

УДК 624.07:534.1

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕТОДА МАТРИЦ ПЕРЕХОДА
ПРИ АНАЛИЗЕ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ
ВИБРОИЗОЛИРОВАННЫХ СИСТЕМ

ИВОВИЧ В. А.

Рассмотрена методика динамического расчета виброизолированных систем для общего случая пространственных собственных и вынужденных колебаний. Составлены переходные матрицы различных участков и сечений и приведены примеры расчета.

1. В практике динамического расчета упругих систем в последние годы стал находить применение матричный метод начальных параметров, способствующий упрощению и систематизации динамического расчета, а также успешному использованию вычислительных машин [1-4]. При расчете и проектировании виброизолированных систем указанный метод широкого применения еще не нашел. В качестве основного нормативного документа, регламентирующего порядок динамического расчета виброизоляции машин и оборудования, можно указать руководство [5], в соответствии с которым виброизоляторы следует располагать в плане так, чтобы их центр жесткости находился на одной вертикали с центром тяжести виброизолированной установки. Это условие выполняется только при симметричном расположении в плане одинаковых виброизоляторов относительно центра тяжести установки. Предположим, что взаимное расположение центра тяжести установки и центра жесткости виброизоляторов в общем случае произвольно.

Рассмотрим i -й участок стержня, испытывающий пространственные установившиеся колебания (фиг. 1) и ограниченный двумя сечениями $(i-1)$ -м и i -м. Считая его абсолютно жестким, запишем следующие зависимости между параметрами колебаний в $(i-1)$ -м сечении и в сечении с абсциссой x :

$$u = u_{i-1}, \quad y = y_{i-1} + \varphi_{zi-1}x, \quad z = z_{i-1} + \varphi_{yi-1}x, \quad \varphi_x = \varphi_{xi-1}$$

$$\varphi_y = \varphi_{yi-1}, \quad \varphi_z = \varphi_{zi-1}, \quad N_x = N_{xi-1} - m_i \omega^2 x u_{i-1}$$

$$Q_y = Q_{yi-1} + \int_0^x m_i \omega^2 y d\xi = Q_{yi-1} + m_i \omega^2 y_{i-1}x + m_i \omega^2 \varphi_{zi-1} \frac{x^2}{2}$$

$$Q_z = Q_{zi-1} + \int_0^x m_i \omega^2 z d\xi = Q_{zi-1} + m_i \omega^2 z_{i-1}x + m_i \omega^2 \varphi_{yi-1} \frac{x^2}{2}$$

(1.1)

$$M_x = M_{xi-1} - I_{xi} \omega^2 \varphi_{xi-1}, \quad M_y = M_{yi-1} + \int_0^x Q_z d\xi - m_i r_{iz}^2 \omega^2 \varphi_{yi-1}x =$$

$$= M_{yi-1} + Q_{zi-1}x + m_i \omega^2 z_{i-1} \frac{x^2}{2} + m_i \omega^2 \varphi_{yi-1} \frac{x^3}{6} - m_i r_{iz}^2 \omega^2 \varphi_{yi-1}x$$

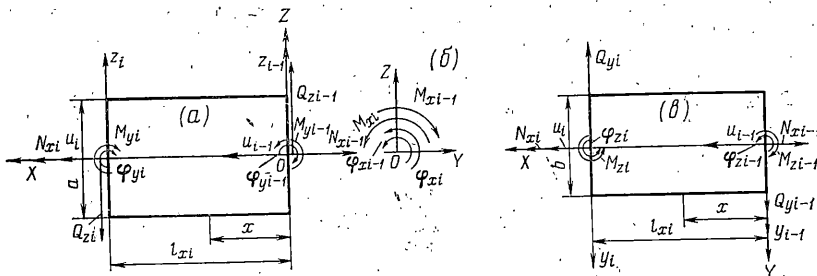
$$M_z = M_{zi-1} + \int_0^x Q_y d\xi - m_i r_{iy}^2 \omega^2 \varphi_{zi-1} x = M_{zi-1} + Q_{yi-1} x -$$

$$- m_i \omega^2 y_{i-1} \frac{x^2}{2} + m_i \omega^2 \varphi_{zi-1} \frac{x^3}{6} - m_i r_{iy}^2 \omega^2 \varphi_{zi-1} x$$

