)}+\varepsilon\gamma_1^{(1)}+\ldots,\ \ldots,\ m_{z_3}=m_{z_3}^{(0)}+\varepsilon m_{z_3}^{(1)}+\ldots\tag{4}$$

Конечное число членов разложения (4) на ограниченном интервале времени дает [3, 5] асимптотическое приближение для решения системы (1).

Подставим (3), (4) в (1), сократим общий множитель ε и приравняем слагаемые при нулевой степени ε. Получим

$$(I_{x_1}+I_{y_1})\frac{d}{dt}\gamma_1^{(0)\bullet}=-m_{z_1}^{(0)}-N\gamma_1^{(0)\bullet}, \qquad I_{y_2}\frac{d}{dt}\gamma_2^{(0)\bullet}=-m_{z_2}^{(0)}-N\gamma_2^{(0)\bullet}$$

$$A\frac{d}{dt}\omega_{z_1}^{(0)}+H\omega_{z_2}^{(0)}=m_{z_1}^{(0)}, \qquad A\frac{d}{dt}\omega_{z_2}^{(0)}-H\omega_{z_1}^{(0)}=m_{z_2}^{(0)}$$

$$C\frac{d}{dt}(\omega_{z_3}^{(0)}+\Delta\omega^{(0)})=m_{z_3}^{(0)}, \qquad \omega_{z_1}^{(0)}=\gamma_1^{(0)\bullet}+\delta_1^{(0)\bullet} \tag{5}$$

$$\omega_{z_2}^{(0)}=\gamma_2^{(0)\bullet}+\delta_2^{(0)}, \qquad \omega_{z_3}^{(0)}=0, \qquad \omega_{y_3}^{(0)}=0, \qquad d\varphi^{(0)}/dt=\omega_0$$

Возмущающие экваториальные моменты за счет геометрических дефектов опор имеют спектр частот, кратных частоте вращения ротора. Амплитуды возмущений относительно осей x_1, y_2 в общем случае различны [6].

Для упрощения решения задачи будем считать их одинаковыми. Считая характеристики опор линейными и пренебрегая внутренним трением, примем

$$m_{z_1}^{(0)}=-k\left[\delta_1^{(0)}+\delta_0\sum_{\nu=1}^{n}\lambda_\nu\cos(\nu\varphi^{(0)}+\psi_\nu)\right]$$

$$m_{z_2}^{(0)}=-k\left[\delta_2^{(0)}+\delta_0\sum_{\nu=1}^{n}\lambda_\nu\sin(\nu\varphi^{(0)}+\psi_\nu)\right] \tag{6}$$

где k — коэффициент жесткости, принятый одинаковым по осям x_1 и y_2, λ_ν — отношение амплитуды ν-й гармоники геометрического дефекта к амплитуде δ_0 первой гармоники, ψ_ν — фаза ν-й гармоники; для удобства выбираем $\psi_1=0$.

При малых гармонических возмущениях момента электродвигателя и соответственно малых колебаниях ротора около синхронной скорости можно не учитывать упругий электромагнитный момент и момент индукционного и гистерезисного демпфирования.

Согласно [7], возмущающий момент электродвигателя содержит ряд гармонических составляющих. Примем

$$m_{z_3}^{(0)}=m_0\sum_{\nu=1}^{n}\eta_\nu\cos\nu(\varphi^{(0)}+\theta) \tag{7}$$

Приравнивая в (1), (3), (4) слагаемые при первой степени ε, получим

$$\frac{d}{dt}[(I_{x_1}+I_{y_1})\omega_{x_1}^{(1)}+I_{y_3}\omega_{y_3}^{(0)}\gamma_2^{(0)}]=-m_{z_1}^{(1)}-N\gamma_1^{(1)\bullet}+(\gamma_2^{(0)}+\delta_2^{(0)})m_{z_3}^{(0)}$$

$$\frac{d}{dt}[I_{y_2}\omega_{y_2}^{(1)}]+(I_{y_1}-I_{y_3})\omega_{y_1}^{(0)}\omega_{y_3}^{(0)}=-m_{z_2}^{(1)}-N\gamma_2^{(1)\bullet}+\delta_1^{(0)}m_{z_3}^{(0)}$$

