МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 2 · 1984

УДК 624.07:534.1

КИНЕМАТИЧЕСКОЕ УПРАВЛЕНИЕ ДВИЖЕНИЕМ УПРУГОЙ СИСТЕМЫ

АКУЛЕНКО Л. Д., БОЛОТНИК Н. Н.

На фиксированном интервале времени исследуется задача оптимального управления простым движением (вращением или поступательным перемещением) колебательной системы с распределенными параметрами. Система предполагается стационарной и однородной, т. е. имеет постоянные жесткостные и инерционные характеристики. В качестве механической модели рассматривается однородная упругая система типа вала или бруса (распределенной пружины). Один из концов системы свободный, а к другому приложено управляющее воздействие кинематического типа, приводящее к заданному изменению скорости вращения или перемещения.

Ставится задача выбором управляющей функции, зависящей от времени и начального распределения упругой системы, привести ее из произвольного начального состояния в заданное конечное. За критерий качества управления принимается интегральный квадратичный функционал. Такая постановка позволяет построить управление в широком классе интегрируемых с квадратом кусочно-гладких функций.

Решение задачи оптимального управления строится при помощи методов математической физики решением соответствующей проблемы моментов. Управление находится в явном виде на основе известных функций начального и конечного распределений. Рассматривается обобщение задачи управления с учетом возмущающих факторов.

1. На ограниченном фиксированном интервале времени $t\in[t_0, T]$ рассматривается двухточечная задача оптимального управления движением однородной распределенной колебательной системы типа вала или бруса с постоянными инерционной ρ и упругой c характеристиками [1, 2] (см. фигуру). В качестве управляющего воздействия принимается скорость $v(t)$ изменения положения (углового или линейного) левого конца системы, $x=0$; правый конец, $x=l$, предполагается свободным. Движение такой системы в первом (линейном) приближении описывается уравнением и краевыми условиями вида [1—3]:

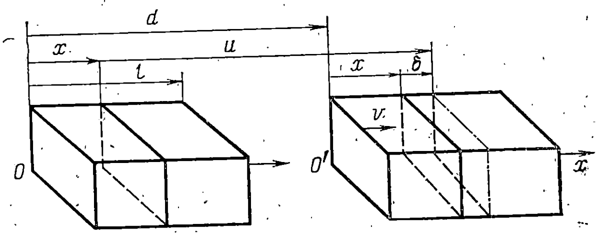
$$\rho u^{\cdot\cdot}=cu'', \quad u=u(t, x), \quad x\in(0, l); \quad d^{\cdot}=v, \quad d(t)\equiv u(t, 0),$$
$$u'(t, l)=0, \quad t\in[t_0, T] \qquad (1.1)$$

Здесь u — абсолютное отклонение или смещение в момент времени t сечения (угловое или линейное), имеющего в относительной системе $O'x$ лагранжеву координату x: $u(t, x)=d(t)+\delta(t, x)$, где δ — чисто упругое смещение; абсолютная координата сечения x равна $x+u(t, x)$. Точками вверху обозначены производные по времени t, а штрихами — по координате x. Функция $v(t)$ есть неизвестное управляющее воздействие, выбором которого система (1.1) должна быть переведена из произвольного начального (при $t=t_0$) состояния в заданное конечное (при $t=T$, $T<\infty$). Соответствующие условия в начале и конце процесса управления имеют вид

$$u(t_0, x)=f^\circ(x), \quad u^{\cdot}(t_0, x)=g^\circ(x), \quad u(T, x)=f^T(x), \quad u^{\cdot}(T, x)=g^T(x) \qquad (1.2)$$

Конечные условия (1.2) довольно общие: они позволяют рассмотреть ряд задач управления движением упругой системы (1.1), представляющих интерес для приложений. В частности, можно поставить задачу о приведении вала или стержня в состояние равномерного движения как целого, без относительных колебаний: $u(T, x)\equiv\xi$, $u^{\cdot}(T, x)\equiv\eta$, ξ, $\eta=\mathrm{const}$, $(f^T(x)\equiv f^T(0)=\xi,\ g^T(x)\equiv g^T(0)=\eta)$.

В общем случае финальные условия (1.2), налагаемые на u, $u^{\cdot}$ при $t=T$, могут быть заданы как конечная или счетная система функционалов от $u(T, x)$, $u^{\cdot}(T, x)$, $x\in[0, l]$. Например, возможна ситуация, когда одно из



этих условий опущено. Далее для определенности рассматривается задача управления вида (1.1), (1.2).