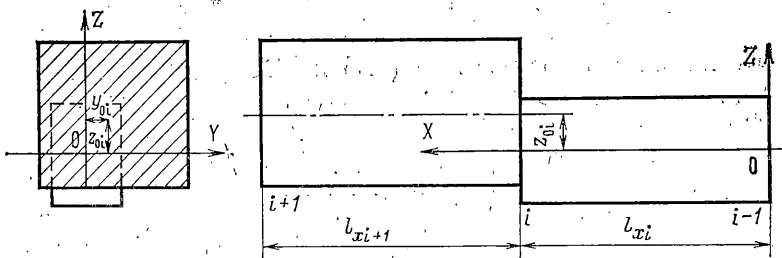
$$I_{iy} = \mu_i (r_{ix}^2 + r_{iz}^2), \quad I_{iz} = \mu_i (r_{ix}^2 + r_{iy}^2)$$

$$r_{ix}^2 = l_{xi}^2 / 12, \quad r_{iz}^2 = a^2 / 12, \quad r_{iy}^2 = b^2 / 12$$

Здесь u_{i-1} , y_{i-1} , z_{i-1} — амплитуды перемещений центра тяжести $(i-1)$ -го поперечного сечения стержня соответственно по осям X , Y , Z , φ_{xi-1} , φ_{yi-1} , φ_{zi-1} — амплитуды углов поворота $(i-1)$ -го поперечного сечения стержня относительно осей X , Y , Z , M_{xi-1} , M_{yi-1} , M_{zi-1} — амплитуды



Фиг. 1



Фиг. 2

крутящего и изгибающих моментов в $(i-1)$ -м поперечном сечении относительно осей X , Y , Z , N_{xi-1} , Q_{yi-1} , Q_{zi-1} — соответственно амплитуда осевой и поперечных сил, действующих по осям X , Y , Z , ω — круговая частота колебаний, m_i — погонная масса участка, r_{iy} , r_{iz} — составляющие радиусов инерции участка стержня с массой $\mu_i = m_i l_{xi}$, I_{iy} , I_{iz} — главные центральные моменты инерции; I_{xi} — радиус инерции участка относительно оси X .

Зависимости (1.1) можно представить одним уравнением

$$Z_i = H_i Z_{i-1}, \quad H_i = \begin{vmatrix} h_{11} & h_{12} & \dots & h_{112} \\ h_{121} & h_{122} & \dots & h_{1212} \end{vmatrix} \quad (1.2)$$

$$Z_i = \{u_i, N_{xi}, \varphi_{xi}, M_{xi}, Z_i, \varphi_{yi}, M_{yi}, Q_{xi}, y_i, \varphi_{zi}, M_{zi}, Q_{yi}\}$$

$$h_{11} = h_{22} = h_{33} = h_{44} = h_{55} = h_{66} = h_{77} = h_{88} = h_{99} = h_{1010} = h_{1111} = h_{1212} = 1$$

$$h_{21} = -\mu_i \omega^2, \quad h_{43} = -I_{xi} \omega^2, \quad h_{56} = l_{xi}, \quad h_{75} = 1/2 \mu_i \omega^2 l_{xi}$$

$$h_{76} = 1/6 \mu_i \omega^2 l_{xi}^2 - \mu_i r_{iz}^2 \omega^2, \quad h_{78} = l_{xi}, \quad h_{85} = \mu_i \omega^2$$

$$h_{86} = 1/2 \mu_i \omega^2 l_{xi}, \quad h_{910} = l_{xi}, \quad h_{119} = 1/2 \mu_i \omega^2 l_{xi}$$

$$h_{1110} = 1/6 \mu_i \omega^2 l_{xi} - \mu_i r_{iy}^2 \omega^2, \quad h_{1112} = l_{xi}, \quad h_{129} = \mu_i \omega^2, \quad h_{1210} = 1/2 \mu_i \omega^2 l_{xi}$$

где все другие элементы матрицы H_i равны нулю; фигурная скобка в выражении для Z_i обозначает матрицу-столбец.

