**МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 2 · 1984**

УДК 624.07:534.1

УСТОЙЧИВОСТЬ СТЕРЖНЕЙ ИЗ НЕОДНОРОДНО-СТАРЕЮЩЕГО ВЯЗКОУПРУГОГО МАТЕРИАЛА

ДРОЗДОВ А. Д., КОЛМАНОВСКИЙ В. Б., ПОТАПОВ В. Д.

Устойчивость неоднородно-стареющих стержней исследовалась в [1–4]. Принятое там определение устойчивости стержня на бесконечном и конечном интервалах времени соответствует определению устойчивости движения динамических систем по Ляпунову и Четаеву. В [1–4] установлены необходимые и достаточные условия устойчивости и проанализирована их зависимость от исходных данных задачи для статически определимых стержней и ядер ползучести $k(t, \tau)$ вида

$$k(t, \tau) = -E(\partial/\partial\tau)[\varphi(\tau)(1-\exp(-\gamma(t-\tau)))]$$

В публикуемой работе исследуется устойчивость неоднородно-стареющих вязкоупругих стержней при произвольном ядре ползучести, различных видах нагружения и типах опирания концов. Ниже приняты те же определения устойчивости стержня на конечном и бесконечном интервалах времени, что и в [1–4].

1. Постановка задачи устойчивости на бесконечном интервале времени. Рассматривается прямолинейный стержень длины l из неоднородно-стареющего вязкоупругого материала. Поперечные сечения стержня имеют одну ось симметрии. Изгиб происходит в плоскости, проходящей через ось симметрии и продольную ось стержня. Обозначим: J — момент инерции поперечного сечения относительно нейтральной оси, E — постоянный модуль упругомгновенной деформации материала стержня, $x \in [0, l]$ — координата элементов стержня. В момент времени $t=0$ к стержню приложена внешняя продольная и распределенная поперечная нагрузка интенсивности $q(x)$. Возраст элемента стержня в момент приложения внешней нагрузки обозначим $\rho(x)$, где функция ρ кусочно непрерывна и ограничена. При одноосном напряженном состоянии деформация $\varepsilon(t, x)$ и напряжение $\sigma(t, x)$ в момент времени $t \geqslant 0$ в точке с координатой x связаны соотношениями [5]:

$$\varepsilon = E^{-1}(I+K)\sigma, \qquad \sigma = E(I+K)^{-1}\varepsilon = E(I-R)\varepsilon \tag{1.1}$$

$$I\sigma = \sigma, \qquad K\sigma = \int_0^t k(t+\rho(x), \tau+\rho(x))\sigma(\tau, x)\,d\tau$$

$$R\varepsilon = \int_0^t r(t+\rho(x), \tau+\rho(x))\varepsilon(\tau, x)\,d\tau$$

Здесь I — единичный оператор, K — оператор ползучести с ядром k, R — оператор релаксации с ядром r.

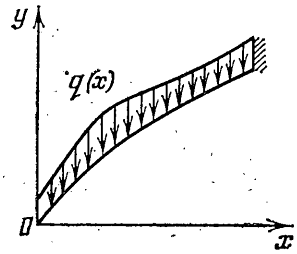
Ниже постоянно предполагается, что ядро k допускает представление

$$k(t, \tau) = l_0(t, \tau) + l_1(t, \tau)(t-\tau)^{-\varkappa} \qquad (0 \leqslant \varkappa < 1)$$

где функции $l_0 \geqslant 0$, $l_1 \geqslant 0$ кусочно непрерывны по t и непрерывны по τ при $0 \leqslant \tau \leqslant t$. Аналогичное представление справедливо и для ядра релаксации r.

Обозначим через $y(t, x)$ прогиб стержня в момент времени $t \geqslant 0$ в точке с координатой x.

Определение. Стержень называется устойчивым, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что для любой поперечной нагрузки $q(x)$, удовлетворяющей неравенству $\sup_x |q(x)| < \delta$ $(0 \leqslant x \leqslant l)$, соответствующий этой нагрузке прогиб $y(t, x)$ удовлетворяет оценке



Фиг. 1

$$\sup_{t,x} |y(t, x)| < \varepsilon \quad (0 \leqslant t < \infty, \quad 0 \leqslant x \leqslant l) \tag{1.2}$$

Ниже на примере консольного стержня излагается метод получения условий устойчивости вязкоупругих стержней. Затем эта методика обобщается на различные виды нагружения и произвольные граничные условия.

