

УДК 539.3

## ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ ТЕРМОСТАТИКИ РЕБРИСТЫХ ОБОЛОЧЕК

МИХАЙЛОВСКИЙ Е. И.

Выведенные ранее граничные условия для края оболочки, подкрепленного тонким упругим стержнем [1–3], обобщаются на случай задачи термоупругости. Использованный при этом подход применяется для вывода линейных уравнений термостатики ребристых оболочек, где принимаются лишь наиболее общие допущения: для оболочки – гипотеза Кирхгофа – Лява, для ребра – гипотеза жесткого контура [4], для конструкции в целом – гипотеза Дюамеля – Неймана [5]. Описан прием, позволяющий оценить погрешность обычно принимаемых допущений о малости тех или иных жесткостей подкрепляющих ребер [6–8]. Обозначения совпадают в основном с принятыми в [9].

1. Пусть тонкая оболочка, изготовленная из упругого, термически изотропного материала, находится под действием механической нагрузки  $p(\alpha, \beta)$ , а также дополнительного по отношению к условиям ее изготовления температурного поля  $T=T(\alpha, \beta, \zeta)$  ( $\zeta$  – расстояние по нормали от точки срединной поверхности  $(\alpha, \beta)$ ). Принимая гипотезу Дюамеля – Неймана [9] и предполагая, что изменение температуры несущественно сказывается на значениях упругих постоянных материала оболочки  $(E, \nu)$ , разрешающую систему метода сил для задачи термостатики можно записать в виде

$$R_0 L_1 t + L_2 m = -ABp, \quad R_0 L_1 \kappa - L_2 \varepsilon = -\frac{AB}{Ehc} p^T \quad (1.1)$$

$$t - c_0 C \varepsilon = 0, \quad m - d_0 C \kappa = 0$$

$$\|t, m, \varepsilon, \kappa, p\| = \begin{vmatrix} T_\alpha & M_\alpha & \varepsilon_\beta & \kappa_\beta & p_\alpha \\ S & H & -\omega/2 & -\tau & p_n \\ T_\beta & M_\beta & \varepsilon_\alpha & \kappa_\alpha & p_\beta \end{vmatrix}, \quad C = \begin{vmatrix} \nu & 0 & 1 \\ 0 & -1 + \nu & 0 \\ 1 & 0 & \nu \end{vmatrix}$$

$$c_0 = \frac{Eh}{1-\nu^2}, \quad d_0 = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}, \quad c = \frac{h}{\sqrt{12(1-\nu^2)}}$$

$$p_\alpha^T = Ehc \left\{ -\frac{1}{R_\alpha A} \frac{\partial \varepsilon_T}{\partial \alpha} + \frac{1}{A} \frac{\partial \kappa_T}{\partial \alpha} + \right.$$

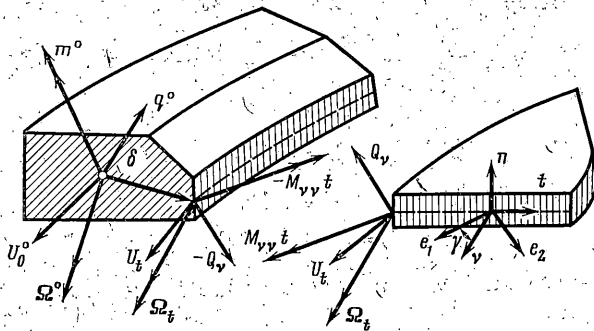
$$\left. + \frac{1}{AB} \left( \frac{2}{R_{\alpha\beta}} \frac{\partial A \varepsilon_T}{\partial \beta} - \frac{A}{R_{\alpha\beta}^2} \frac{\partial R_{\alpha\beta}}{\partial \beta} \varepsilon_T \right) \right\}, \quad p_\beta = (\alpha \leftrightarrow \beta) p_\alpha$$

$$p_n^T = Ehc \left\{ -\Delta \varepsilon_T + \frac{2}{R_{\alpha\beta}^2} \varepsilon_T - \left( \frac{1}{R_\alpha} + \frac{1}{R_\beta} \right) \kappa_T \right\}$$

$$\Delta(\ ) = \frac{1}{AB} \left\{ \frac{\partial B}{\partial \alpha} \frac{\partial(\ )}{\partial \alpha} + \frac{\partial A}{\partial \beta} \frac{\partial(\ )}{\partial \beta} \right\}$$

$$\varepsilon_T = \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} \gamma T d\zeta, \quad \kappa_T = \frac{12}{h^3} \int_{-h/2}^{h/2} \gamma T \zeta d\zeta$$