Составим переходную матрицу сечения, содержащего упругие опоры. Предположим, что в i -м сечении стержня содержится j -я упругая опора с коэффициентами жесткости $C_{xj}^{(i)}$, $C_{yj}^{(i)}$, $C_{zj}^{(i)}$. Координаты точки крепления j -й упругой опоры к стержню в системе координат X, Y, Z (фиг. 1) обозначим $x_j^{(i)}$, $y_j^{(i)}$, $z_j^{(i)}$. Амплитуды колебаний j -й точки будут определяться зависимостями

$$\begin{aligned} a_{xj}^{(i)} &= u_i - \varphi_{yi} z_j^{(i)} - \varphi_{zi} y_j^{(i)} \\ a_{yi}^{(i)} &= y_i - \varphi_{xi} z_j^{(i)}, \quad a_{zj}^{(i)} = z_i + \varphi_{xi} y_j^{(i)} \end{aligned} \quad (1.3)$$

При выполнении динамического расчета учтем скачкообразные изменения силовых факторов в i -м сечении, обусловленные наличием n упругих опор в этом сечении

$$\begin{aligned} \Delta N_{xi} &= \sum_{j=1}^n a_{xj}^{(i)} C_{xj}^{(i)}, \quad \Delta Q_{zi} = - \sum_{j=1}^n a_{zj}^{(i)} C_{zj}^{(i)}, \quad \Delta Q_{yi} = - \sum_{j=1}^n a_{yj}^{(i)} C_{yj}^{(i)} \\ \Delta M_{yi} &= - \sum_{j=1}^n \Delta N_{xi} z_j^{(i)}, \end{aligned} \quad (1.4)$$

$$\Delta M_{xi} = \sum_{j=1}^n \Delta Q_{yi} z_j^{(i)} - \sum_{j=1}^n \Delta Q_{zi} y_j^{(i)}, \quad \Delta M_{zi} = - \sum_{j=1}^n \Delta N_{xi} y_j^{(i)}$$

В соответствии с зависимостями (1.1) и (1.4) образуем матрицу упругих опор Q_i , на которую необходимо умножить значения параметров колебаний при переходе через i -е сечение

$$Q_i = \begin{vmatrix} q_{11} & q_{12} & \dots & q_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ q_{n1} & q_{n2} & \dots & q_{nn} \end{vmatrix} \quad (1.5)$$

$$q_{11} = 1, \quad q_{21} = \sum_{j=1}^n C_{xj}^{(i)}, \quad q_{22} = 1, \quad q_{26} = - \sum_{j=1}^n C_{xj}^{(i)} z_j^{(i)},$$

$$q_{210} = - \sum_{j=1}^n C_{xj}^{(i)} y_j^{(i)}, \quad q_{33} = 1$$

$$q_{43} = \sum_{j=1}^n C_{yj}^{(i)} (z_j^{(i)})^2 + \sum_{j=1}^n C_{zj}^{(i)} (y_j^{(i)})^2, \quad q_{44} = 1, \quad q_{45} = \sum_{j=1}^n C_{zj}^{(i)} y_j^{(i)},$$

$$q_{49} = - \sum_{j=1}^n C_{ji}^{(i)} z_j^{(i)}$$

$$q_{55} = 1, \quad q_{66} = 1, \quad q_{71} = - \sum_{j=1}^n C_{xj}^{(i)} z_j^{(i)}, \quad q_{76} = \sum_{j=1}^n C_{xj}^{(i)} (z_j^{(i)})^2, \quad q_{77} = 1,$$

$$q_{710} = \sum_{j=1}^n C_{xj}^{(i)} y_j^{(i)} z_j^{(i)}$$

$$\begin{aligned}
 q_{83} &= - \sum_{j=1}^n C_{zj}^{(i)} y_j^{(i)}, & q_{85} &= - \sum_{j=1}^n C_{zj}^{(i)}, & q_{88} &= 1, & q_{99} &= 1, & q_{1010} &= 1, \\
 q_{11-1} &= - \sum_{j=1}^n C_{xj}^{(i)} y_j^{(i)}, \\
 q_{11-6} &= \sum_{j=1}^n C_{xj}^{(i)} z_j^{(i)} y_j^{(i)}, & q_{1110} &= \sum_{j=1}^n C_{xj}^{(i)} (y_j^{(i)})^2, & q_{1111} &= 1, \\
 q_{12-3} &= \sum_{j=1}^n C_{yj}^{(i)} z_j^{(i)}, & q_{12-9} &= - \sum_{j=1}^n C_{yj}^{(i)}, & q_{1212} &= 1
 \end{aligned}$$

Остальные элементы матрицы (1.5) равны нулю.