Предполагается, что прогиб стержня достаточно мал (т. е. можно пренебречь величиной $y'^2 = (\partial y/\partial x)^2$ по сравнению с единицей) и справедлива гипотеза плоских сечений. Тогда изгибающий момент определяется выражением

$$M(t, x) = -EJ(I-R)y'' \tag{1.3}$$

2. Устойчивость консоли под действием сосредоточенной сжимающей силы. Рассмотрим стержень, один конец которого жестко защемлен, а другой — свободен. На стержень действует сосредоточенная сжимающая сила P (фиг. 1). Изгибающий момент $M(t, x)$ равен

$$M = Py + \int_0^x q(\xi)(x-\xi)\,d\xi$$

Отсюда и из (1.3) вытекает уравнение для прогиба

$$EJ(I-R)y'' = -Py - \int_0^x q(\xi)(x-\xi)\,d\xi \tag{2.1}$$

Граничные условия для уравнения (2.1) имеют вид

$$y(t, 0) = 0, \qquad y'(t, l) = 0 \tag{2.2}$$

Обозначим через $\lambda_1 > 0$ минимальное собственное значение краевой задачи $y'' + \lambda y = 0$ с граничными условиями (2.2). Известно, что $\lambda_1 = (\pi/2l)^2$.

Теорема 1. Предположим, что существует такая функция $k_1(t, \tau)$, что

$$0 \leqslant k(t+\rho(x), \tau+\rho(x)) \leqslant k_1(t, \tau)$$

$$|k_1| = \sup_t \int_0^t k_1(t, \tau)\,d\tau < \infty$$

$$(0 \leqslant \tau \leqslant t, \ 0 \leqslant x \leqslant l)$$

Тогда стержень устойчив, если сжимающая сила P удовлетворяет оценке

$$P < \lambda_1 EJ(1 + |k_1|)^{-1} \tag{2.3}$$

Доказательство. Разрешим соотношение (2.1) относительно y''. Тогда получим

$$y'' + \alpha_1(I+K)y = -(I+K)m(x) \tag{2.4}$$

$$\alpha_1=\frac{P}{EJ},\qquad m=\frac{1}{EJ}\int\limits_0^x q(\xi)(x-\xi)\,d\xi$$

Введем обозначения

$$u_j^2(t)=\int\limits_0^l\left[\frac{\partial^j y(t,x)}{\partial x^j}\right]^2 dx,\qquad v_j(t)=\sup\nolimits_\tau u_j(\tau)\qquad (0\leqslant\tau\leqslant t)$$

Отсюда и из [6, с. 132] следует, что для любых $x\in[0, l]$ выполняются неравенства ($t\geqslant 0$):

$$u_0^2(t)\leqslant u_1^2(t)/\lambda_1,\quad |m(x)|\leqslant l^2\sup\nolimits_x|q(x)|/EJ \tag{2.5}$$

Умножим обе части (2.4) на $y(t, x)$ и проинтегрируем по x от 0 до l. Интегрируя по частям и учитывая граничные условия (2.2), получим

$$\int\limits_0^l [y'(t,x)]^2\,dx=\alpha_1\int\limits_0^l y^2(t,x)\,dx+\alpha_1\int\limits_0^t d\tau\int\limits_0^l k(t+\rho(x),$$

$$\tau+\rho(x))\,y(t,x)\,y(\tau,x)\,dx+\int\limits_0^l m(x)\,y(t,x)\left[1+\int\limits_0^t k(t+\rho(x),\right.$$

$$\left.\tau+\rho(x))\,d\tau\right]dx \tag{2.6}$$

Из соотношений (2.5), (2.6) и условий теоремы 1 вытекает справедливость оценки

$$u_1^2(t)\leqslant\alpha_1u_0^2(t)+\alpha_1u_0(t)\int\limits_0^t k_1(t,\tau)\,u_0(\tau)\,d\tau+\mu\left[1+\int\limits_0^t k_1(t,\tau)\,d\tau\right]u_0(t)\leqslant$$

$$\leqslant\lambda_1^{-1}u_1(t)\,(1+|k_1|)\,(\alpha_1v_1(t)+\lambda_1^{1/2}\mu),\qquad \mu^2=\int\limits_0^l m^2(x)\,dx$$

Из этого неравенства следует, что

$$[\lambda_1-\alpha_1(1+|k_1|)]\,v_1(t)\leqslant(1+|k_1|)\,\lambda_1^{1/2}\mu \tag{2.7}$$

но

$$|y(t,x)|=\left|\int\limits_0^x\frac{\partial y(t,s)}{\partial s}\,ds\right|\leqslant l^{1/2}u_1(t)\leqslant l^{1/2}v_1(t) \tag{2.8}$$

Тогда из (2.7), (2.5) вытекает справедливость теоремы 1.

Замечание 1. Условие устойчивости (2.3) имеет место также для стержня с шарнирно-закрепленными концами при $\lambda_1=(\pi/l)^2$.

Замечание 2. Условие (2.3), установленное при весьма слабых ограничениях на ядро ползучести k, является довольно жестким. В частности, это условие для ядра ползучести Н. Х. Арутюняна не переходит в условие устойчивости из [1—4]. Менее жесткие условия устойчивости получены ниже при дополнительных предположениях о предельном поведении ядер ползучести и релаксации.