Здесь  $L_1, L_2$  — безразмерные матричные дифференциальные операторы безмоментного и чисто изгибного напряженных состояний,  $R_0$  — характерный размер или радиус срединной поверхности оболочки,  $-1/R_\alpha, -1/R_\beta$  — нормальные кривизны координатных линий,  $-1/R_{\alpha\beta}$  — геодезическое кручение,  $t, m, \varepsilon, \kappa, p$  — столбцы тангенциальных усилий, изгибающих и скручивающего моментов, параметров тангенциальной деформации, параметров изгибной деформации, удельной поверхностной нагрузки,  $h$  — толщина



Фиг. 1

оболочки,  $E, \nu, \gamma$  — модуль Юнга, коэффициент Пуассона и коэффициент линейного температурного расширения материала оболочки.

Если температура изменяется линейно по толщине оболочки, т. е.  $T(\alpha, \beta, \zeta) = t_0(\alpha, \beta) + \zeta t_1(\alpha, \beta)$ , то  $\varepsilon_T = \gamma t_0, \kappa_T = \gamma t_1$ .

Для непосредственной реализации метода сил (1.1) во многих задачах статики (при отсутствии температурных воздействий) удобными являются граничные величины К. Ф. Черныха [9]:

$$\begin{matrix} B_v & B_t & B_n & F_t \\ -\kappa_{tt} & \kappa_{tv} & -\kappa_{tn} & \varepsilon_{tt} \end{matrix} \quad (1.2)$$

геометрическая часть которых выражается через параметры деформации  $\varepsilon, \kappa$ .

В (1.2) использованы соотношения (фиг. 1):

$$F = F_0 + \int_{s_0}^{s_t} Q_v ds_t', \quad B = B_0 + \int_{s_0}^{s_t} (M_{vv}t + F \times t) ds_t'$$

$$\varepsilon_{tt}t = \frac{dU}{ds_t} + t \times \Omega_t, \quad -\kappa_{tt}v + \kappa_{tv}t - \kappa_{tn}n = \frac{d\Omega_t}{ds_t}$$

$$\frac{\partial(\cdot)}{\partial s_t} = -\frac{\sin \omega}{A} \frac{\partial(\cdot)}{\partial \alpha} + \frac{\cos \omega}{B} \frac{\partial(\cdot)}{\partial \beta}, \quad \frac{\partial(\cdot)}{\partial s_v} = \frac{\cos \omega}{A} \frac{\partial(\cdot)}{\partial \alpha} + \frac{\sin \omega}{B} \frac{\partial(\cdot)}{\partial \beta}$$

Здесь  $Q_v = Q_{vv}v + Q_{vt}t + Q_{vn}n$  — вектор обобщенных кирхгофовских усилий,  $M_{vv}$  — изгибающий момент,  $U_t = u \cdot v + u_t t + u_n n$  — вектор перемещений точки граничного контура срединной поверхности оболочки,  $\Omega_t = -\phi_t v + \phi_t t + \omega_t n$  — вектор углов поворота граничного нормального элемента.

Если ввести дифференциальный оператор

$$\Gamma = \left\| \begin{array}{c|c} \Gamma_0 & \begin{array}{c} -\rho_t \\ \frac{d(\cdot)}{ds_t} \\ \sigma_t \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} \rho_t \\ \frac{d(\cdot)}{ds_t} - \sigma_t \end{array} & 0 \end{array} \right\|, \quad \Gamma_0 = \left\| \begin{array}{ccc} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13} \\ \gamma_{21} & 0 & \gamma_{23} \\ -\gamma_{13} & \gamma_{32} & \gamma_{11} \end{array} \right\| \quad (1.3)$$

$$\begin{aligned} \gamma_{11} &= -\frac{d\tau_t(\cdot)}{ds_t} - \tau_t \frac{d(\cdot)}{ds_t}, & \gamma_{12} &= \frac{d\sigma_t(\cdot)}{ds_t} + \tau_t \rho_t, & \gamma_{13} &= \frac{d^2(\cdot)}{ds_t^2} - \tau_t^2 \\ \gamma_{21} &= \sigma_t \frac{d(\cdot)}{ds_t} - \rho_t \tau_t, & \gamma_{23} &= \rho_t \frac{d(\cdot)}{ds_t} + \tau_t \sigma_t, & \gamma_{32} &= \frac{d\rho_t(\cdot)}{ds_t} - \tau_t \sigma_t \end{aligned}$$