Требуется построить такое допустимое управление $v(t)$, $t_0\leqslant t\leqslant T$, для которого существует решение «двухточечной» (по t) задачи (1.1), (1.2), чтобы достигал минимума квадратический функционал

$$J[v]=\int_{t_0}^{T} v^2(t)\,dt\to\min_v,\quad |v|<\infty,\quad J<\infty \tag{1.3}$$

Таким образом, управляющая функция $v(t)$, $t\in[t_0, T]$ выбирается из достаточно широкого класса кусочно-гладких, интегрируемых с квадратом функций.

Задачи управления колебательными системами с распределенными характеристиками, описываемыми уравнениями математической физики гиперболического типа [3], актуальны для приложений. Они были предметом исследований работ [4–8] и др. Следует отметить, что точные аналитические решения удается построить в редких случаях для модельных задач, аналогичных рассматриваемой. На основе этих решений представляется возможным методами теории возмущений [9] исследовать существенно более общие управляемые колебательные системы (см. ниже п. 3, а также [10]). В [8] исследована аналогичная рассматриваемой задача оптимального управления, в которой управление на левой границе, $x=0$, осуществляется посредством силового воздействия F, т. е. $cu'(t, 0)=-F(t)$. Однако для некоторых систем управления ограниченной мощности, например элктроприводов, обладающих достаточно жесткими характеристиками, с достаточной степенью точности можно считать, что управление осуществляется по скорости перемещения границы, т. е. является кинематическим, как принято в (1.1). Практически для этого достаточно, чтобы время переходного процесса системы управления было малым по сравнению с периодом колебаний основного тона $4(\rho l^2/c)^{1/2}$.

Выражения (1.1)–(1.3) могут быть обезразмерены и упрощены таким образом, чтобы $c/\rho=1$, $l=1$, $t_0=0$. Для этого нужно выполнить линейные преобразования размерных переменных по формулам: $t_*=\nu(t-t_0)$, $\nu^2=c/\rho l^2$, $t_*\in[0, T_*]$, $T_*=\nu(T-t_0)$, $x_*=x/l$, $x_*\in[0, 1]$, $u_*=u/L$, $d_*=d/L$, $f_*^{0,T_*}(x_*)=f^{0,T}(x_*l)/L$, $g_*^{0,T_*}(x_*)=g^{0,T}(x_*l)/\nu L$, $v_*(t_*)=v(t_0+t_*/\nu)/\nu L$, $J_*[v_*]=J[v/\nu L]/\nu L^2$. Здесь L — характерная величина размерности переменной u (например, длины или угла). Для сокращения записи нижний индекс $*$ далее опускается: задача оптимального управления имеет вид (1.1)–(1.3), где $c=\rho=l=1$, $t_0=0$.

2. Для заданной функции $v(t)$ решение $u(t, x)$ краевой задачи (1.1) с начальными условиями (1.2) может быть построено при помощи метода Фурье в виде суперпозиции членов $\bar u=\theta(t)X(x)$. Подстановка этого выражения в уравнение (1.1) и разделение переменных позволяет с учетом краевых условий построить ортогональную систему собственных функций $\{X_n(x)\}$, $x\in[0, 1]$ и найти собственные значения λ_n; в результате искомая функция $u(t, x)$ равна

$$u(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\theta_n(t)X_n(x), \quad t\in[0,T]; \quad X_n(x)=\sin\lambda_n x, \quad x\in[0,1],$$

$$\lambda_n=(n-{}^1/_2)\pi \quad {}_{(n=1,2,\ldots)} \tag{2.1}$$

Здесь $\theta_n(t)$ — неизвестные пока функции, выражения для которых могут быть получены при помощи приема [11] или другим способом (см. [3]). Способ, предложенный в [11], быстрее приводит к искомой системе уравнений для θ_n. Он заключается в том, что ряд (2.1) подставляется в левую часть уравнения состояния (1.1), затем равенство умножается на X_n и проводится его интегрирование по x на интервале $x\in[0, 1]$. Интегрирование левой части элементарно и дает ${}^1/_2\theta_n^{\cdot\cdot}$. Для правой части оно проводится по частям с учетом краевых условий. В результате получается выражение $\lambda_n u(t, 0)-{}^1/_2\lambda_n^2\theta_n$, а задача оптимального управления движением распределенной колебательной системы (1.1)—(1.3) приводится к соответствующей задаче управления для счетной системы обыкновенных дифференциальных уравнений с начальными и конечными условиями

$$\theta_n^{\cdot\cdot}+\lambda_n^2\theta_n=2\lambda_n d \quad {}_{(n=1,2,\ldots)}, \qquad d^{\cdot}=v, \quad t\in[0, T] \tag{2.2}$$

$$\theta_n(0)=f_n^{\circ}, \quad \theta_n^{\cdot}(0)=g_n^{\circ}, \quad d(0)=f^{\circ}(0), \quad \theta_n(T)=f_n^T,$$
$$\theta_n^{\cdot}(T)=g_n^T, \quad d(T)=f^T(0) \tag{2.3}$$