Предположим, что существует такая функция $r_0(t,\ \tau)$, что равномерно по $t \geqslant T$:

$$\int\limits_T^{\infty} \sup_x |r(t+\rho(x),\ \tau+\rho(x))-r_0(t,\tau)|\,d\tau \to 0 \quad (T\to\infty) \tag{2.9}$$

Пусть R_0 — оператор релаксации с ядром r_0, а K_0 — соответствующий R_0 оператор ползучести с ядром k_0. Предполагается, что ядра k_0 и r_0 удовлетворяют соотношениям

$$|k_0|<\infty,\ |r_0|<\infty \tag{2.10}$$

Установим условия устойчивости при этих предположениях.

3. Устойчивость консоли при наличии сосредоточенной и рапределенной сжимающих нагрузок. Выведем условие устойчивости консоли (фиг. 1), на которую действует еще и продольная сжимающая нагрузка постоянной интенсивности g. Положим $\alpha_2=g/(EJ)$. Обозначим через $\lambda_2>0$ минимальное собственное значение краевой задачи $y''+\lambda xy=0$, $y(l)=0$, $y'(0)=0$.

Теорема 2. Предположим, что выполнены условия (2.9), (2.10) и

$$0\leqslant r(t+\rho(x),\ \tau+\rho(x))\leqslant r_1(t,\ \tau),\ (|r_1|<\infty) \tag{3.1}$$

Пусть далее

$$\theta=\alpha_1/\lambda_1+\alpha_2/\lambda_2<(1+|k_0|)^{-1} \tag{3.2}$$

Тогда стержень устойчив.

Доказательство. Уравнение для прогиба и граничные условия имеют вид $(y'=z)$:

$$(\partial/\partial x)(I-R)z'=-(\alpha_1+\alpha_2 x)z-m_1(x)$$
$$m_1(x)=\frac{1}{EJ}\int\limits_0^x q(\xi)\,d\xi,\qquad y(t,0)=0,\qquad z(t,l)=0,\qquad z'(t,0)=0 \tag{3.3}$$

Введем в рассмотрение функции

$$w_j^2(t)=\int\limits_0^l\left[\frac{\partial^j z(t,x)}{\partial x^j}\right]^2 dx,\qquad w_{1j}^2(t)=\int\limits_0^l x\left[\frac{\partial^j z(t,x)}{\partial x^j}\right]^2 dx \tag{3.4}$$
$$\omega_j(t)=\sup_\tau w_j(\tau)\quad(0\leqslant\tau\leqslant t)$$

Подобно (2.5), имеем

$$|y(t,\ x)|\leqslant l^{1/2}w_0(t),\ |m_1(x)|\leqslant l\sup_x|q(x)|/(EJ)$$
$$w_0^2(t)\leqslant w_1^2(t)/\lambda_1,\ w_{10}^2(t)\leqslant w_1^2(t)/\lambda_2 \tag{3.5}$$

Представим уравнение (3.3) в виде $(\partial/\partial x)[(I-R_0)z']=-(\alpha_1+\alpha_2x)z-m_1(x)+(\partial/\partial x)[(R-R_0)z']$. Здесь оператор $I-R_0$ в левой части не зависит от x. Поэтому этот оператор можно вынести за знак производной. Разрешая затем полученное уравнение относительно z'', получим

$$z''=-(\alpha_1+\alpha_2x)(I+K_0)z-(I+K_0)m_1+(I+K_0)[(R-R_0)z']' \tag{3.6}$$

Умножим обе части уравнения (3.6) на $z(t,\ x)$ и проинтегрируем по x в пределах от 0 до l. Интегрируя по частям, получим

$$w_1^2(t)=\int\limits_0^l(\alpha_1+\alpha_2x)z^2(t,x)\,dx+\int\limits_0^t k_0(t,\tau)\,d\tau\int\limits_0^l(\alpha_1+\alpha_2x)z(t,x)z(\tau,x)\,dx+$$

$$+\left(1+\int_0^t k_0(t,\tau)\,d\tau\right)\int_0^l m_1(x)z(t,x)\,dx+\int_0^t d\tau\int_0^l [r(t+\rho(x),\tau+\rho(x))-$$

$$-r_0(t,\tau)]z'(t,x)z'(\tau,x)\,dx+\int_0^t k_0(t,\tau)\,d\tau\int_0^\tau ds\int_0^l [r(\tau+\rho(x),s+\rho(x))- \tag{3.7}$$

$$-r_0(\tau,s)]z'(t,x)z'(s,x)\,dx$$

Преобразуем отдельные слагаемые в (3.7). На основании условия (3.2) существует такое $\varepsilon>0$, что $1-(1+|k_0|)(\theta+\varepsilon/\lambda_1)>0$. В силу (2.9) найдется такое $T=T(\varepsilon)>0$, что для всех $t\geqslant T$ справедливо неравенство

$$\int_T^t \sup_x |r(t+\rho(x),\tau+\rho(x))-r_0(t,\tau)|\,d\tau<\varepsilon \tag{3.8}$$

