МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 2 · 1984

УДК 531.383

К ИССЛЕДОВАНИЮ ДИНАМИКИ ГИРОКОМПАСА НА ТОРСИОННОМ ПОДВЕСЕ

БАШИРОВ Р. Х.

Задача определения собственных частот гирокомпаса с упругими опорами ротора неизбежно возникает при учете высокочастотных внутренних возмущений, порождаемых несовершенством форм поверхностей качения подшипников. В [1] исследован спектр собственных частот гирокомпаса с абсолютно жесткими опорами. В публикуемой работе используется та же, что и в [1], модель, описывающая взаимодействие чувствительного элемента с вращающейся Землей. Отличие состоит в том, что в рассматриваемой модели ротор имеет свободу угловых и линейных перемещений в кожухе. Для силовой функции упругого подшипника [2], принятой в усеченной форме, как в [3, 4], получены линеаризованные уравнения движения. Определение собственных частот при некоторых ограничениях сводится к исследованию корней уравнений не выше четвертой степени. Получены приближенные формулы для всех собственных частот.

1. Уравнения движения. Введем несколько трехгранников, движение которых будет определять движение гирокомпаса (фиг. 1). Пусть $O\xi_1\xi_2\xi_3$ — географическая система координат с началом в точке O крепления торсиона к следящей раме (фиг. 1, 2). Ось $O\xi_1$ трехгранника направлена на восток, $O\xi_2$ — на север по касательной к меридиану, $O\xi_3$ — по нормали к поверхности Земли.

Пусть точка O_1 совпадает с центром масс чувствительного элемента без ротора, а O_2 — с положением центра масс ротора, когда его опоры недеформированы. Свяжем с кожухом поступательно двигающуюся систему координат $O_1\xi_1^\circ\xi_2^\circ\xi_3^\circ$, оси которой параллельны осям $O\xi_1$, $O\xi_2$, $O\xi_3$. Обозначим через $O_1x_1^\circ x_2^\circ x_3^\circ$ главные центральные оси инерции кожуха со штангой. В неподвижной относительно кожуха системе отсчета $O_2x_1x_2x_3$, связанной с главными осями инерции кожуха со штангой, будем рассматривать поступательно двигающийся относительно кожуха трехгранник $Py_1^\circ y_2^\circ y_3^\circ$, оси которого параллельны осям O_2x_1, O_2x_2, O_2x_3 соответственно. Положение центра масс ротора P в кожухе зададим тремя координатами: x_1, x_2, x_3. Далее обозначим трехгранник главных центральных осей инерции ротора через $Py_1y_2y_3$.

Положение системы определяется вектором обобщенных координат

$$\sigma=\{x_1,\ x_2,\ x_3,\ \gamma_1,\ \gamma_2,\ \gamma_3,\ \alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \lambda,\ \mu\}^T \tag{1.1}$$

где λ, μ задают направление торсиона в $O\xi_1\xi_2\xi_3$ (фиг. 1), λ — угол поворота вокруг оси $O\xi_1$, μ — угол между торсионом и плоскостью $\xi_2\xi_3$. Величины α, β, γ совместно с λ, μ полностью определяет положение кожуха в географической системе координат $O\xi_1\xi_2\xi_3$. Буквой α обозначен угол поворота вокруг оси $O_1\xi_3^\circ$, β — угол между горизонтальной плоскостью $\xi_1^\circ\xi_2^\circ$ и осью x_2°, γ — поворот вокруг оси x_2° (фиг. 3). Величины γ_1, γ_2, γ_3 характеризуют положение ротора в кожухе, последовательность поворотов та же, что и для углов α, β, γ (фиг. 4).

Матрица перехода S от системы координат $O_1\xi_1^\circ\xi_2^\circ\xi_3^\circ$ к $O_1x_1^\circ x_2^\circ x_3^\circ$ имеет следующие элементы:

$$S_{11}=\cos\alpha\cos\gamma-\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma,\ S_{12}=-\sin\alpha\cos\beta$$

$$S_{13}=\cos\alpha\sin\gamma+\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma,\quad S_{21}=\sin\alpha\cos\gamma+\sin\beta\cos\alpha\sin\gamma$$
$$S_{22}=\cos\alpha\cos\beta,\quad S_{23}=\sin\alpha\sin\gamma-\sin\beta\cos\alpha\cos\gamma \tag{1.2}$$
$$S_{31}=-\sin\gamma\cos\beta,\quad S_{32}=\sin\beta,\quad S_{33}=\cos\beta\cos\gamma$$

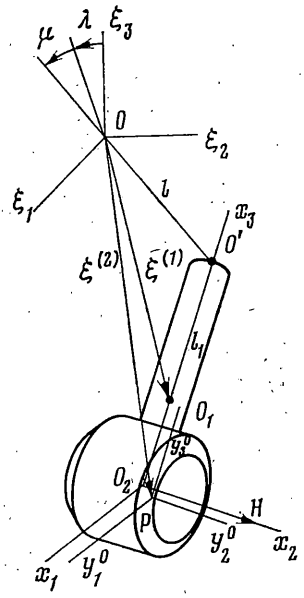
Абсолютная угловая скорость $\mathbf{u}$ трехгранника $\xi_1\xi_2\xi_3$ в собственных осях

$$\mathbf{u}=\{u_1,\ u_2,\ u_3\}^T=\{0,\ u\cos\varphi,\ u\sin\varphi\}^T \tag{1.3}$$

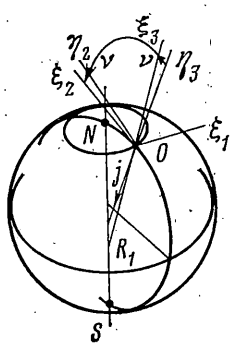
Абсолютная линейная скорость $\mathbf{V}^\circ$ начала системы координат

$$\mathbf{V}^\circ=\{V_1^\circ,\ V_2^\circ,\ V_3^\circ\}^T=\{uR_1\cos\varphi,\ 0,\ 0\}^T \tag{1.4}$$

где u — угловая скорость суточного вращения Земли, φ — географическая



Фиг. 1



Фиг. 2

широта места расположения прибора на земной поверхности, R_1 — главный радиус кривизны поверхности в месте расположения прибора.