Предположим, что в некотором сечении i на оси X расположен сосредоточенный груз с массой μ_i° и моментами инерции $I_{xi}^\circ, I_{yi}^\circ, I_{zi}^\circ$. Из матрицы H_i для этого случая нетрудно образовать матрицу сосредоточенной массы M_i , если положить

$$\begin{aligned}
 h_{11} &= h_{22} = h_{33} = h_{44} = h_{55} = h_{66} = h_{77} = h_{88} = h_{99} = h_{1010} = h_{1111} = h_{1212} = 1 \\
 h_{21} &= -\mu_i^\circ \omega^2, & h_{43} &= -I_{xi}^\circ \omega^2, & h_{56} &= h_{75} = h_{78} = h_{86} = h_{910} = h_{1112} = h_{1210} = 0 \\
 h_{76} &= -I_{yi}^\circ \omega^2, & h_{85} &= \mu_i^\circ \omega^2, & h_{1110} &= -I_{zi}^\circ \omega^2, & h_{129} &= \mu_i^\circ \omega^2
 \end{aligned} \quad (1.6)$$

Переходную матрицу B_i абсолютно жесткого i -го участка стержня, весом которого по сравнению с другими участками пренебрегаем, можно образовать из матрицы (1.2), полагая в ней равными нулю все элементы, кроме $b_{11} = b_{22} = b_{33} = b_{44} = b_{55} = b_{66} = b_{77} = b_{88} = b_{99} = b_{1010} = b_{1111} = b_{1212} = 1$, $b_{56} = b_{78} = b_{910} = b_{1112} = l_{xi}$.

Отметим, что метод матриц перехода для случая динамического расчета стержневых систем рассматривался в [1—4, 6—8]. Применительно к пространственным колебаниям толстых стержней на опорах с упругой податливостью по трем координатным осям матрицы H_i, Q_i, B_i в указанных работах не приводятся.

2. Предположим, что в i -м сечении происходит скачкообразное изменение площадей поперечных сечений двух смежных участков виброизолированной установки (фиг. 2). Для участка, ограниченного сечениями i и $i+1$, центр тяжести площади поперечного сечения имеет координаты y_{0i} и z_{0i} в системе координат X, Y, Z с началом в центре тяжести площади поперечного сечения предшествующего участка. Зависимости между параметрами сечения, непосредственно примыкающего к i -му сечению слева (отмечены знаком минус), и параметрами, действующими в непосредственной близости от i -го сечения справа (со знаком плюс), имеют вид

$$\begin{aligned}
 \varphi_{xi}^- &= \varphi_{xi}^+, & u_i^- &= u_i^+ - \varphi_{yi}^+ z_{0i} - \varphi_{zi}^+ y_{0i} \\
 N_{xi}^- &= N_{xi}^+, & M_{xi}^- &= M_{xi}^+ - Q_{yi}^+ z_{0i} + Q_{zi}^+ y_{0i} \\
 \varphi_{yi}^- &= \varphi_{yi}^+, & y_i^- &= y_i^+ - \varphi_{xi}^+ z_{0i}, & Q_{yi}^- &= Q_{yi}^+ \\
 M_{yi}^- &= M_{yi}^+ + N_{xi}^+ z_{0i}, & \varphi_{zi}^- &= \varphi_{zi}^+ \\
 z_i^- &= z_i^+ + \varphi_{xi}^+ y_{0i}, & Q_{zi}^- &= Q_{zi}^+, & M_{zi}^- &= M_{zi}^+ + N_{xi}^+ y_{0i}
 \end{aligned} \quad (2.1)$$

Соотношения (2.1) можно представить матричным уравнением

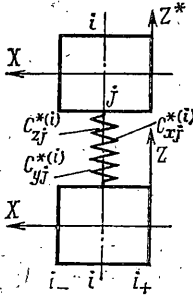
$$Z_i^- = K_i Z_i^+, \quad K_i = \begin{vmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{112} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_{121} & k_{122} & \dots & k_{1212} \end{vmatrix} \quad (2.2)$$

$$k_{11}=k_{22}=k_{33}=k_{44}=k_{55}=k_{66}=k_{77}=k_{88}=k_{99}=k_{1010}=k_{1111}=k_{1212}=1$$