Выберем и зафиксируем какие-либо числа ε, $T(\varepsilon)$, удовлетворяющие сформулированным требованиям. Ввиду (3.4), (3.5) имеем

$$\int_0^l (\alpha_1+\alpha_2 x)z^2(t,x)\,dx\leqslant\alpha_1 w_0^2(t)+\alpha_2 w_{10}^2(t)\leqslant\theta w_1^2(t)$$

Аналогично, используя неравенство Коши — Буняковского, получим

$$\int_0^l (\alpha_1+\alpha_2 x)z(t,x)z(\tau,x)\,dx\leqslant\alpha_1 w_0(t)w_0(\tau)+\alpha_2 w_{10}(t)w_{10}(\tau)\leqslant\theta w_1(t)\omega_1(t) \tag{3.9}$$

$$\left|\int_0^l m_1(x)z(t,x)\,dx\right|\leqslant Qw_0(t)\leqslant\frac{Qw_1(t)}{\lambda_1^{1/2}},\qquad Q^2=\int_0^l m_1^2(x)\,dx$$

Оценка последних двух слагаемых в (3.7) осуществляется одинаково. Поэтому приведем ее лишь для первого из них. Представим интеграл по τ в виде суммы интеграла от 0 до T и от T до t.

Используя неравенство Коши — Буняковского и оценку (3.8), будем иметь

$$\left|\int_0^t d\tau\int_0^l [r(t+\rho(x),\tau+\rho(x))-r_0(t,\tau)]z'(t,x)z'(\tau,x)\,dx\right|\leqslant$$

$$\leqslant\int_0^T [|r_1(t,\tau)|+|r_0(t,\tau)|]\,d\tau\, w_1(t)\omega_1(T)+\varepsilon w_1(t)\omega_1(t)\leqslant$$

$$\leqslant w_1(t)[\omega_1(T)(|r_0|+|r_1|)+\varepsilon\omega_1(t)]$$

Подставляя полученные оценки в (3.7), заключаем, что

$$w_1^2(t)\leqslant\theta[w_1^2(t)+|k_0|w_1(t)\omega_1(t)]+$$
$$+(1+|k_0|)w_1(t)[(|r_0|+|r_1|)\omega_1(T)+\varepsilon\omega_1(t)+\lambda_1^{-1/2}Q]$$

Из этого неравенства вытекает

$$[1-(1+|k_0|)(\theta+\varepsilon/\lambda_1)]\omega_1(t)\leqslant(1+|k_0|)[|r_0|+|r_1|)\omega_1(T)+\lambda_1^{-1/2}Q]\qquad (t>T) \tag{3.10}$$

Установим теперь оценку величины $\omega_1(T)$ в правой части неравенства (3.10) через m_1. Умножим первое из уравнений (3.3) на $z(t,x)$ и проинтегрируем по x в пределах от 0 до l. Интегрируя по частям, с учетом граничных условий получим

$$w_1^2(t)=[\alpha_1 w_0^2(t)+\alpha_2 w_{10}^2(t)]+\int_0^l m_1(x)z(t,x)\,dx+$$
$$+\int_0^t d\tau\int_0^l r(t+\rho(x),\,\tau+\rho(x))z'(t,x)z'(\tau,x)\,dx \tag{3.11}$$

Но на основании (3.1), (3.4)

$$\left|\int_0^t d\tau\int_0^l r(t+\rho(x),\,\tau+\rho(x))z'(t,x)z'(\tau,x)\,dx\right|\leqslant w_1(t)\int_0^t r_1(t,\tau)w_1(\tau)\,d\tau$$

Отсюда и из (3.11), используя еще оценки (3.5), (3.9), заключаем, что

$$w_1^2(t)\leqslant w_1(t)\left[\theta w_1(t)+\int_0^t r_1(t,\tau)w_1(\tau)\,d\tau+\lambda_1^{-1/2}Q\right] \tag{3.12}$$

Введем в рассмотрение ядра $r^{(i)}(t,\tau)$ по формулам

$$r^{(1)}(t,\tau)=(1-\theta)^{-1}r_1(t,\tau),\quad r^{(i)}(t,\tau)=(1-\theta)^{-1}\int_\tau^t r_1(t,s)r^{(i-1)}(s,\tau)\,ds$$