и функционалом (1.3). Здесь $f_n^{\circ,T}$, $g_n^{\circ,T}$ — коэффициенты Фурье функций $f^{0,T}(x)$, $g^{0,T}(x)$ (1.2) по системе $\{X_n(x)\}$ (2.1).

Интегрирование уравнений (2.2) с учетом начальных условий (2.3) дает для искомых функций θ_n, $\theta_n^{\cdot}$, d представления

$$\theta_n(t)=2\lambda_n^{-1}f^{\circ}(0)\,(1-\cos\lambda_n t)+\frac{2}{\lambda_n}\int_0^t v(\tau)\,[1-\cos\lambda_n(t-\tau)\,]\,d\tau+$$
$$+f_n^{\circ}\cos\lambda_n t+g_n^{\circ}\lambda_n^{-1}\sin\lambda_n t \tag{2.4}$$

$$\theta_n^{\cdot}(t)=2f^{\circ}(0)\sin\lambda_n t+2\int_0^t v(\tau)\sin\lambda_n(t-\tau)\,d\tau-\lambda_n f_n^{\circ}\sin\lambda_n t+g_n^{\circ}\cos\lambda_n t$$

$${}_{(n=1,2,\ldots)}, \quad d(t)=f^{\circ}(0)+\int_0^t v(\tau)\,d\tau$$

Применение к задаче оптимального управления движением колебательной системы, описываемой счетной системой (2.2), (2.3), принципа максимума приводит аналогично [4, 7, 8] к выражению для $v(t)$:

$$v(t)=r_0+r(t), \quad r(t)=\sum_{n=1}^{\infty}(A_n\sin\lambda_n t+B_n\cos\lambda_n t)$$

$$(r_0,\ A_n,\ B_n-\mathrm{const}) \qquad v(t+4)=v(t), \qquad r(t+2)=-r(t) \tag{2.5}$$

Здесь r_0, A_n, B_n — неизвестные постоянные, подлежащие определению из конечных условий (2.3). Для построения оптимального управления согласно (2.5) достаточно определить постоянную r_0 и функцию $r(t)$ на интервале $t\in[0, 2]$.

Подстановка (2.5) в (2.4) и использование конечных условий (2.3) приводит с учетом выражения для v к следующей бесконечномерной проблеме моментов [7, 8]:

$$\int\limits_0^T v(\tau)\cos\lambda_n\tau\,d\tau=\frac{1}{2}\lambda_n f_n{}^\circ-f^\circ(0)+f^T(0)\cos\lambda_n T-{}^1\!/_2\lambda_n f_n{}^T\cos\lambda_n T+$$
$$+{}^1\!/_2 g_n{}^T\sin\lambda_n T\equiv c_n$$

$$\int\limits_0^T v(\tau)\sin\lambda_n\tau\,d\tau=\frac{1}{2}g_n{}^\circ+f^T(0)\sin\lambda_n T-\frac{1}{2}\lambda_n f_n{}^T\sin\lambda_n T-$$
$$-\frac{1}{2}g_n{}^T\cos\lambda_n T\equiv s_n \tag{2.6}$$

$$\int\limits_0^T v(\tau)\,d\tau=f^T(0)-f^\circ(0)\equiv d_0$$

Далее для решения поставленной проблемы моментов развивается прием, изложенный в [7] (см. также [8]). Величина интервала времени T представляется в виде

$$T=2N+\Theta,\qquad N=0,\ 1,\ 2,\dots,\qquad 0\leqslant\Theta<2 \tag{2.7}$$

Тогда первые две последовательности соотношений (2.6) запишутся следующим образом:

$$\int\limits_0^2 R(\tau)\cos\lambda_n\tau\,d\tau=-\frac{r_0}{\lambda_n}\sin\lambda_n T+c_n$$

$$\int\limits_0^2 R(\tau)\sin\lambda_n\tau\,d\tau=-\frac{r_0}{\lambda_n}(1-\cos\lambda_n T)+s_n\quad {\scriptstyle (n=1,2,\dots)} \tag{2.8}$$