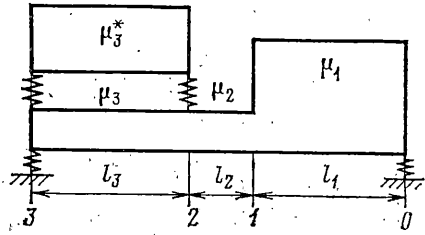
$$k_{16}=k_{93}=k_{412}=-k_{72}=-z_{0i}, \quad k_{53}=k_{11-2}=k_{48}=-k_{110}=y_{0i}$$

Остальные элементы матрицы K_i равны нулю. Приведенные здесь матрицы остаются справедливыми также и для участков стержней произвольного постоянного поперечного сечения.

Если предположить, что в центре тяжести площади i -го поперечного сечения действуют осевая сила $P_{xi} \sin \Omega t$, поперечные силы $P_{yi} \sin \Omega t$,



Фиг. 3



Фиг. 4

$P_{zi} \sin \Omega t$, крутящий момент $R_{xi} \sin \Omega t$ и изгибающие моменты $R_{yi} \sin \Omega t$, $R_{zi} \sin \Omega t$, то учет этих воздействий производится матрицей

$$\Psi_i = \{0, P_{xi}, 0, R_{xi}, 0, 0, R_{yi}, P_{zi}, 0, 0, R_{zi}, P_{yi}\} \quad (2.3)$$

Предположим, что в i -м сечении между двумя участками колеблющихся стержней содержится j -я упругая опора с коэффициентами жесткости $C_{xj}^{*(i)}$, $C_{yj}^{*(i)}$, $C_{zj}^{*(i)}$. Координаты крепления j -й упругой опоры в системе координат X^* , Y^* , Z^* (фиг. 3) с началом в центре тяжести площади поперечного сечения верхнего участка обозначим $x_j^{*(i)}$, $y_j^{*(i)}$, $z_j^{*(i)}$, а общее количество упругих опор, содержащихся в i -м сечении, — n . Все параметры колебаний, относящиеся к верхнему участку стержня, обозначим теми же буквами, что и для нижнего участка, но со звездочками. Положительные направления перемещений и силовых факторов примем одинаковыми для нижнего и верхнего участков.

Амплитуды колебаний j -й точки крепления упругой опоры к верхнему участку балки будут определяться зависимостями

$$\begin{aligned} a_{xj}^{*(i)} &= u_i^* - u_j - (\varphi_{yi}^* - \varphi_{yj}) z_j^{*(i)} - (\varphi_{zi}^* - \varphi_{zj}) y_j^{*(i)} \\ a_{yj}^{*(i)} &= y_i^* - y_j - (\varphi_{xi}^* - \varphi_{xj}) z_j^{*(i)}, \quad a_{zj}^{*(i)} = z_i^* - z_j + (\varphi_{xi}^* - \varphi_{xj}) y_j^{*(i)} \end{aligned} \quad (2.4)$$

Учитывая скачкообразные изменения силовых факторов в i -м сечении, определяемые зависимостями вида (1.4), приходим к уравнениям, связывающим значения параметров слева и справа от i -го сечения. Для верхнего участка балки имеем