На основании [7, с. 144] существует такой номер n, что функция $r^{(n)}(t,\tau)$ непрерывна. Итерируя неравенство (3.12), получаем

$$w_1(t)\leqslant\int_0^t r^{(n)}(t,\tau)w_1(\tau)\,d\tau+Q_1\lambda_1^{-1/2}Q$$
$$Q_1=\left[1+\int_0^t\sum_{i=1}^{n-1}r^{(i)}(t,\tau)\,d\tau\right] \tag{3.13}$$

Теперь, чтобы применить лемму Гронуолла — Беллмана, возведем обе части неравенства (3.13) в квадрат. Получим

$$w_1^2(t)\leqslant 2\lambda^{-1}Q^2Q_1^2+2\int_0^t[r^{(n)}(t,\tau)]^2\,d\tau\int_0^t w_1^2(s)\,ds$$

Применяя к последнему неравенству лемму Гронуолла — Беллмана, будем иметь

$$w_1^2(t)\leqslant c_1Q^2\quad(0\leqslant t\leqslant T) \tag{3.14}$$

Здесь и далее $c_i>0$ — некоторые постоянные. Из (3.10), (3.14) следует, что $\omega_1(t)\leqslant c_2Q$. Отсюда и из оценок вида (2.8) вытекает справедливость теоремы 2.

Замечание 1. Теорема 2 справедлива также для стержня, находящегося под действием m сосредоточенных сжимающих сил P_i (приложенных в разных точках стержня) и n распределенных сжимающих нагрузок интенсивностями q_j. Пусть λ_i — собственное значение краевой задачи, отвечающей упругому стержню, сжатому i-й сосредоточенной силой, а λ_j — собственное значение упругой задачи, отвечающее j-й распределенной нагрузке. Тогда стержень устойчив, если

$$\sum_{i=1}^{m+n}\frac{\alpha_i}{\lambda_i}<(1+|k_0|)^{-1},\quad \alpha_i=\frac{P_i}{EJ},\quad \alpha_j=\frac{g_j}{EJ}$$

Этот результат является обобщением известной теоремы Папковича [8], доказанной для упругих стержней, т. е. для $|k_0|=0$.

Замечание 2. Для ядра ползучести Н. Х. Арутюняна ядро $k_0(t, \tau)=\gamma EC_0 \exp[-\gamma(t-\tau)]$, где $C_0=\lim \varphi(\tau)$ при $\tau\to\infty$. Условие устойчивости (3.2), принимающее в этом случае вид $\theta<(1+EC_0)^{-1}$, совпадает с условием устойчивости из [1, 2].

Замечание 3. Если ядро ползучести является разностным $k(t, \tau)=k(t-\tau)$, то $k_0(t, \tau)=k(t-\tau)$ и $|k_0|=\int k(\tau)d\tau$ (где интегрирование проводится в пределах от 0 до ∞). В этом случае из теоремы 2 следует утверждение, впервые полученное для однородного вязкоупругого стержня, сжатого сосредоточенной силой, в [9].

4. Устойчивость сжато-растянутой консоли. Изучим устойчивость той же консоли, что и в п. 3, предполагая, однако, что сила P — растягивающая. Обозначим через $\lambda_3>0$ минимальное собственное значение краевой задачи $y''-\alpha_1 y+\lambda_3 xy=0$, $y(0)=0$, $y'(l)=0$.

Теорема 3. Пусть выполнены условия (2.9), (2.10), (3.1) и справедливо неравенство

$$\alpha_2<\lambda_3(1-|r_0|) \tag{4.1}$$

Тогда сжато-растянутый стержень устойчив.

Доказательство. Подобно (2.5) или (3.5), справедливо неравенство

$$w_{10}^2(t)\leqslant\lambda_3^{-1}[w_1^2(t)+\alpha_1 w_0^2(t)]=\lambda_3^{-1}N^2(t) \tag{4.2}$$

Прогиб стержня описывается уравнениями (3.3), где α_1 заменено на $-\alpha_1$. Умножая уравнение для прогиба на $z(t, x)$, интегрируя по x в пределах от 0 до l, получим с учетом граничных условий

$$\begin{gathered} N^2(t)=\alpha_2 w_{10}^2(t)+\int_0^l m_1(x)z(t,x)\,dx+S(t) \\ S=\int_0^t d\tau\int_0^l r(t+\rho(x),\ \tau+\rho(x))z'(t,x)z'(\tau,x)\,dx \end{gathered} \tag{4.3}$$

На основании (4.1) можно выбрать такое число $\varepsilon>0$, что $\alpha_2<\lambda_3(1-|r_0|-\varepsilon)$. По найденному ε определим такое $T=T(\varepsilon)>0$, для которого выполняется неравенство (3.8). Представим последнее слагаемое в (4.3) в виде

$$S=\int_0^T d\tau\int_0^l r(t+\rho(x),\ \tau+\rho(x))z'(t,x)z'(\tau,x)\,dx+$$

$$+\int_T^t d\tau\int_0^l [r(t+\rho(x),\tau+\rho(x))-r_0(t,\tau)+r_0(t,\tau)]z'(t,x)z'(\tau,x)\,dx$$