Здесь введено обозначение

$$R(t)=(N+1)r(t),\quad t\in[0,\ \Theta];\qquad R(t)=Nr(t),\quad t\in(\Theta,\ 2] \tag{2.9}$$

и использованы тождества (см. (2.5)):

$$\int\limits_0^T r(\tau)\begin{Bmatrix}\cos\lambda_n\tau\\ \sin\lambda_n\tau\end{Bmatrix}d\tau=\int\limits_0^2 R(\tau)\begin{Bmatrix}\cos\lambda_n\tau\\ \sin\lambda_n\tau\end{Bmatrix}d\tau$$

Система функций $\cos\lambda_n t$, $\sin\lambda_n t$, $n\geqslant1$ является полной ортонормированной системой на интервале $t\in[0,\ 2]$. При помощи представлений (2.8) для коэффициентов ряда Фурье функция $R(t)$ может быть получена на основе выражений $f^{0,T}(x)$, $g^{0,T}(x)$, $x\in[0,\ 1]$ через неизвестный пока параметр r_0.

На основе (2.5), (2.9) функции $R(t)$, $r(t)$ могут быть продолжены на интервал $t\in(2,4]$. При $N\geqslant1$ искомая функция $r(t)$ однозначно определяется из (2.9):

$$r(t)=(N+1)^{-1}R(t),\quad t\in[0,\ \Theta];\qquad r(t)=N^{-1}R(t),\quad t\in(\Theta,\ 2] \tag{2.10}$$

Подстановка $r(t)$ из (2.10) в последнее условие (2.6) приводит к линейному уравнению относительно r_0. Случай $N=0$ требует дополнительного рассмотрения.

Пусть $N\geqslant1$. Тогда имеет место представление функции $R(t)$ в виде ряда Фурье по полной ортонормированной на промежутке $t\in[0,\ 2]$ системе функций $\{\cos\lambda_n t,\ \sin\lambda_n t\}$ (см. [12]). Этот ряд записывается в виде суммы нескольких рядов

$$R(t)=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}F^{\circ}(t)+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}F^{T}(\sigma)+\frac{1}{2}G^{\circ}(t)+$$
$$+\frac{1}{2}G^{T}(\sigma)-r_0\Psi(t,\sigma)\equiv S(t,\sigma)-r_0\Psi(t,\sigma),\quad \sigma=T-t,\quad t\in[0,2] \tag{2.11}$$

$$F^{\circ,T}(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[f_n^{\circ,T}-\frac{2}{\lambda_n}f^{\circ,T}(0)\right]\sin\lambda_n s,\quad G^{\circ,T}(s)=\sum_{n=1}^{\infty}g_n^{\circ,T}\sin\lambda_n s,\quad s=t,\sigma$$
$$\Psi(t,\sigma)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n}(\sin\lambda_n t+\sin\lambda_n\sigma) \tag{2.12}$$

Построенные ряды (2.12) имеют представления по системам функций $\sin\lambda_n t$ или $\sin\lambda_n\sigma$, $n=1, 2,\ldots$, аналогичным исходной системе $X_n(x)$, $x\in[0, 1]$ (см. (2.1)). Данное обстоятельство позволяет свернуть ряды (2.12) для $F^{0,T}$, $G^{0,T}$, $t\in[0, 2]$ и выразить их через заданные в (1.2) функции $f^{0,T}(x)$, $g^{0,T}(x)$, $x\in[0, 1]$. Последний в (2.12) ряд для $\Psi(t, \sigma)$, как нетрудно установить, для всех значений $t\in[0, T]$ равен

$$\Psi(t,\sigma)=\frac{1}{2}\left\{\operatorname{sign}\left(2-\left(t-4\left[\frac{t}{4}\right]\right)\right)+\operatorname{sign}\left(2-\left(\sigma-4\left[\frac{\sigma}{4}\right]\right)\right)\right\} \tag{2.13}$$

Здесь и далее выражение $[A]$ означает целую часть числа $A>0$. В (2.13) учтено, что функции $\sin\lambda_n s$ нечетны относительно $s=2$. Таким образом, функция Ψ равна сумме двух периодических релейных функций с периодом, равным четырем. Следует отметить, что при $T\leqslant 2$ функция $\Psi(t, \sigma)\equiv 1$, $t\in[0, T]$.