Обозначим через $\{p_1,\ p_2,\ p_3\}^T$ вектор абсолютной угловой скорости кожуха в проекциях на оси $O_1x_1^\circ x_2^\circ x_3^\circ$. Имеем

$$p_1=\beta^\cdot\cos\gamma+(\alpha^\cdot+u_3)S_{31}+u_2S_{21}$$
$$p_2=\gamma^\cdot+(\alpha^\cdot+u_3)S_{32}+u_2S_{22} \tag{1.5}$$
$$p_3=\beta^\cdot\sin\gamma+(\alpha^\cdot+u_3)S_{33}+u_2S_{23}$$

Проекции абсолютной угловой скорости ротора на оси, совпадающие с его главными центральными осями инерции, но не участвующие в собственном вращении (γ_3), имеют вид

$$r_1=p_1\cos\gamma_1+p_2\sin\gamma_1+\gamma_2^\cdot$$
$$r_2=-p_1\sin\gamma_1\cos\gamma_2+p_2\cos\gamma_2\cos\gamma_1+(p_3+\gamma_1^\cdot)\sin\gamma_2+\gamma_3^\cdot \tag{1.6}$$
$$r_3=p_1\sin\gamma_1\sin\gamma_2-p_2\cos\gamma_1\sin\gamma_2+(p_3+\gamma_1^\cdot)\cos\gamma_2$$

Обратимся к вычислению скоростей движения центров масс кожуха и ротора. Пусть длина торсиона l, расстояние от точки O' — крепления тор-

сиона к чувствительному элементу — до центра масс кожуха O_1 есть l_1, а до точки O_2 — l_2, тогда компоненты векторов $\xi^{(1)}$, $\xi^{(2)}$, проведенных из начала систем координат $O\xi_1\xi_2\xi_3$ к центрам масс кожуха и ротора соответственно, в системе $O\xi_1\xi_2\xi_3$ следующие:

$$\xi_i^{(1)}=\xi_i-l_1S_{i3},\quad \xi_i^{(2)}=\xi_i+S_{ih}x_h-l_2S_{i3}\quad (i=1,2,3) \tag{1.7}$$

Здесь ξ_i — компоненты вектора $\xi=\{-l\sin\mu,\ l\sin\lambda\cos\mu,\ -l\cos\lambda\cdot\cos\mu\}^T$, определяющего положение конца торсиона.

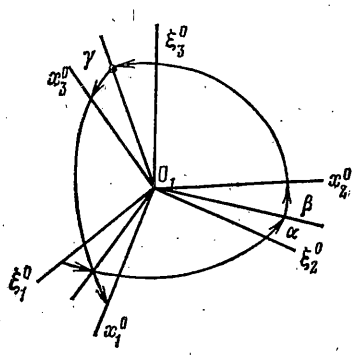
Обозначим абсолютные скорости центров масс ротора и кожуха через $\mathbf{V}^{(2)}$, $\mathbf{V}^{(1)}$ соответственно. Тогда

$$\mathbf{V}^{(h)}=\mathbf{V}^{\circ}+\mathbf{u}\times\xi^{(h)}+\xi^{\cdot(h)}\quad (h=1,\ 2) \tag{1.8}$$

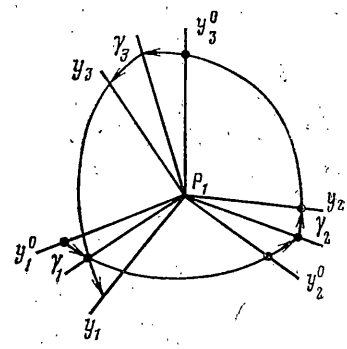
Выражение для кинетической энергии представляет сумму кинетических энергий кожуха и ротора

$$T={}^1/_2(MV^{(1)2}+mV^{(2)2}+Ar_1^2+Cr_2^2+Ar_3^2+I_1p_1^2+I_2p_2^2+I_3p_3^2) \tag{1.9}$$

где A, C — экваториальный и полярный центральные моменты инерции ро-



Фиг. 3



Фиг. 4

тора, I_1, I_2, I_3 — моменты инерции кожуха (со штангой) вокруг осей Ox_1°, Ox_2°, Ox_3° соответственно, m, M — массы ротора и кожуха.

Потенциальная энергия сил земного тяготения и силовая функция гироскопа с неидеальными подшипниками определяют силы потенциальной природы, действующие на систему. Рассмотрим силы земного тяготения.

Потенциальная энергия в поле тяготения Земли $\Pi=mj\eta_3^{(2)}+Mj\eta_3^{(1)}$, где $\eta_3^{(1)}$, $\eta_3^{(2)}$ — координаты центров масс кожуха и ротора в системе $\eta_1\eta_2\eta_3$, ось η_3 которой направлена по линии действия ускорения земного тяготения j, а η_1 совпадает с ξ_1. Как известно [5], вектор j отклонен от нормали к поверхности сфероида на угол $\nu={}^1/_5e^2\sin 2\varphi$, где e — его эксцентриситет. Следовательно, $\eta_3^{(h)}=\xi_3^{(h)}\cos\nu-\xi_2^{(h)}\sin\nu$, где $h=1,\ 2$, а $\xi_2^{(h)}$, $\xi_3^{(h)}$ определяются выражениями (1.7).