Учитывая еще (3.8), (3.5), (4.2), получим

$$\begin{gathered} (1-\alpha_2\lambda_3^{-1})N^2(t)\leqslant w_1(t)\left[\int_0^T r_1(t,\tau)w_1(\tau)\,d\tau+\varepsilon\omega_1(t)+\right. \\ \left.+\int_T^t r_0(t,\tau)w_1(\tau)\,d\tau+\lambda_1^{-1/2}Q\right] \end{gathered} \tag{4.4}$$

Далее заметим, что

$$w_1\leqslant\sqrt{w_1^2+\alpha_1 w_0^2}=N,\quad w_0^2\leqslant\lambda_1^{-1}w_1^2\leqslant\lambda_1^{-1}N^2 \tag{4.5}$$

Тогда из (4.4) вытекает неравенство

$$(1-\alpha_2\lambda_3^{-1}-|r_0|-\varepsilon)h(t)\leqslant|r_1|h(T)+\lambda_1^{-1/2}Q$$
$$h(t)=\sup_\tau N(\tau)\quad(0\leqslant\tau\leqslant t) \tag{4.6}$$

Из (4.6) видно, что для доказательства устойчивости достаточно оценить $h(T)$ через Q.

Из (4.3), (3.4) и (4.2), используя неравенство Коши — Буняковского, получаем

$$N^2\leqslant\alpha_2\lambda_3^{-1}N^2+w_1(t)\int_0^t r_1(t,\tau)w_1(\tau)d\tau+Qw_0(t)$$

Отсюда и из (4.5) вытекает оценка

$$N(1-\alpha_2\lambda_3^{-1})\leqslant\int_0^t r_1(t,\tau)N(\tau)d\tau+\lambda_1^{-1/2}Q \tag{4.7}$$

Преобразуем это неравенство подобно (3.12), т. е. проитерируем его n раз; возведем далее обе части полученного неравенства в квадрат и используем лемму Гроноулла — Беллмана. Тогда, подобно (3.14), убеждаемся в существовании такой постоянной c_3, что $h(T)\leqslant c_3Q$. Отсюда и из (4.6) следует, что $h(t)\leqslant c_4Q$. Используя теперь оценки вида (2.8), устанавливаем справедливость теоремы 3.

Изложенная при доказательстве теорем 1—3 методика может быть использована для получения условий устойчивости и в иных ситуациях. Приведем их, ограничиваясь лишь постановкой задачи и формулировкой результата.

5. Устойчивость стержня при других типах опирания концов. Ниже приводятся условия устойчивости стержня при следующих граничных условиях:

$$y(t,0)=y'(t,0)=y(t,l)=y'(t,l)=0$$
$$y(t,0)=y'(t,0)=y(t,l)=y''(t,l)=0 \tag{5.1}$$
$$y(t,0)=y''(t,0)=y(t,l)=y''(t,l)=0$$

Прогиб стержня описывается уравнением

$$[(I-R)y'']''+\alpha_1y''=q/(EJ) \tag{5.2}$$

Обозначим через $\lambda>0$ минимальное собственное значение краевой задачи $d^4y/dx^4+\lambda y''=0$ с одним из граничных условий (5.1).

Теорема 4. Пусть выполнены предположения (2.9), (2.10), (3.1) и, кроме того, $\alpha_1<\lambda(1+|k_0|)^{-1}$. Тогда стержень устойчив.

Приведем лишь схему доказательства, которое подобно доказательству теорем 2, 3. Представим уравнение (5.2) в виде

$$\partial^4y/\partial x^4=(I+K_0)\{-\alpha_1y''+(\partial^2/\partial x^2)[(R-R_0)y'']+q/(EJ)\} \tag{5.3}$$

Выберем и зафиксируем такие числа $\varepsilon>0$ и $T(\varepsilon)>0$, что выполнено неравенство (3.8) при $t\geqslant T$ и $\lambda-(\alpha_1+\varepsilon)(1+|k_0|)>0$. Умножим обе части уравнения (5.3) на $y(t,x)$ и проинтегрируем по x от 0 до l. Аналогично выводу (3.10) заключаем, что

$$[\lambda-(1+|k_0|)(\alpha_1+\varepsilon)]v_2(t)\leqslant(1+|k_0|)\Bigg[(|r_0|+|r_1|)v_2(T)+ \tag{5.4}$$
$$+\left(\lambda^{-1}E^{-2}J^{-2}\int_0^l q^2\,dx\right)^{1/2}\Bigg]$$

Оценка $v_2(T)$ через q осуществляется подобно выводу (3.14). При этом получается

$$v_2(T) \leqslant c_5 \left[\int_0^l q^2(x)\,dx \right]^{1/2}$$

Отсюда и из (5.4) вытекает справедливость теоремы 4. Кроме того, для каждого из рассмотренных стержней справедливо замечание 1 к теореме 2 и теорема 3.