$$\frac{d}{dt}[A\omega_{z_1}^{(1)}]+H\omega_{z_2}^{(1)}+C\omega_{z_2}^{(0)}(\omega_{z_3}^{(0)}+\Delta\omega^{(0)})-A\omega_{z_3}^{(0)}\omega_{z_2}^{(0)}=m_{z_1}^{(1)} \tag{8}$$

$$\frac{d}{dt}[A\omega_{z_2}^{(1)}]-H\omega_{z_1}^{(1)}-C\omega_{z_1}^{(0)}(\omega_{z_3}^{(0)}+\Delta\omega^{(0)})+A\omega_{z_3}^{(0)}\omega_{z_1}^{(0)}=m_{z_2}^{(1)}$$

$$\omega_{z_1}^{(1)}=\gamma_1^{(1)\cdot}+\delta_1^{(1)\cdot},\qquad \omega_{z_2}^{(1)}=\gamma_2^{(1)\cdot}+\delta_2^{(1)\cdot}$$

Система уравнений (8) — линейная по $\omega_{x_1}^{(1)}$, $\gamma_1^{(1)\cdot}$, ... Квадратичные по нулевым приближениям слагаемые $\omega_{y_3}^{(0)}\gamma_2^{(0)}$, ... можно считать известными по (5)—(7) функциями времени. Выделим постоянные составляющие этих слагаемых $\langle\omega_{y_3}^{(0)}\gamma_2^{(0)}\rangle$,... Эти постоянные составляющие определяют частное решение системы (8) вида $\gamma_1^{(1)\cdot}$, $\gamma_2^{(1)\cdot}$, $\delta_1^{(1)}$, $\delta_2^{(1)}$, $m_{z_1}^{(1)}$, $m_{z_2}^{(1)}=$ $=\mathrm{const}$.

Из (8) с учетом (6) получим составляющие скоростей ухода

$$\gamma_1^{(1)\cdot}=-\frac{C}{H}\left\langle\frac{d}{dt}[\delta_1^{(0)}\,\Delta\omega^{(0)}]+\gamma_1^{(0)\cdot}\,\Delta\omega^{(0)}\right\rangle=-\frac{C}{H}\langle\gamma_1^{(0)\cdot}\,\Delta\omega^{(0)}\rangle$$
$$\gamma_2^{(1)\cdot}=-\frac{C}{H}\left\langle\frac{d}{dt}[(\gamma_2^{(0)}+\delta_2^{(0)})\Delta\omega^{(0)}]\right\rangle=0 \tag{9}$$

Вычислим явные выражения (9) через параметры гироскопа и возмущения. Для этого по (5)—(7) найдем $\omega_{z_1}^{(0)}$, $\omega_{z_2}^{(0)}$, $\Delta\omega^{(0)}$. Система принимает удобный для вычислений симметричный вид, если принять $I_{x_1}+I_{y_1}=$ $=I_{y_2}=A_1$. Это допущение выполняется для гироскопов с миниатюрным выполнением наружной рамки подвеса и несущественно для конечного результата.

Будем далее учитывать в (6), (7) только первые гармоники возмущения. Тогда из (5):

$$A_1\gamma_1^{(0)\cdot\cdot}+N\gamma_1^{(0)\cdot}-k\delta_1^{(0)}=k\delta_0\cos\varphi^{(0)}$$
$$A_1\gamma_2^{(0)\cdot\cdot}+N\gamma_2^{(0)\cdot}-k\delta_2^{(0)}=k\delta_0\sin\varphi^{(0)}$$
$$A(\gamma_1^{(0)\cdot\cdot}+\delta_1^{(0)\cdot\cdot})+H(\gamma_2^{(0)\cdot}+\delta_2^{(0)\cdot})=-k\delta_1^{(0)}-k\delta_0\cos\varphi^{(0)} \tag{10}$$
$$A(\gamma_2^{(0)\cdot\cdot}+\delta_2^{(0)\cdot\cdot})-H(\gamma_1^{(0)\cdot}+\delta_1^{(0)\cdot})=-k\delta_2^{(0)}-k\delta_0\sin\varphi^{(0)},\qquad \varphi^{(0)}=\omega_0 t$$