Как показано в [4], гироскоп на неидеальных подшипниковых опорах имеет силовую функцию

$$U(x_1,\ x_2,\ x_3,\ \gamma_1,\ \gamma_2,\ \gamma_3)=x_1f_1(\gamma_3)+x_2f_2(\gamma_3)+x_3f_3(\gamma_3)+h\gamma_1f_1(\gamma_3)-$$
$$-h\gamma_2f_3(\gamma_3)-{}^1/_2(K_px_1^2+K_0x_2^2+K_px_3^2+K_y\gamma_1^2+K_y\gamma_2^2) \tag{1.10}$$

где K_p, K_0, K_y — соответственно радиальная, осевая и угловая жесткости опор ротора, h — величина, характеризующая линейный размер подшип-

ника, $f_s(\gamma_3)$, $h=1, 2, 3$ — почти-периодические функции угла γ_3 с равным нулю средним значением, функции f_s характеризуют внутренние возмущения, порождаемые несовершенством форм поверхностей качения

$$f_s(\gamma_3)=\sum_{i=1}^{\infty} a_{is}\sin(k_{is}\gamma_3+\varphi_{is}) \quad (s=1,2,3) \tag{1.11}$$

$\{k_{is}\}$ — спектр функции, a_{is} — коэффициенты Фурье.

В [4] получена связь коэффициентов a_{is} спектра с погрешностями поверхностей беговых дорожек подшипников. Коэффициенты упругости подшипников связаны между собой:

$$K_p/K_p'=K_y/K_y'h^2=K_0/K_0'=K \tag{1.12}$$

где безразмерные коэффициенты K_p', K_0', K_y' выражаются через геометрические характеристики подшипников.

На основании изложенного можно выписать уравнения движения в форме уравнений Лагранжа второго рода

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \sigma_i^{\cdot}}-\frac{\partial T}{\partial \sigma_i}=\frac{\partial(U-\Pi)}{\partial \sigma_i} \quad (i=1,2,\ldots,11) \tag{1.13}$$

которые здесь не приводятся ввиду их громоздкости.

2. Уравнения вибрации. Предположим, что отклонения поверхностей качения от геометрически правильных малы, тогда будут малыми и амплитуды возмущений в системе, обусловленных этими погрешностями. Введем малый параметр по формуле

$$\varepsilon=\frac{1}{hK_0}\max_{s,\gamma_3}\left\{|f_s(\gamma_3)|+\left|\frac{\partial f_s}{\partial \gamma_3}\right|\right\} \tag{2.1}$$

Обозначим часть обобщенных координат через $q=\{x_1, x_3, \gamma, \mu, x_2, \gamma_1, \gamma_2, \alpha, \beta, \lambda\}^T$. Система уравнений (1.13) имеет при $\varepsilon=0$ устойчивое положение равновесия $q^\circ=\{0, x_3^\circ, 0, 0, x_2^\circ, 0, \gamma_2^\circ, 0, \beta^\circ, \lambda^\circ\}^T$. Ненулевые компоненты q_i° определяются из системы пяти трансцендентных тригонометрических уравнений. Если учесть, что наземные гирокомпасы имеют большие значения H и большие смещения центра масс $l_c=(ml_2+Ml_1)m_c^{-1}$ чувствительного элемента относительно точки подвеса ($m_cl_cg=(m+M)l_cg\gg Hu$, $H/A=\Omega\gg g/l$, u), то получим приближенные выражения для стационарного решения

$$\beta^\circ=Hu_3/(m_cl_cg+Hu_2),\ \gamma_2^\circ=Hu_3/K_y$$
$$x_2^\circ=-mg\beta^\circ/K_0,\ x_3^\circ=-mg/K_p,\ \lambda^\circ=(l+l_c)u_2u_3/g \tag{2.2}$$

Величины углов β°, γ_2°, λ° очень малы (10^{-4} рад и меньше). В частности, при $u_3=0$ имеем $\gamma_2^\circ=\beta^\circ$, $\lambda^\circ=0$, что соответствует положению равновесия установленного на экваторе прибора. Для малых отклонений $\mathbf{q}'$ от $\mathbf{q}^\circ$ в линейном приближении можно заменить $\sin(q_i^\circ+q_i')$ на $q_i^\circ+q_i'$ и на единицу — $\cos(q_i^\circ+q_i')$. Поэтому линеаризация уравнений, произведенная в окрестности $\mathbf{q}=0$ с последующим переходом к малым отклонениям $\mathbf{q}'$, приводит к тем же уравнениям, что и линеаризация относительно положения равновесия $\mathbf{q}^\circ$. При этом произведения $q_i^\circ q_j'$ считаются малыми второго порядка.

Линеаризуем уравнения (1.13) относительно переменных q_i. Результат линеаризации уравнения по переменной γ_3 приводит к циклическому интегралу

$$C[\gamma_3^{\cdot}+\gamma^{\cdot}+u_2+u_3(\beta+\gamma_2)]=H \tag{2.3}$$

так как $\partial(U-\Pi)/\partial\gamma_3=0$ с точностью до малых второго порядка. Подстановка (2.3) в остальные уравнения дает уравнения вынужденных колеба-

ний гирокомпаса

$$J_{ij}q_j'=\{f_1(\omega_c t)/m,\ f_3(\omega_c t)/m$$
$$0,\ 0,\ f_2(\omega_c t)/m,\ hf_1(\omega_c t)/A,\ -hf_3(\omega_c t)/A,\ 0,\ 0,\ 0\}^T \tag{2.4}$$