6. Однопараметрическое нагружение. Однопараметрической нагрузкой называется продольная нагрузка, при которой нормальная сила N_1 в каждом сечении стержня определяется выражением $N_1 = aN_0(x)$, где $N_0(x)$ — заданная кусочно-непрерывная функция. Уравнение равновесия стержня записывается в виде $EJ[(I-R)y'']'' + a[N_0(x)y']' = q$ с граничными условиями (5.1).

В этом случае справедлива теорема 4 при $\alpha_1 = a/(EJ)$ и λ, являющимся минимальным собственным значением краевой задачи

$$d^4y/dx^4 + \lambda(N_0y')' = 0 \tag{6.1}$$

с одним из граничных условий (5.1).

Замечание 1. Если модуль упругости E и параметр a — функции времени, удовлетворяющие условиям $E(t+\rho(x)) \geqslant E_1(t)$, $\lim E(t+\rho(x)) = E_0$, $\lim a(t) = a_0$, $t \to \infty$, то теорема 4 справедлива при $\alpha_1 = a_0/(E_0J)$ и минимальном $\lambda > 0$, которое соответствует уравнению (6.1), причем в каждый момент времени $a(t) < \lambda JE_1(t)$.

7. Армированный стержень. Приведем условия устойчивости изученных выше стержней при дополнительном предположении, что они армированы упругим материалом с модулем упругости E_a. Поперечное сечение стержня имеет две оси симметрии, арматура располагается симметрично относительно этих осей. Пусть J_a — момент инерции арматуры. Напряжение σ_a и деформация ε_a в арматуре связаны законом Гука $\sigma_a = E_a\varepsilon_a$. Изгибающий момент $M(t, x)$ определяется выражением

$$\begin{gathered} M(t, x) = -EJ_0(I - \beta R)y'' \\ J_0 = (EJ + E_aJ_a)/E, \quad \beta = J/J_0 \end{gathered} \tag{7.1}$$

Сравнивая выражения (7.1) и (1.3), заключаем, что справедлива следующая

Теорема 5. Условия устойчивости армированного стержня совпадают с условиями устойчивости неармированного стержня с модулем упругомгновенной деформации E, моментом инерции J_0 и ядром релаксации βr, где J_0 и β определяются выражениями в (7.1).

Пусть ядро релаксации основного материала армированного стержня имеет вид

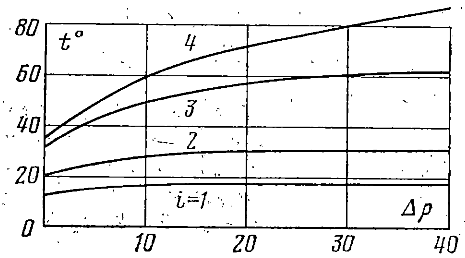
$$r(t,\tau) = -\gamma E \frac{\partial}{\partial \tau} \left\{ \varphi(\tau) \int_\tau^t \exp\left[-\int_\tau^z \gamma(1 + E\varphi(s))\,ds \right] dz \right\}$$

Предельное ядро релаксации $r_0(t, \tau) = \gamma EC_0 \exp[-\gamma(1+EC_0)(t-\tau)]$. Поэтому предельное ядро ползучести k_0, соответствующее ядру релаксации βr_0, имеет вид

$$k_0(t, \tau) = \beta\gamma EC_0 \exp[-\gamma(1 + (1-\beta)EC_0)(t-\tau)]$$

Значит, $|k_0| = \beta EC_0[1 + (1-\beta)EC_0]^{-1}$. Отсюда и из теоремы 5 вытекает, что армированный стержень устойчив, если сжимающая сила $P < P_0[1 + (1-\beta)EC_0](1+EC_0)^{-1}$, где P_0 — критическая сила потери устойчивости упругого стержня с модулем упругости E и моментом инерции J_0 (т. е. с жесткостью $EJ_0=EJ+E_aJ_a$).

Замечание. Утверждения теорем 1—5 сохраняют свою силу и в задаче устойчивости по отношению к возмущениям начальной погиби $y_0(x)$ в следующем смысле: стержень называется устойчивым, если для любого $\varepsilon>0$ найдется такое $\delta=\delta(\varepsilon)>0$, что для любой начальной погиби $y_0(x)$, $\sup_x|y_0(x)|<\delta$ соответствующий ей прогиб $y(t, x)$ удовлетворяет неравенству (1.2).