Ряды (2.12) для $F^{\circ}(t)$, $G^{\circ}(t)$, $t\in[0, 2]$ равны

$$F^{\circ}(t)=F_*^{\circ}(t)\equiv\begin{cases}f^{\circ}(t)-f^{\circ}(0)\\ f^{\circ}(2-t)-f^{\circ}(0)\end{cases},\quad G^{\circ}(t)=G_*^{\circ}(t)\equiv\begin{cases}g^{\circ}(t), & t\in[0,1]\\ g^{\circ}(2-t), & t\in(1,2]\end{cases} \tag{2.14}$$

Здесь используется свойство четности функций $\sin\lambda_n t$ относительно $t=1$. В силу нечетности этих функций относительно значения $t=2$ для значений $t\in(2, 4]$ выражения F_*°, G_*° из (2.14) должны быть продолжены также нечетным образом:

$$F^{\circ}(t)=-F_*^{\circ}(4-t),\qquad G^{\circ}(t)=-G_*^{\circ}(4-t),\qquad t\in(2, 4] \tag{2.15}$$

Если $T>4$, то построенные согласно (2.14), (2.15) функции $F^{\circ}(t)$, $G^{\circ}(t)$ продолжаются периодически

$$F^{\circ}(t)=F^{\circ}\left(t-4\left[\frac{t}{4}\right]\right),\quad G^{\circ}(t)=G^{\circ}\left(t-4\left[\frac{t}{4}\right]\right),\quad t\in[0,T] \tag{2.16}$$

Оказывается, что соотношения (2.14)–(2.16) позволяют записать функции $F^{\circ}(t)$, $G^{\circ}(t)$ для всех $t\in[0, T]$ при $T\geqslant 2$ в виде

$$F^{\circ}(t)=(-1)^{[t/2]}\begin{cases}f^{\circ}\left(t-2\left[\frac{t}{2}\right]\right)-f^{\circ}(0), & [t]=2k\\ f^{\circ}\left(2-\left(t-2\left[\frac{t}{2}\right]\right)\right)-f^{\circ}(0), & [t]=2k-1\end{cases}\quad (k=1,2,\ldots) \tag{2.17}$$

$$G^{\circ}(t)=(-1)^{[t/2]}\begin{cases} g^{\circ}\left(t-2\left[\frac{t}{2}\right]\right), & [t]=2k \\ g^{\circ}\left(2-\left(t-2\left[\frac{t}{2}\right]\right)\right), & [t]=2k-1 \end{cases} \quad (k=1,2,\ldots)$$

Аналогично изложенному строятся функции $F^T(\sigma)$, $G^T(\sigma)$, $\sigma\in[0,\ T]$. Для этого в формулах (2.14)—(2.17) нужно сделать замену аргумента $t\to\sigma$ и заменить верхний индекс 0 на T, т. е.

$$F^T(\sigma)=F_*{}^T(\sigma),\qquad G^T(\sigma)=G_*{}^T(\sigma),\qquad \sigma\in[0,\ 2]$$

$$F^T(\sigma)=-F_*{}^T(4-\sigma),\qquad G^T(\sigma)=-G_*{}^T(4-\sigma),\qquad \sigma\in(2,\ 4]$$

$$F^T(\sigma)=F^T(\sigma-4[\sigma/4]),\qquad G^T(\sigma)=G^T(\sigma-4[\sigma/4]),\qquad \sigma\in[0,\ T],\ T>4 \tag{2.18}$$

Таким образом, выражения (2.12)—(2.18) полностью определяют функцию $R(t)$ (2.11) на всем промежутке времени $t\in[0,\ T]$, $T\geqslant2$. Следует отметить, что если функции $f^{0,T}(x)$, $x\in[0,\ 1]$ гладкие, то ряды (2.12) для $F^{\circ}(t)$, $F^T(\sigma)$ представляют собой кусочно-дифференцируемые функции: в точках t, $\sigma=1,\ 2,\ldots$ соответственно возможны лишь конечные разрывы (первого рода) производных $F^{\circ\cdot}$, $F^{T\cdot}$.

Для определения неизвестной постоянной r_0 в $R(t)$ (2.11) используется последнее соотношение (2.6), а также свойство нечетности $r(t)$ (и $R(t)$) относительно точек $t=2+4k$, $k=1,\ 2,\ldots$. В результате подстановки выражения (2.11) для $R(t)$ с учетом (2.12)—(2.18) в (2.10), а затем (2.5) в (2.6) и группировки членов, для неизвестной r_0 получается соотношение

$$r_0\left[T-\int_0^T\Psi_*(t,\sigma)\,dt\right]=d_0-\int_0^T S_*(t,\sigma)\,dt \tag{2.19}$$

Функции $\Psi(t,\ \sigma)$, $S(t,\ \sigma)$ и $\Psi_*(t,\ \sigma)$, $S_*(t,\ \sigma)$ связаны между собой так же, как $R(t)$ и $r(t)$ (см. (2.10)).