где $\omega_c=H/C$, а операторная матрица (10×10) системы имеет вид

$$J=\left\|\begin{array}{c|c} J' & 0 \\ \hline 0 & J'' \end{array}\right\|$$

$$J'=\left\|\begin{array}{cccc} p^2+\omega_p^2 & 2u_2p & -J_{59} & -lp^2 \\ -2u_2p & p^2+\omega_p^2 & 2l_2u_2p & 2lu_2p \\ -mJ_{59} & -mu_2l_2p & I_2'p^2+G & J_{34} \\ -mlp^2 & -mu_2lp & J_{34} & J_{44} \end{array}\right\|,$$

$$J''=\left\|\begin{array}{cccccc} p^2+\omega_0^2 & 0 & 0 & 0 & J_{59} & lp^2 \\ 0 & J_{66} & \Omega p & p^2+\Omega u_2 & \Omega p & 0 \\ 0 & -\Omega p & J_{66} & -\Omega p & p^2+\Omega u_2 & 0 \\ 0 & p^2+\Omega u_2 & \Omega p & ap^2+\Omega u_2 & \Omega p & 0 \\ mJ_{59}/A & -\Omega p & p^2+\Omega u_2 & -\Omega p & J_{99} & J_{34} \\ mlp^2 & 0 & 0 & 0 & J_{34} & J_{44} \end{array}\right\|$$

$$J_{59}=l_2p^2+g,\ J_{34}=m_cl_clp^2,\ J_{44}=m_c(l^2p^2+lg)$$
$$J_{66}=p^2+\omega_y^2+\Omega u_2,\ J_{99}=b_0p^2+\Omega u_2+G/A$$

Здесь введены обозначения

$$a=(A+I_3)/A;\ b_0=(ml_2^2+Ml_1^2+A+I_1)/A$$
$$I_2'=I_2+ml_2^2+Ml_1^2,\ G=m_cl_cg,\ \omega_y^2=K_y/A$$
$$\omega_p^2=K_p/m,\ \omega_0^2=K_0/m,\ p=d/dt$$

— оператор дифференцирования по времени.

При выводе уравнений вибрации были использованы соотношения

$$j\cos\nu-u_2^2R_1=g,\ j\sin\nu-u_2u_3R_1=0$$

вытекающие из предположения, что ускорение свободного падения направлено по нормали к поверхности Земли. Учтено также, что величины Au, I_1u, I_2u, I_3u намного меньше кинетического момента ротора H. Поскольку произведения $q_i^\circ q_j'$ считаются малыми второго порядка, то следует опустить в линеаризованных уравнениях и слагаемые с множителем u_3. Действительно, из (2.2) видно, что γ_2°, β°, λ° пропорциональны u_3, значит, члены типа Hu_3q_i', $lu_2u_3q_i'$ можно представить, как $m_cl_cg\beta^\circ q_i'$, $g\lambda^\circ q_i'$ и, следовательно, ими можно пренебречь. О возможности пренебрежения такого рода в уравнениях гирокомпаса с абсолютно жесткими опорами ротора указывается в [1].

3. Собственные частоты. Рассмотрим характеристическое уравнение $\det J(p)=0$, здесь p — собственное число. Левая часть уравнения — полином десятой степени по p^2. Переход от собственных чисел p к частотам ω осуществляется заменой $p=i\omega$.

Введем малый параметр $\varepsilon_1=u\sqrt{L^*/g}$, где L^* — характерный размер системы, например l. Обозначим через $f(\omega^2,\ \varepsilon_1)$ выражение для $\det J(i\omega)$. Тогда, раскрыв определитель, получим

$$f(\omega^2,\ 0)=\omega^2(\omega^2-\omega_p^2)\Delta_1(\omega^2)\Delta_2(\omega^2)=0$$
$$\Delta_1(x)=x^3I_2Mm_c^{-1}-x^2\{\omega_p^2[I_2+m_*(l_1-l_2)^2]+ \tag{3.1}$$
$$+(g/l)[m_*(l_1-l_2)l+Ml_1^2+Ml_1l+I_2]\}+$$
$$+x(g/l)[\omega_p^2(m_cl_cl+I_2')+g(Ml_1-ml-$$

$$-ml_2)\,]-(g/l)^2[\,\omega_p^2 m_c l_c l-gml^2\,]$$

где $m_*=mM/(m+M)$ — приведенная масса

$$\Delta_2=\begin{vmatrix} p^2+\omega_0^2 & 0 & 0 & 0 & l\cdot p^2+g & p^2 \\ 0 & p^2+\omega_y^2 & \Omega p & p & \Omega p & 0 \\ 0 & -\Omega p & p^2+\omega_y^2 & -\Omega & p^2 & 0 \\ 0 & p & \Omega & a & \Omega & 0 \\ m(l_2p^2+g)/A & -\Omega p & p^2 & -\Omega & b_0p^2+G/A & m_c l_c p^2/A \\ mp^2/m_c & 0 & 0 & 0 & l_c p^2 & p^2+g/l \end{vmatrix}$$

Уравнение $\det J(i\omega)=0$ отличается от (3.1) малым возмущением. Корни упрощенного уравнения являются начальными членами разложения собственных частот системы по ε_1.

Степенной ряд для одного корня начинается с линейного по ε_1, так как упрощенное уравнение имеет нулевой корень. Эту частоту получим раскрыв определитель в уравнении $|\Gamma i\omega+B|=0$, где Γ, B — матрицы гироскопических и потенциальных сил соответственно. С точностью до малых второго порядка определим прецессионную частоту

$$\omega_1^2=u_2^2+\frac{K_y u_2 G}{(K_y+G)H}\left[1+\frac{K_p m^2 g^2}{K_0(K_p G-m^2 g^2)}\right] \tag{3.2}$$

с которой происходят колебания чувствительного элемента вокруг устойчивого равновесия. Формула (3.2) при $K\to\infty$ дает известное выражение для прецессионной частоты.