$$\begin{aligned} Z_{i-}^* &= Q_i^{*(b)} Z_{i+}^* - F_i^{*(b)} Z_{i+}^* \\ Q_i^{*(b)} &= \begin{vmatrix} q_{11}^* & q_{12}^* & \dots & q_{1n}^* \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ q_{n1}^* & q_{n2}^* & \dots & q_{nn}^* \end{vmatrix} \\ q_{11}^* &= 1, \quad q_{21}^* = \sum_{j=1}^n C_{xj}^{*(i)}, \\ q_{22}^* &= 1, \quad q_{26}^* = \sum_{j=1}^n C_{xj}^{*(i)} z_j^{*(i)} \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned}
q_{210}^* &= - \sum_{j=1}^n C_{xj}^{*(i)} y_j^{*(i)}, & q_{33}^* &= 1, & q_{45}^* &= \sum_{j=1}^n C_{yj}^{*(i)} (z_j^{*(i)})^2 + \sum_{j=1}^n C_{zj}^{*(i)} (y_j^{*(i)})^2 \\
q_{44}^* &= 1, & q_{45}^* &= \sum_{j=1}^n C_{zj}^{*(i)} y_j^{*(i)}, & q_{49}^* &= - \sum_{j=1}^n C_{yj}^{*(i)} z_j^{*(i)}, & q_{55}^* &= 1, & q_{66}^* &= 1 \\
q_{71}^* &= - \sum_{j=1}^n C_{xj}^{*(i)} z_j^{*(i)}, & q_{76}^* &= \sum_{j=1}^n C_{xj}^{*(i)} (z_j^{*(i)})^2, & q_{77}^* &= 1 \\
q_{710}^* &= \sum_{j=1}^n C_{xj}^{*(i)} y_j^{*(i)} z_j^{*(i)} \\
q_{83}^* &= - \sum_{j=1}^n C_{zj}^{*(i)} y_j^{*(i)}, & q_{85}^* &= - \sum_{j=1}^n C_{zj}^{*(i)}, & q_{88}^* &= 1, & q_{99}^* &= 1, & q_{1010}^* &= 1 \\
q_{11-1}^* &= - \sum_{j=1}^n C_{xj}^{*(i)} y_j^{*(i)} \\
q_{11-6}^* &= \sum_{j=1}^n C_{xj}^{*(i)} z_j^{*(i)} y_j^{*(i)}, & q_{1110}^* &= \sum_{j=1}^n C_{xj}^{*(i)} (y_j^{*(i)})^2, & q_{1111}^* &= 1, \\
q_{12-3}^* &= \sum_{j=1}^n C_{yj}^{*(i)} z_j^{*(i)}, & q_{12-9}^* &= - \sum_{j=1}^n C_{yj}^{*(i)}, & q_{1212}^* &= 1
\end{aligned}$$

Остальные элементы матрицы $Q_i^{*(b)}$ равны нулю. Матрица $F_i^{*(b)}$ определяется выражением

$$F_i^{*(b)} = \begin{pmatrix} q_{11}^* & q_{12}^* & \dots & q_{112}^* \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ q_{121}^* & q_{122}^* & \dots & q_{1212}^* \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

где ненулевыми элементами являются q_{21}^* , q_{26}^* , q_{210}^* , q_{43}^* , q_{45}^* , q_{49}^* , q_{71}^* , q_{76}^* , q_{710}^* , q_{83}^* , q_{85}^* , q_{11-1}^* , q_{11-6}^* , q_{11-10}^* , q_{12-3}^* , q_{12-9}^* .

Для нижнего участка балки зависимость между параметрами в i -м сечении принимает вид

$$Z_{i-} = Q_i^* Z_{i+} + F_i^{*(H)} Z_{i+}^*$$

$$Q_i^{*(H)} = \begin{pmatrix} q_{11}^{*'} & q_{12}^{*'} & \dots & q_{112}^{*'} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ q_{121}^{*'} & q_{122}^{*'} & \dots & q_{1212}^{*'} \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

где ненулевыми элементами являются: $q_{11}^{*'} = q_{11}^*$, $q_{21}^{*'} = q_{21}^*$, $q_{22}^{*'} = q_{22}^*$, $q_{26}^{*'} = q_{26}^*$, $q_{210}^{*'} = q_{210}^*$, $q_{33}^{*'} = q_{33}^*$, $q_{43}^{*'} = -q_{43}^*$, $q_{44}^{*'} = q_{44}^*$, $q_{45}^{*'} = -q_{45}^*$, $q_{49}^{*'} = -q_{49}^*$, $q_{55}^{*'} = q_{55}^*$, $q_{66}^{*'} = q_{66}^*$, $q_{71}^{*'} = -q_{71}^*$, $q_{76}^{*'} = -q_{76}^*$, $q_{77}^{*'} = q_{77}^*$, $q_{710}^{*'} = -q_{710}^*$, $q_{83}^{*'} = q_{83}^*$, $q_{85}^{*'} = q_{85}^*$, $q_{88}^{*'} = q_{88}^*$, $q_{99}^{*'} = q_{99}^*$,

$$q_{1010}^{*'} = q_{1010}^*, \quad q_{11-1}^{*'} = q_{11-1}^*, \quad q_{11-6}^{*'} = q_{11-6}^*, \quad q_{11-10}^{*'} = q_{11-10}^*, \quad q_{11-11}^{*'} = q_{11-11}^*,$$