При условии $T>2$ коэффициент при r_0 в (2.19) строго положителен, а корень $r_0{}^*$ определяется однозначно. Если же $T=2$, то согласно (2.13) функция $\Psi(t,\ \sigma)\equiv1$, $t\in[0,\ 2]$ и указанный коэффициент обращается в нуль. В этом случае решение проблемы моментов (2.5), (2.6) существует, а вместе с ним и решение задачи оптимального управления (1.1)—(1.3), если функции $f^{0,T}(x)$, $g^{0,T}(x)$, $x\in[0,\ 1]$ таковы, что правая часть уравнения (2.19) равна нулю; это и будет предполагаться для $T=2$. Итак, в рассмотренных выше случаях управление $v^*(t)$ определяется соотношениями (2.5), (2.10)—(2.18) вполне однозначно и имеет вид

$$v^*(t)=r_0{}^*+\begin{cases}(N+1)^{-1}[S(t,\sigma)-r_0{}^*\Psi(t,\sigma)] & t\in[0,\Theta]\\ N^{-1}[S(t,\sigma)-r_0{}^*\Psi(t,\sigma)], & t\in(\Theta,2]\end{cases}$$

$$v^*(t)=r_0{}^*-\begin{cases}(N+1)^{-1}[S(t,\sigma)-r_0{}^*\Psi(t,\sigma)], & t\in(2,2+\Theta]\\ N^{-1}[S(t,\sigma)-r_0{}^*\Psi(t,\sigma)], & t\in(2+\Theta,4]\end{cases}$$

$$v^*(t+4)=v^*(t),\qquad t,\ T>4 \tag{2.20}$$

Следует отметить, что если $T=2$, коэффициент при $r_0{}^*$ (см. верхнее выражение) обращается в нуль тождественно по t.

Случай $T<2$, т. е. $T=\Theta$, $N=0$ (см. (2.7)), также может быть исследован при помощи изложенного подхода. Для этого функция $v(t)$ в соотношениях проблемы моментов (2.6) на интервале $t\in(\Theta,\ 2]$ доопределяется тождественным нулем

$$v_*(t)=v(t),\qquad t\in[0,\ \Theta];\qquad v_*(t)\equiv0,\qquad t\in(\Theta,\ 2] \tag{2.21}$$

$$\int_0^2 v_*(\tau)\cos\lambda_n\tau\,d\tau=c_n,\quad \int_0^2 v_*(\tau)\sin\lambda_n\tau\,d\tau=s_n,\quad \int_0^2 v_*(\tau)\,d\tau=d_0$$

Задача (2.21) разрешима, если коэффициенты Фурье c_n, s_n, $n\geqslant 1$ таковы, что указанное тождество выполняется для некоторого значения r_0. При этом должно быть выполнено также условие обращения в нуль правой части уравнения (2.19). Тогда управление $v^*(t)$ согласно (2.20) равно $S(t, \sigma)$.

Таким образом, оптимальное управление $v^*(t)$, $t\in[0, T]$ построено в виде программы (2.20). Согласно принципу оптимальности оно может быть представлено в форме синтеза, если в выражениях (2.20) сделать замены: $t\to 0$, $T\to T-t$, $f^\circ(x)\to u(t, x)$, $g^\circ(x)\to u^\cdot(t, x)$. Две последние замены означают, что коэффициенты Фурье c_n, s_n и параметр d_0 в (2.6) отвечают текущему распределению упругих смещений и скоростей.

На основе известной управляющей функции $v^*(t)$, $t\in[0, T]$ находятся коэффициенты Фурье $\theta_n(t)$, $\theta_n^\cdot(t)$ (2.4) решения $u(t, x)$ (2.1) и его производной $u^\cdot(t, x)$. При этом, аналогично (2.12)–(2.17), проводится свертка рядов Фурье [7, 8].

Выражения для управляющей функции $v^*(t)$, $t\in[0, T]$ существенно упрощаются, если в (2.7) величина $\Theta=0$, т. е. $T=2N$, так как в этом случае $v^*(t)=r_0^*+N^{-1}R(t)$, а выражения для функций $\Psi(t, \sigma)$ (2.13), $S(t, \sigma)$ (2.11)–(2.18) и постоянной r_0^* из (2.19) определяются более просто.

3. Представляют определенный интерес в прикладном и теоретическом аспектах следующие обобщения задачи оптимального управления, рассмотренной выше в пп. 1, 2.