Рассмотрим уравнение $\Delta_1(x)=0$. При решении уравнения малость отношения $g/l\omega_p^2$ учитывается введением малого параметра $\varepsilon_2=g/l\omega_p^2$. Пусть $y=x/\omega_p^2$, тогда имеем

$$\begin{gathered} y^3 I_2 M/m_c-y^2[I_2+m_*(l_1-l_2)^2+\varepsilon_2(m_*(l_1-l_2)l+Ml_1^2+Ml_1l+I_2)\,]+ \\ +y\varepsilon_2[m_c l_c l+I_2'+\varepsilon_2(Ml_1-ml-ml_2)\,]-\varepsilon_2^2(m_c l_c l-\varepsilon_2 ml^2)=0 \end{gathered} \tag{3.3}$$

Будем искать решение в форме степенных рядов $y=y_0+\sum\limits_{k=1}^{\infty}\varepsilon_2^k y_k$. Результат подстановки ряда в (3.3) и последующее определение коэффициентов дает формулы для приближенного вычисления трех частот

$$\begin{gathered} \omega_2^2=K_p m_*^{-1}(1+m_* I_2^{-1}(l_1-l_2)^2)+(g/l)\,\{[m_*(l_1-l_2)l+ \\ +Ml_1^2+Ml_1l+I_2]m_c I^{-1}M^{-1}-m_c l_c l[I_2+m_*(l_1-l_2)^2]^{-1}\} \end{gathered} \tag{3.4}$$

$$\omega_3^2=g\theta_1/l-(g/l\omega_p)^2 Q(\theta_1)\,[\,(I_2'-m_c l_c l)^2+4m_c^2 l_c^3 l\,]^{-1/2} \tag{3.5}$$

$$\omega_4^2=g\theta_2/l+(g/l\omega_p)^2 Q(\theta_2)\,[\,(I_2'-m_c l_c l)^2+4m_c^2 l_c^3 l\,]^{-1/2} \tag{3.6}$$

где θ_1, θ_2 являются корнями уравнения $(\theta_2>\theta_1)$:

$$[I_2+m_*(l_1-l_2)^2]\theta^2-(I_2'+m_c l_c l)\theta+m_c l_c l=0$$

Функция $Q(\theta)$ в формулах (3.5) и (3.6) имеет вид

$$\begin{gathered} Q(\theta)=I_2 M\theta^3/m_c-[I_2+Ml_1l+Ml_1^2+ \\ +m_*(l_1-l_2)l]\theta^2+(Ml_1l-ml^2-ml_2l)\theta+ml^2 \end{gathered}$$

Точные корни уравнения $\Delta_1(x)=0$, так же как их приближенные величины (3.4), (3.5), (3.6), не зависят от кинетического момента H.

Пятую собственную частоту определим из (3.1):

$$\omega_5=\omega_p \tag{3.7}$$

Собственные частоты ω_2 и ω_5 имеют отношение к радиальным упругим колебаниям системы. Маятниковые колебания чувствительного элемента

в поле тяготения Земли (плоскость $O\xi_1\xi_3$) происходят с частотами ω_3 и ω_4. Выражения для частот $\omega_{3,4}=(g\theta_{1,2}/l)^{1/2}$ без приведенных выше поправок получены в [1].

Рассмотрим далее уравнение $\Delta_2(\omega^2)=0$. Учтем малость отношения $g/l\omega_y^2$. Малый параметр $\varepsilon_3=g/l\omega_y^2$ войдет явно в уравнение после замены ω на y по формуле $y=\omega^2/\omega_y^2$. Начальные члены разложения квадратов собственных частот удовлетворяют уравнению, которое получится из $\Delta_2=0$, если в нем положить $g=0$:

$$\omega^2[K_0L(\omega^2, b')-m_*\omega^2L(\omega^2, b'')]=0$$

$$L(z, b)=z^3(b-1)(a-1)-z^2[(2ab-a-b)\times$$
$$\times\omega_y^2+\Omega^2(a-1)(b-1)]+z[\Omega^2\omega_y^2(a+b-2)+\omega_y^4ab]-\omega_y^4\Omega^2 \qquad (3.8)$$

$$b'=1+[I_1+m_*(l_1-l_2)^2]/A,\ b''=1+I_1/A$$

В выражении $L(\omega^2, b)$ величину b следует рассматривать как параметр. Полином $L(\omega^2, b)$ входит в левую часть (3.8) при различных значениях параметра b' и b''. Разность $\delta b=b'-b''=m_*(l_1-l_2)^2/A$ характеризует разбалансированность чувствительного элемента относительно оси вращения ротора, например из-за наличия штанги.

Один из корней (3.8) равен нулю. Следовательно, для него разложение начинается с линейного члена по ε_3. Квадрат частоты с учетом первых двух членов разложения имеет вид

$$\omega_6^2=\frac{g}{l}\left\{1-\frac{g}{l}\left[\frac{m_cl_c^2}{A}\left(\frac{a}{\Omega^2}+\frac{1}{\omega_y^2}\right)+\frac{m}{m_c\omega_0^2}\right\}\right] \qquad (3.9)$$

Этими членами разложения можно ограничиться, так как первая поправка к g/l дает ясную картину влияния упругости подшипников на величину частоты. Из этих же соображений для остальных четырех частот будут выписаны лишь начальные члены разложения, которые можно определить решив уравнение четвертой степени

$$K_0L(z, b')-zm_*L(z, b'')=0 \qquad (3.10)$$

Решение последнего уравнения будем искать не делая определенных предположений о соотношении величин ω_0, ω_y, Ω, входящих в коэффициенты полинома L. Рассмотрим два случая: $\delta b=0$, $\delta b\neq 0$.