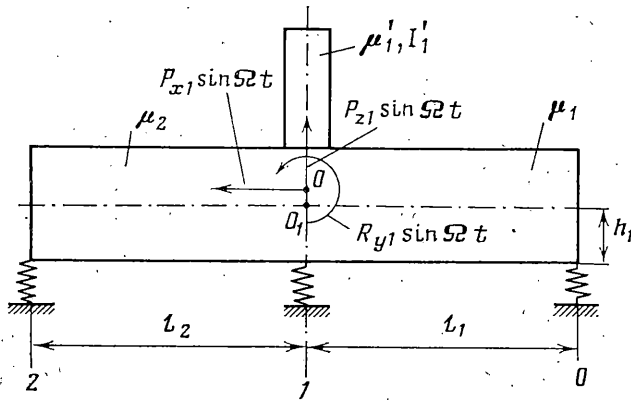
$$q_{12-3}^{*'} = q_{12-3}^*, \quad q_{12-9}^{*'} = q_{12-9}^*.$$

Матрица $F_i^{*(H)}$ определяется выражением

$$F_i^{*(H)} = \begin{pmatrix} q_{11}^{*''} & q_{12}^{*''} & \dots & q_{112}^{*''} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ q_{121}^{*''} & q_{122}^{*''} & \dots & q_{1212}^{*''} \end{pmatrix}, \quad (2.8)$$

где ненулевыми элементами являются: $q_{21}^{*''} = -q_{21}^*$, $q_{26}^{*''} = -q_{26}^*$,
 $q_{210}^{*''} = -q_{210}^*$, $q_{45}^{*''} = q_{45}^*$, $q_{49}^{*''} = q_{49}^*$, $q_{71}^{*''} = q_{71}^*$, $q_{76}^{*''} = q_{76}^*$, $q_{710}^{*''} = q_{710}^*$,
 $q_{83}^{*''} = -q_{83}^*$, $q_{85}^{*''} = -q_{85}^*$,
 $q_{11-1}^{*''} = -q_{11-1}^*$, $q_{11-6}^{*''} = -q_{11-6}^*$, $q_{11-10}^{*''} = q_{11-10}^*$, $q_{12-3}^{*''} = -q_{12-3}^*$, $q_{12-9}^{*''} = -q_{12-9}^*$.

Заметим здесь, что соотношения (2.5) и (2.7) отличаются от обычных формул, используемых в методе матриц перехода стержневых систем, не содержащих промежуточных упругих связей и инерционных элементов. Пользуясь найденными соотношениями, нетрудно образовать уравнения



Фиг. 5

частот собственных колебаний для многозвенной виброизоляции. Так, для схемы виброизолированной установки, приведенной на фиг. 4, зависимости между параметрами в крайних сечениях принимают вид

$$Z_3^* = Q_3^{*(b)} H_3^* (Q_2^{*(b)} Z_2^* - F_2^{*(b)} Z_2) - F_3^{*(b)} Z_3 \quad (2.9)$$

$$Z_3 = Q_3^{*(H)} H_3^* (Q_2^{*(H)} H_2 K_1 H_1 Q_0 Z_0 + F_2^{*(H)} Z_2^*) + F_3^{*(H)} Z_3^{*(H)}$$

Учитывая равенство нулю всех силовых факторов в нулевом, втором и третьем сечениях верхней и нижней балок, нетрудно образовать двенадцать алгебраических уравнений относительно кинематических параметров. Уравнение, определяющее частоты собственных колебаний, образуется, если приравнять определитель алгебраических уравнений нулю.

3. Рассмотрим численный пример. Для схемы виброизолированной установки, приведенной на фиг. 5, требуется найти амплитуды перемещений в сечении 0, частоты собственных колебаний виброизолированной установки и величины амплитуд сил, передающихся через виброизоляторы. Считаем, что в трех сечениях 0, 1, 2 имеется шесть упругих опор симметрично расположенных относительно плоскости XZ, образованной главными центральными осями инерции установки. На фиг. 5 O и O1 — центры тяжести всей установки и фундаментного блока. Результирующие коэффициенты жесткости виброизоляторов в i-м сечении обозначим C_{xj} , C_{zj} .