Фиг. 2

Предполагается, что функция $y_0(x)$ удовлетворяет соответствующим граничным условиям (2.2), (5.1).

Установленные выше достаточные условия устойчивости являются и необходимыми для разностных ядер ползучести и ядер, удовлетворяющих требованию (2.9) с разностным ядром $r_0(t-\tau)$. Ограничимся случаем консольного однородного вязкоупругого стержня под действием сжимающей силы P с ядром ползучести $k(t-\tau)$, $|k|<\infty$. Если поперечная нагрузка $q(x)\geqslant 0$, то прогиб стержня $y(t, x)$ имеет предел $y_1(x)=\lim y(t, x)$, $t\to\infty$, удовлетворяющий граничным условиям (2.2) и уравнению $y_1''+\alpha_1(1+|k|)y_1=-(1+|k|)m(x)$. Следовательно, функция $y_1(x)$ представляет собой прогиб упругого стержня, условие устойчивости которого $\alpha_1(1+|k|)<\lambda_1$ совпадает с условием (2.3).

8. Устойчивость на конечном интервале времени. Пусть поведение стержня исследуется на конечном интервале времени $[0, T]$ и задано критическое значение прогиба $y°$. Критическое время $t°$ определяется как момент первого достижения прогибом величины $y°$:

$$\sup_{t,x}|y(t, x)|<y° \quad (0\leqslant t<t°) \quad \sup_x|y(t°, x)|=y°$$

Стержень называется устойчивым на интервале $[0, T]$, если $t°>T$. Подобно [1—4], используя соотношения (2.7), (3.13), (4.7) и (2.8), можно получить некоторые оценки критического времени $t°$.

Для исследования зависимости критического времени от возраста материала были проведены численные расчеты для стержня при граничных условиях первого типа в (5.1). На стержень действует сжимающая сила P и распределенная поперечная нагрузка постоянной интенсивности q. Стержень состоит из двух равных частей. Возраст одной части постоянен $\rho_1=5$ сут, а возраст второй части ρ_2 варьировался от 5 до 50 сут. Для численного исследования были выбраны следующие значения параметров: $E=2\cdot 10^4$ МПа, $\varphi(\tau)=A_1+A_2/\tau$, $A_1=0{,}238\cdot 10^{-4}$ МПа$^{-1}$, $A_2=1{,}85\cdot 10^{-4}$ МПа$^{-1}\cdot$сут, $Pl^2/(EJ)=0{,}1$.

Зависимость критического времени от разности возрастов различных частей $\Delta\rho=\rho_2-\rho_1$ представлена на фиг. 2 (размерность $t°$ и $\Delta\rho$ — сут). Кривые с номером i соответствуют максимально допустимому значению прогиба $y_i°$, равному $1{,}5y_0$ при $i=1$; $1{,}7y_0$ при $i=2$; $1{,}9y_0$ при $i=3$; $1{,}95y_0$ при $i=4$, где y_0 — максимальное значение прогиба в момент приложения внешней нагрузки.

Результаты численного исследования свидетельствуют о том, что при возрастании величины $\Delta\rho$ критическое время увеличивается. Увеличение критического времени происходит тем интенсивнее, чем больше величина максимально допустимого значения прогиба.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Арутюнян Н. Х., Колмановский В. Б.* Об устойчивости неоднородно-стареющих вязкоупругих стержней.– ПММ, 1979, т. 43, вып. 4, с. 709–721.

2. *Арутюнян Н. Х., Колмановский В. Б.* Об устойчивости неоднородно-вязкоупругих стержней.– Изв. АН АрмССР. Механика, 1980, т. 33, № 4, с. 26–37.
3. *Арутюнян Н. Х., Колмановский В. Б.* Об устойчивости сжато-растянутых неоднородно-вязкоупругих армированных стержней.– Докл. АН СССР, 1981, т. 258, № 6, с. 1334–1336.
4. *Арутюнян Н. Х., Колмановский В. Б.* Об устойчивости неоднородно-вязкоупругих армированных стержней.– ПММ, 1981, т. 45, вып. 6, с. 1110–1120.
5. *Арутюнян Н. Х.* Некоторые задачи теории ползучести для неоднородно-стареющих тел.– Изв. АН СССР. МТТ, 1976, № 3, с. 153–164.
6. *Коллатц Л.* Задачи на собственные значения. М.: Наука, 1968. 503 с.
7. *Смирнов В. И.* Курс высшей математики. Т. 4. М.: Гостехиздат, 1953. 804 с.
8. *Папкович П. Ф.* Строительная механика корабля. Ч. 2. Л.: Судпромгиз, 1941. 618 с.
9. *Работнов Ю. Н.* Элементы наследственной механики твердых тел. М.: Наука, 1977. 383 с.

Москва

Поступила в редакцию
25.I.1983