В первом уравнение (3.10) упрощается:

$$(m_*z-K_0)L(z, b'')=0 \qquad (3.11)$$

Частота упругих осевых колебаний при этом будет $\omega_{*7}=\sqrt{K_0/m_*}$.

Рассмотрим уравнение $L(z, b)=0$, которым определяется часть собственных частот свободного гироскопа с упругими опорами ротора. Корни полинома $L(\omega^2, b)$ были получены в [3]. Приведем краткий вывод их формул.

Разрешим уравнение $L(z, b)=0$ относительно Ω^2:

$$\Omega^2=\omega^2\frac{(b-1)(a-1)\omega^4-(2ab-a-b)\omega_y^2\omega^2+\omega_y^4ab}{(b-1)(a-1)\omega^4-(a-2+b)\omega_y^2\omega^2+\omega_y^4} \qquad (3.12)$$

Корням полинома шестой степени $L(\omega^2, b)$ соответствуют три ветви функции (3.12). Пересечения ее ветвей с горизонтальной прямой Ω^2 и дадут искомые корни. Простейшей из мероморфных функций, имеющих один нуль и один полюс, является дробно-линейная функция

$$\Omega^2=(\lambda_1+\lambda_2\omega^2)/(\delta_1+\delta_2\omega^2) \qquad (3.13)$$

Будем аппроксимировать этой функцией рассматриваемую ветвь функции (3.12). Коэффициенты λ_1, λ_2, δ_1, δ_2 находятся из условий совпадения

соответствующих нулей и полюсов, а также первых производных в нулях. Осуществляя затем обращение выражения (3.13), получим первый и второй корень полинома $L(\omega^2, b)$. Третью ветвь найдем разделив полином шестой степени $L(\omega^2, b)$ на $(\omega^2-\omega_{*8}^2)(\omega^2-\omega_{*9}^2)$. В результате получим формулы для приближенного определения корней полинома при условии $b>a$:

$$\omega_{*8}^2(b)=\frac{\omega_y^2\Omega^2}{ab\omega_y^2+\Omega^2(b-1)},$$

$$\omega_{*9}^2(b)=\frac{[\Omega^2(b-1)^3+b^2(b-a)\omega_y^2]\omega_y^2}{[\Omega^2(b-1)^2(a-1)+b(b-a)\omega_y^2](b-1)} \tag{3.14}$$

$$\omega_{*10}^2(b)=\left(\frac{a}{a-1}+\frac{b}{b-1}\right)\omega_y^2-(\omega_{*8}^2+\omega_{*9}^2)+\Omega^2$$

Отметим, что в случае $a<b$ формулы для 8, 9, 10-й частот получаются из выражений (3.14) заменой b на a, а a — на b вследствие симметрии коэффициентов полинома относительно a и b. Для гирокомпаса с торсионным подвесом чувствительного элемента обычно $I_1>I_3$, следовательно $b'\geqslant\geqslant b''=(I_1+A)/A>(I_3+A)/A=a$.

Поэтому далее для определенности будем предполагать $b>a$. Итак, в случае $\delta b=0$ набор величин $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{*7}, \omega_{*8}(b''), \omega_{*9}(b''), \omega_{*10}(b'')$ определяет собственные частоты гирокомпаса.

Рассмотрим теперь уравнение (3.8) при b', отличных от b'', и разрешим его относительно $K_0/m_*=zL(z, b'')/L(z, b')$.

Произведем замену $z=y\omega_y^2$. Пусть $y_1(b)$, $y_2(b)$, $y_3(b)$ — точные корни полинома $L(y\omega_y^2, b)$. Тогда предыдущее равенство представим в виде

$$\frac{(b'-1)K_0}{(b''-1)\omega_y^2 m_*}=y\frac{[y-y_1(b'')][y-y_2(b'')][y-y_3(b'')]}{[y-y_1(b')][y-y_2(b')][y-y_3(b')]} \tag{3.15}$$

Графическое представление функции $\Phi(y)$ в правой части (3.15) дано на фиг. 5 сплошными линиями, а пунктирными линиями изображены асимптоты и касательные к функции в ее нулях. Искомые частоты найдутся как точки пересечения графика $\Phi(y)$ с горизонтальной прямой $\Phi=\varkappa=(b'-1)(b''-1)^{-1}K_0\omega_y^{-2}m_*^{-1}$.

Далее проводится исследование корней $y_i(b)$ как функции параметра b, что позволит конкретизировать характер поведения $\Phi(y)$.

Покажем, что $y_i(b)$ $(i=1, 2, 3)$ являются монотонно убывающими функциями параметра b. Рассмотрим уравнение $L(\omega^2, b)=0$ в форме (3.12). Произведем замену $y=\omega^2/\omega_y^2$ и введем обозначения $(b-1)^{-1}=c>0$, $(a-1)^{-1}=d>0$. Уравнение (3.12) преобразуется к виду

$$k^2=\frac{\Omega^2}{\omega_y^2}=y\frac{(y-c-1)(y-d-1)}{(y-c)(y-d)}\equiv F(y) \tag{3.16}$$

Из графического представления этого соотношения на фиг. 6 (пунктирными линиями показаны асимптоты и касательные в нулях $F(y)$) видно, что в случае $d>c+1$ корни лежат в пределах

$$0\leqslant y_1<c, \quad c+1\leqslant y_2<d, \quad y_3\geqslant d+1 \tag{3.17}$$

Нетрудно получить и области значений корней в случае $d<c+1$:

$$0\leqslant y_1<c, \quad d<y_2\leqslant c+1, \quad y_3\geqslant d+1 \tag{3.18}$$

Из этих соотношений также следует, что $0\leqslant y_1<y_2<y_3$, так как $d>c$ вследствие предположения относительно a и b.