1°. Изложенный выше подход к построению оптимального управления можно перенести на более общий случай, когда упругая система (1.1) подвержена известным распределенным $p(t, x)$ и сосредоточенным на левом и правом концах $q(t)$, $h(t)$ воздействиям, т. е.

$$\begin{gathered} u^{\cdot\cdot}=u''+p(t, x),\quad u=u(t, x),\quad x\in(0, 1)\\ d^\cdot=v+q(t),\quad u'(t, 1)=h(t),\quad t\in[0, T] \end{gathered}\tag{3.1}$$

Условия в начале и конце процесса управления (1.2) и функционал (1.3) сохраняют прежний вид. Тогда в предположении достаточной гладкости функции $p(t, x)$ по x, $x\in(0, 1)$ при помощи метода Фурье и приема [11, см. п. 2] счетная система уравнений для $\theta_n(t)$ и $u(t, 0)$ типа (2.2) записывается следующим образом:

$$\begin{gathered} \theta_n^{\cdot\cdot}+\lambda_n^2\theta_n=2\lambda_n d+2(-1)^{n+1}h(t)+2P_n(t)\\ d^\cdot=v+q(t),\quad t\in[0, T]\quad (d(t)\equiv u(t, 0)) \end{gathered}\tag{3.2}$$

Начальные и конечные условия для θ_n, $\theta_n^\cdot$ и d имеют вид (2.3). Интегрирование системы (3.2) с учетом начальных условий и интегрирования по частям выражений, содержащих d, дает

$$\theta_n(t)=\frac{2}{\lambda_n}\int_0^t[v(\tau)+q(\tau)]\cos\lambda_n(t-\tau)\,d\tau+\frac{2}{\lambda_n}\int_0^t[(-1)^{n+1}h(\tau)+$$

$$+P_n(\tau)]\sin\lambda_n(t-\tau)\,d\tau+2\lambda_n^{-1}f^\circ(0)(1-\cos\lambda_n t)+f_n^\circ\cos\lambda_n t+g_n^\circ\lambda_n^{-1}\sin\lambda_n t$$

$$\theta_n^\cdot=\frac{d\theta_n}{dt},\quad d(t)=f^\circ(0)+\int_0^t[v(\tau)+q(\tau)]\,d\tau\tag{3.3}$$

Оптимальное управление $v(t)$ сохраняет вид (2.5), а соотношения

(2.6) проблемы моментов записываются следующим образом:

$$\int_0^T v(\tau)\cos\lambda_n\tau\,d\tau=c_n-\int_0^T[(-1)^{n+1}h(\tau)+P_n(\tau)]\sin\lambda_n\tau\,d\tau-\int_0^T q(\tau)\cos\lambda_n\tau\,d\tau$$

$$\int_0^T v(\tau)\sin\lambda_n\tau\,d\tau=s_n+\int_0^T[(-1)^{n+1}h(\tau)+P_n(\tau)]\cos\lambda_n\tau\,d\tau+\int_0^T q(\tau)\sin\lambda_n\tau\,d\tau \tag{3.4}$$

$$\int_0^T v(\tau)\,d\tau=d_0-\int_0^T q(\tau)\,d\tau \quad (n=1,2,\ldots)$$

Дальнейшие построения проводятся аналогично п. 2. Для функции $R(t)$, как и выше, можно получить представление

$$R(t)=S(t,\ \sigma)-r_0\Psi(t,\ \sigma)+H(t)-Q(t),\quad \sigma=T-t$$

$$H(t)=\int_0^T\sum_{n=1}^{\infty}\sin\lambda_n(t-\tau)[(-1)^{n+1}h(\tau)+P_n(\tau)]\,d\tau \tag{3.5}$$

$$Q(t)=\int_0^T\sum_{n=1}^{\infty}\cos\lambda_n(t-\tau)\,q(\tau)\,d\tau=q(t)$$

Аналогичным образом ряды для $H(t)$ можно записать в более компактном виде через исходные функции h, p:

$$\int_0^T\Big[\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\sin\lambda_n(t-\tau)\Big]h(\tau)\,d\tau=\int_0^T\delta\left(t-\tau-1-2\left[\frac{t-\tau-1}{2}\right]\right)h(\tau)\,d\tau \tag{3.6}$$

$$\int_0^T\sum_{n=1}^{\infty}P_n(\tau)\sin\lambda_n(t-\tau)\,d\tau=\int_0^T P(t-\tau,\tau)\,d\tau,\quad t\in[0,T]$$

$$P(\sigma,\tau)=P_*(\sigma,\tau)=\begin{cases}p(\sigma,\tau), & \sigma\in[0,1]\\ p(2-\sigma,\tau), & \sigma\in(1,2]\end{cases},\quad P(\sigma,\tau)=-P_*(4-\sigma,\tau),\quad \sigma\in(2,4]$$

$$P(\sigma+4,\ t)=P(\sigma,\ t),\quad t,\ T>4$$

Далее на основе известной функции $R(t)$, $t\in[0,\ T]$ строится оптимальное управление $v^*(t)$ в виде (2.20) и соответствующее ему движение $u(t,\ x)$, $u^{\cdot}(t,\ x)$, $d(t)$ по формулам (3.3), (2.1).