Величины исходных данных следующие: $C_{x0} = C_{x1} = C_{x2} = 1,3 \cdot 10^5$ Н/м, $C_{z0} = C_{z1} = C_{z2} = 1,7 \cdot 10^5$ Н/м, $h_1 = h_2 = 0,10$ м, $\mu_1 = \mu_2 = 168$ кг, $\mu_1' = 180$ кг, $I_1' = 40$ кгм², $r_{1z}^2 = r_{2z}^2 = 0,0033$ м², $r_{1y}^2 = r_{2y}^2 = 0,084$ м², $l_1 = l_2 = 0,50$ м, $z_{01} = 0,30$ м, $P_{x1} = P_{z1} = 900$ Н, $R_{y1} = 460$ Нм.

Зависимость между параметрами колебаний в краевых сечениях принимает вид

$$Z_2 = Q_2 H_2 (Q_1 M_1 K_1 H_1 Q_0 Z_0 + \Psi_1) \quad (3.1)$$

Входящие в соотношение (2.9) матрицы определяются выражениями (1.2), (1.5), (2.2). Учитывая краевые условия $M_{x0} = M_{y0} = M_{z0} = N_{x0} = Q_{y0} = Q_{z0} = M_{x2} = M_{y2} = M_{z2} = N_{x2} = Q_{y2} = Q_{z2} = 0$, из выражения (3.1) находим $u_0 = 0,75 \cdot 10^{-4}$ м, $z_0 = 0,78 \cdot 10^{-4}$ м, $\varphi_0 = 0,00025$ рад, $\varphi_{x0} = y_0 = \varphi_{z0}$. Нулевые значения амплитуд колебаний в нулевом сечении обусловлены действием возмущающих воздействий в плоскости XZ .

Полагая в матрицах Z_0 и Z_2 в соответствии с краевыми условиями все силовые факторы равными нулю и пренебрегая возмущающими воздействиями в уравнении (3.1), приходим к шести алгебраическим уравнениям, определяющим частоты собственных колебаний виброизолированной установки (рад/с): $\omega_1 = 31$, $\omega_2 = 18$, $\omega_3 = 98$, $\omega_4 = 21$, $\omega_5 = 41$, $\omega_6 = 40$. Первые три частоты отвечают собственным поступательно-вращательным колебаниям в плоскости XZ , четвертая и пятая соответствуют колебаниям установки в плоскости YZ , шестая относится к вращательным колебаниям установки относительно оси Z .

Учитывая, что после перехода через сечение, в котором установка опирается на упругие опоры, происходит скачкообразное изменение силовых факторов в соответствии с соотношениями (1.4), можно найти усилия, передающиеся на поддерживающие конструкции.

Для этого при помощи переходных матриц определялись усилия в непосредственной близости от сечения, опирающегося на упругие опоры справа и слева от него, и вычислялась разность между ними. Обозначая амплитуды усилий в i -й упругой опоре через S_{ix} , S_{iz} , запишем результаты вычислений (Н): $S_{0x} = S_{1x} = S_{2x} = 0,60$, $S_{0z} = 31$, $S_{1z} = 14$, $S_{2z} = -3$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ивович В. А. Переходные матрицы в динамике упругих систем. М.: Машиностроение, 1969. 199 с.
2. Смирнов А. Ф., Александров А. В., Шапошников Н. Н., Лащенко В. Я. Расчет сооружений с применением вычислительных машин. М.: Госстройиздат, 1964. 380 с.
3. Ивович В. А. Виброизоляция горно-обогатительных машин и оборудования. М.: Недра, 1978. 252 с.
4. Okamura A. On a method for vibration problems of branch-type systems. note on a general extension of a step-by-step method. Proc. 2nd Japan Nation. Congr. Appl. Mech. Tokio, 1953, p. 323-328.
5. Руководство по проектированию вибрации машин и оборудования. М.: Стройиздат, 1972. 159 с.
6. Fuhrke H. Bestimmung von Balkenschwindungen mit Hilfe des Matrizenkalküls. — Ing.-Arch., 1955, В. 23, Н. 5, S. 329-348.
7. Fuhrke H. Bestimmung von Rahmenschwindungen mit Hilfe des Matrizenkalküls. — Ing.-Arch., 1956, В. 24, Н. 1, S. 27-42.
8. Троицкий В. А. Матричные методы расчета колебаний стержневых систем. — Тр. Ленингр. политехн. ин-та, 1960, № 10, с. 220-255.

Москва

Поступила в редакцию
28.VII.1982