Вычислим из неявной зависимости $y(b)$ в (3.16) производную

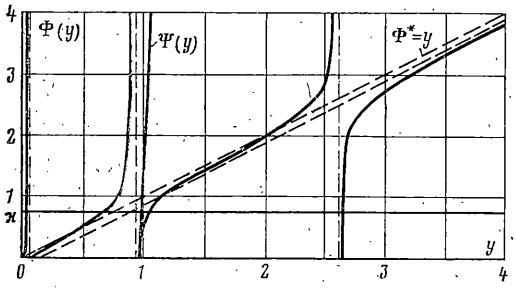
$$\frac{dy}{db}=\frac{-c^2y(y-d-1)(y-d)}{[(y-c)^2]+c](y-d)(y-d-1)-y(y-c)(1+c-y)} \tag{3.19}$$

Нетрудно убедиться, что в обоих случаях (3.17), (3.18) производная dy/db всюду отрицательна. Это и доказывает предположение о монотонной зависимости корней y_i от параметра b. Отметим, что монотонность очевидна из физических соображений: чем больше массы элементов, тем меньше частота колебаний.

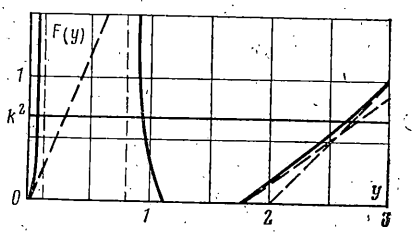
Рассмотрим выражение для dy/db в случае (3.18), когда $d<y\leqslant c+1$, преобразовав предварительно знаменатель (3.19). Учитывая, что $d>c$, можно получить оценку производной

$$\frac{dy}{db}=\frac{-c^2(y-d)(1+d-y)}{[(y-d)^2+d](y-c)(1+c-y)+y(y-d)(1+d-y)}\geqslant$$
$$\geqslant -c^2\frac{y(d+1-y)(y-d)}{y(d+1-y)(y-d)}=-c^2$$

Аналогично можно получить оценки и для других областей (3.17),



Фиг. 5



Фиг. 6

(3.18), преобразовав знаменатель к виду $(y-d-1)(y-d)(y-c-1)(y-c)+$ $+y(y-c-1)(y-c)+y(y-d)(y-d-1)$.

При этом получим одинаковые оценки для всех корней

$$-\frac{1}{(b-1)^2}\leqslant\frac{dy_i}{db}\leqslant 0 \quad {\scriptstyle (i=1,2,3)} \quad (0\leqslant k<\infty) \tag{3.20}$$

Рассмотрим интеграл от неотрицательной функции

$$\int\limits_{b''}^{b'}\left(\frac{dy_i}{db}+\frac{1}{(b-1)^2}\right)db=y_i(b')-y_i(b'')+\frac{1}{(b''-1)}-\frac{1}{(b'-1)}\geqslant 0 \tag{3.21}$$

Из монотонной зависимости $y(b)$ и неравенства (3.21) следует

$$0\leqslant y_i(b'')-y_i(b')\leqslant\delta b(b'-1)^{-1}(b''-1)^{-1} \tag{3.22}$$

Введем обозначения $\Delta y_i=y_i(b'')-y_i(b')\geqslant 0$, $y_i'=y_i(b')$. Преобразуем в этих обозначениях функцию $\Phi(y)$:

$$\Phi(y)=y\left(1-\frac{\Delta y_1}{y-y_1'}\right)\left(1-\frac{\Delta y_2}{y-y_2'}\right)\left(1-\frac{\Delta y_3}{y-y_3'}\right) \tag{3.23}$$

При произвольных b'', a, k расположение нулей и полюсов функции будет вполне определено, если δb невелико. Достаточно тонкие оценки корней можно получить с помощью мажорирующих функций. Однако в этом случае придется решать кубические уравнения, что приведет к сложным выражениям. Это тем более не целесообразно, что само уравнение (3.8) неточно моделирует гирокомпас. Сравнительно простые формулы можно получить аппроксимируя ветви мероморфной функции $\Phi(y)$ дроб-

но-линейными. Однако такое приближение становится слишком грубым в практически важном случае, когда

$$\frac{\delta b}{(b''-1)(b'-1)} \ll \min\left\{1, \frac{1}{a-1}\right\} \tag{3.24}$$

Например, для третьей ветви $\Phi(y)$ на фиг. 5 сплошной линией изображена дробно-линейная функция $\psi(y)$, у которой такие же нуль, полюс и производная в нуле. Отклонение же ее от ветви $\Phi(y)$ в верхней части графика составляет величину порядка $y_3(b')-y_2(b'')$, что может быть и немалым.