Представляет некоторый теоретический интерес построение оптимальных управлений, когда на упругий объект воздействуют также и распределенные управляющие сила или момент сил [8]. Практическая реализация таких управлений, по-видимому, представляет значительные трудности.

2°. Существенный прикладной интерес представляет проблема приближенного решения возмущенных задач управления, когда рассматриваемый упругий объект является слабо неоднородным, т. е. линейная плотность $\rho(x)$ и жесткость $c(x)$ мало отличаются от постоянных. Кроме того, уравнение типа (1.1) или (3.1) может содержать малую нелинейную добавку, т. е. исследуемая колебательная система с распределенными параметрами слабо нелинейна. Эти предположения после соответствующей нормировки, как в п. 1, можно формализовать в виде уравнения с малым параметром $\mu (\mu \ll 1)$:

$$[1+\mu\rho_*(x)]u^{\cdot\cdot}=[(1+\mu c_*(x))u']'+\mu\varphi(t,\ x,\ u,\ u^{\cdot},\ u') \qquad (3.7)$$

Здесь ρ_*, c_*, φ — достаточно гладкие функции, причем φ допускает разложения Тейлора по u, $u^{\cdot}$, u' в окрестности некоторого порождающего решения. Краевые условия типа (3.1), характеризующие сосредоточенные управляющие воздействия, могут также содержать малые нелинейные возмущения. Ставится двухточечная по t, $t \in [t_0,\ T]$ задача об оптимальном в смысле среднеквадратического функционала типа (1.3) приведении системы из произвольного достаточно гладкого начального состояния в заданное. Требуется приближенно с достаточной степенью точности по μ построить управляющую функцию и движение системы. Так как управление обычно является разрывной функцией t, то близость приближенного управления к точному понимается в среднеквадратическом [3] или в другой неравномерной метрике. Один из подходов может заключаться в том, что в возмущающие выражения, входящие с множителем μ, подставляется порождающее решение — управление и движение, отвечающее $\mu=0$. Тогда возмущающие воздействия будут известными функциями t и x, к которым затем можно применить подход, развитый выше в 1° п. 3. Вопросы построения приближенного решения на основе метода возмущений [9] или последовательных приближений для задач оптимального управления колебательными системами с распределенными параметрами и соответствующего обоснования представляются, однако, весьма сложными и требуют дальнейшего исследования.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Работнов Ю. Н.* Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1979. 744 с.
2. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теоретическая физика. Т. 7. Теория упругости. М.: Наука, 1965. 204 с.
3. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1966. 724 с.
4. *Лионс Ж.-Л.* Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. М.: Мир, 1972. 416 с.
5. *Комков В.* Теория оптимального управления демпфированием колебаний простых упругих систем. М.: Мир, 1972. 160 с.
6. *Троицкий В. А.* Оптимальные процессы колебаний механических систем. Л.: Машиностроение, 1976. 248 с.
7. *Бутковский А. Г.* Методы управления системами с распределенными параметрами. М.: Наука, 1975. 568 с.
8. *Акуленко Л. Д.* Приведение упругой системы в заданное состояние посредством силового граничного воздействия.— ПММ, 1981, т. 45, вып. 6, с. 1095—1103.
9. *Морс Ф. М., Фешбах Г.* Методы теоретической физики. Т. 2. М.: Изд-во иностр. лит., 1960. 886 с.
10. *Акуленко Л. Д., Болотник Н. Н.* Об управлении системами с упругими элементами.— ПММ, 1980, т. 44, вып. 1, с. 22—31.
11. *Гринберг Г. А.* Новый метод решения некоторых краевых задач для уравнений математической физики, допускающих разделение переменных.— Изв. АН СССР. Сер. физ., 1946, т. 10, № 2, с. 141—168.
12. *Толстов Г. П.* Ряды Фурье. М.: Наука, 1980. 381 с.

Москва

Поступила в редакцию
25.X.1982