Умножим второе уравнение из (10) на мнимую единицу i и сложим с первым, умножим на i четвертое уравнение и сложим с третьим. Введем комплексные переменные

$$\gamma_1^{(0)\cdot}+i\gamma_2^{(0)\cdot}=\omega,\qquad \delta_1^{(0)}+i\delta_2^{(0)}=\delta$$
$$k\delta_0(\cos\varphi^{(0)}+i\sin\varphi^{(0)})=m \tag{11}$$

Тогда (10) перейдет в

$$A_1\omega^{\cdot}+N\omega-k\delta=m,\qquad A_1(\omega^{\cdot}+\delta^{\cdot\cdot})-iH(\omega+\delta^{\cdot})+k\delta=-m \tag{12}$$

Считая m заданной гармонической функцией времени частоты ω_0, вычислим из (11):

$$\omega=\frac{(Ap-iH)p}{(A_1p+N)(Ap^2-iHp+k)+(Ap-iH)k}m,\qquad p=i\omega_0. \tag{13}$$

Ограничимся далее рассмотрением гироскопов, для которых выполняются условия $A\sim A_1\sim C$, $N\ll H$, а парциальная частота упругих колебаний $\sqrt{k/A}$ существенно превышает нутационную частоту $H/A=C\omega_0/A\sim\omega_0$.

В этом случае (13) можно заменить приближенным выражением

$$\omega = (Ap - iH)pm/\{k[(A+A_1)p - iH]\} \tag{14}$$

Полагая $p = i\omega_0$, $H = C\omega_0$, получим с учетом (11)

$$\gamma_1^{(0)\cdot} = \frac{(C-A)\omega_0}{A+A_1-C}\delta_0 \sin\omega_0 t \tag{15}$$

Подставив (7) в пятое уравнение (5) и учитывая условие $\omega_{z_3}^{(0)} = 0$, получим теперь для $\Delta\omega^{(0)}$ уравнение $C\Delta\omega^{(0)\cdot} = m_0\cos(\omega_0 t + \theta)$

Отсюда вынужденная составляющая решения

$$\Delta\omega^{(0)} = (m_0/C\omega_0)\sin(\omega_0 t + \theta) \tag{16}$$

Подставив (15), (16) в (9), получим окончательно

$$\gamma_1^{(1)\cdot} = -\omega_* \cos\theta, \quad \omega_* = \frac{C-A}{2(A+A_1-C)}\frac{m_0}{H}\delta_0 \tag{17}$$

Из (17) видно, что среднее по θ значение ухода может обратиться в ноль, что совпадает с рекомендациями, предложенными в [1], а также Р. Фентоном и др. [2].

Оценим числовое значение величины ω_* из (17). Примем $A_1 + A = 0{,}7$ гсм·с^2, $C = 0{,}4$ гсм·с^2, $A_1 = 0{,}4$ гсм·с^2, $m_0 = 1$ гсм, $H = 10^3$ гсм·с, $\delta_0 = 10^{-5}$. Тогда $\omega_* \sim 10^{-3}$ угл.мин/мин.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Делекторский Б. А., Правоторов Е. А., Соболева Е. Б., Тарасов В. Н., Яшукова В. В.* Исследование нестабильности дрейфа гироприбора от изменения фазы вращения ротора.– Тр. Моск. энерг. ин-та, 1978, вып. 361, с. 34–41.
2. *Ишлинский А. Ю.* Механика гироскопических систем. М.: Изд-во АН СССР, 1963. 482 с.
3. *Климов Д. М., Харламов С. А.* Динамика гироскопа в кардановом подвесе. М.: Наука, 1978. 208 с.
4. *Новожилов И. В.* О «магнусовых уходах» гироскопа в кардановом подвесе конечной жесткости.– Инж. ж. МТТ, 1968, № 3, с. 33–36.
5. *Новожилов И. В.* Конспект лекций по курсу «Приближенные методы исследования динамических систем». М.: Моск. энерг. ин-т, 1980. 45 с.
6. *Ковалев М. П.* Опоры и подвесы гироскопических устройств. М.: Машиностроение, 1970. 286 с.
7. *Геллер Б., Гамата В.* Дополнительные поля, моменты и потери мощности в асинхронных машинах. М.: Энергия, 1964. 263 с.

Москва

Поступила в редакцию 16.XI.1982

---

[2]. См. указ. публ., с. 3.