Ниже приводятся приближенные формулы для гирокомпаса с параметрами, удовлетворяющими неравенству (3.24). Обычно для реальных систем оно выполнено. Из выражения для $\Phi(y)$ (3.23) видно, что чем меньше Δy_i, тем ближе точки графика к множеству точек, образованному из четырех прямых: $\Phi^*=y$, $y=y_1'$, $y=y_2'$, $y=y_3'$. Так как из (3.17), (3.18), (3.22), (3.24) следуют неравенства $\Delta y_i \ll y_2' < y_3'$, можно говорить о малости отклонения решений уравнения (3.15) от y_2' и y_3'. Два других корня удовлетворяют приближенно уравнению

$$\varkappa = y[1-\Delta y_1(y-y_1')^{-1}] \tag{3.25}$$

Решение этого уравнения с последующим переходом к $\omega^2=\omega_y^2 y$ и заменой точного решения $y_1\omega_y^2$ на приближенное значение ω_{*8}^2 приводит к формулам

$$\omega_{7,8}^2 = {}^1/_2\{\omega_0'^2+\omega_{*8}^2(b'') \pm \{[\omega_0'^2-\omega_{*8}^2(b'')]^2+4\omega_0'^2[\omega_{*8}^2(b'')-\omega_{*8}^2(b')]\}^{1/2}\} \tag{3.26}$$

$$\omega_0'^2 = K_0(b'-1)\,/\,m_*(b''-1), \quad \omega_9=\omega_{*9}(b'), \quad \omega_{10}=\omega_{*10}(b')$$

Те же самые формулы определяют собственные частоты, если отказаться от условия (3.24), но считать $\mu_1=k^{-2}=\omega_y^2/\Omega^2$ малым. Действительно производные, вычисленные по формуле (3.19)

$$\frac{dy_1}{db} = -\frac{1}{(b-1)^2}+O(\mu_1), \quad \frac{dy_3}{db} = -\frac{\mu_1}{(b-1)^2}+O(\mu_1^2)$$

$$dy_2/db = -C_1\mu_1+O(\mu_1^2), \quad C_1>0 \tag{3.27}$$

показывают, что для второго и третьего корня полинома производные являются величинами первого порядка малости. Отметим, что для реальных конструкций, если выполнено (3.24) и $\mu_1\to 0$ (H достаточно велико, либо мягкие подшипники), формулы с высокой точностью определяют корни уравнения (3.8).

Представляет интерес выделить случай малых k, в котором функции y_1 и y_3 слабо зависят от b. И так же, как в случае малых μ_1, можно предложить формулы для приближенного определения частот

$$\omega_7=\omega_{*8}(b'), \quad \omega_8=\omega_{*10}(b'), \quad \omega_{9,10}^2={}^1/_2\{\omega_0'^2+\omega_{*9}^2(b'') \pm$$
$$\pm\{[\omega_0'^2-\omega_{*9}(b'')]^2+4\omega_0'^2[\omega_{*9}^2(b'')-\omega_{*9}^2(b')]\}^{1/2}\} \tag{3.28}$$

Интересно отметить, что при $K_0\to\infty$ первая формула (3.26) дает $\omega_7^2=\omega_0'^2+\omega_{*8}^2(b'')-\omega_*^2(b')$, $\omega_8=\omega_{*8}(b')$.

Последняя формула описывает зависимость первой нутационной частоты от кинетического момента

$$\lim_{K_y\to\infty} \omega_{*8}(b') = \lim_{\omega_y\to\infty} \frac{\omega_y\Omega}{\sqrt{ab'\omega_y^2+(b'-1)\Omega^2}} = \frac{\Omega}{\sqrt{ab'}}$$

Итак, все собственные частоты найдены.

Пример. $\omega_0=450$ с$^{-1}$, $\omega_p=780$ с$^{-1}$, $\omega_y=560$ с$^{-1}$, $m=0{,}4$ кг, $M=0{,}6$ кг, $l=l_1=0{,}15$ м, $l_2=0{,}25$ м, $A=1{,}2\cdot10^{-4}$ кг·м^2, $C=1{,}8\cdot10^{-4}$ кг·м^2, $I_1=1{,}05\cdot10^{-2}$ кг·м^2, $I_2=1{,}07\cdot10^{-2}$, $I_3=3\cdot10^{-4}$ кг·м^2, $\varphi=60°$, $u=7{,}29\cdot10^{-5}$ с$^{-1}$, $\Omega=3769{,}3$ с$^{-1}$.

Подставляя значения параметров в формулы, получаем величины собственных частот $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_6$ (с$^{-1}$): 3,887·10^{-4}; 1114,09; 5,068; 19,030; 780; 7,825.

Сравним точные величины корней уравнения с вычисленными по приближенным формулам. Корни, полученные на ЭВМ, следующие (с$^{-1}$): 51,969; 359,98; 644,45; 3851,28, а по формулам (3.26): 51,977; 356,42; 644,41; 3851,61.

Таким образом, формулы представляют весьма хорошее приближение точных значений частот гирокомпаса. Значение первой нутационной частоты без учета упругих свойств опор ротора $\omega=\Omega/\sqrt{ab'}=193{,}5$ с$^{-1}$.

Сравнивая это значение с частотой, полученной в предположении упругого подшипника по формуле (3.26) $\omega_8=52{,}0$ с$^{-1}$, видим, что учет упругих свойств является причиной уменьшения первой нутационной частоты почти в четыре раза. Представляют интерес также формулы частот упругих колебаний системы и их зависимость от кинетического момента. Прочие частоты уменьшились несущественно, на практике нет смысла учитывать такие малые поправки.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Василенко В. П., Темченко М. Е.* К теории гирокомпаса на торсионном подвесе.— Инж. ж. МТТ, 1966, № 1, с. 6–13.
2. *Журавлев В. Ф.* Задача о равновесии неидеального шарикового подшипника.— Изв. АН СССР. МТТ, 1970, № 4, с. 72–77.
3. *Журавлев В. Ф.* О движении свободного гироскопа при наличии внутренних возмущений.— Изв. АН СССР. МТТ, 1973, № 5, с. 14–21.
4. *Журавлев В. Ф.* Динамика ротора в неидеальных подшипниках.— Изв. АН СССР. МТТ, 1971, № 5, с. 44–48.
5. *Новиков Л. З.* О влиянии несферичности Земли на работу гирогоризонткомпаса.— ПММ, 1963, т. 27, вып. 5, с. 878–884.

Москва

Поступила в редакцию
3.V.1983