где  $\sigma_t$ ,  $\rho_t$ ,  $\tau_t$  — соответственно нормальная кривизна, геодезическая кривизна и геодезическое кручение граничного контура оболочки, то граничные величины К. Ф. Черныха (звездочка означает транспонирование)

$$b = \|B_v, B_t, B_n, F_t\|^*, \quad \kappa = \|\kappa_{tt}, \kappa_{tv}, \kappa_{tn}, \varepsilon_{tt}\|^* \quad (1.4)$$

и граничные величины Кирхгофа

$$q = \|Q_{vv}, Q_{vt}, Q_{vn}, M_{vv}\|^*, \quad u = \|u_v, u_t, w, \vartheta_v\|^* \quad (1.5)$$

можно связать следующими равенствами:

$$\kappa = \Gamma u, \quad q = \Gamma b \quad (1.6)$$

Граничные условия для задачи термостатики (1.4) формулируются в терминах величин

$$\begin{aligned} & B_v & B_t & B_n & F_t \\ -\kappa_{tt} + \kappa_{tt} & \kappa_{tv} & -\kappa_{tn} + \partial \varepsilon_T / \partial s_v & \varepsilon_{tt} + \varepsilon_T \end{aligned} \quad (1.7)$$

2. Пусть край оболочки подкреплен тонким стержнем ( $\eta/R \ll 1$ , где  $\eta$  — характерный размер поперечного сечения стержня,  $R$  — радиус кривизны оси стержня). Предположим, что в процессе деформирования стержня его температура изменилась на  $T_0 = T_0(\xi_v, \xi_n, s)$  градусов. Считаем также, что температура существенно сказывается на значениях упругих постоянных ( $E_0, \nu_0$ ) и стержень термически изотропен. Тогда в соответствии с гипотезой Дюамеля — Неймана на деформацию стержня, обусловленную силовыми воздействиями, накладывается всестороннее тепловое расширение, т. е.

$$\begin{aligned} \varepsilon_{tt}^0 &= \frac{1}{E_0} (\sigma_{tt}^0 - \sigma^*) + \gamma_0 T_0, & \sigma^* &= \nu (\sigma_{vv}^0 + \sigma_{nn}^0) \\ \varepsilon_{tv}^0 &= 1/2 \sigma_{tv}^0 / G_0, & \varepsilon_{tn}^0 &= 1/2 \sigma_{tn}^0 / G_0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

где  $G_0 = 1/2 E_0 / (1 + \nu_0)$  — модуль сдвига материала стержня.

Принимая статическую гипотезу Кирхгофа (о малости нормальных напряжений на площадках параллельных оси стержня по сравнению с напряжениями на площадках к ней перпендикулярных), можно пренебречь в (2.1) слагаемым  $\sigma^*$ . Тогда при использовании геометрической гипотезы жесткого контура [4] напряженное состояние в тонком упругом стержне с учетом температурных воздействий приближенно описывается вектором

$$\begin{aligned} \sigma_t &= E_0 (\varepsilon_{tt}^0 + \xi_n \kappa_{tt}^0 - \xi_v \kappa_{tn}^0 - \gamma_0 T_0) t + G_0 \left( \xi_n + \frac{\partial \varphi}{\partial \xi_v} \right) \kappa_{tv}^0 v + \\ &+ G_0 \left( -\xi_v + \frac{\partial \varphi}{\partial \xi_n} \right) \kappa_{tn}^0 n \end{aligned} \quad (2.2)$$

где  $\varphi$  — функция кручения Сен-Венана [10].

Вычисляя главный вектор и главный момент

$$F^0 = \int_S \sigma_t dS, \quad B^0 = \int_S \xi \times \sigma_t dS$$

напряжений, действующих в поперечном сечении стержня, приходим к следующим определяющим уравнениям термоупругости для тонкого кри-

волинейного стержня:

$$b^{\circ} = K\kappa^{\circ} - K\kappa_T^{\circ} \quad (2.3)$$

$$b^{\circ} = \begin{pmatrix} B_v^{\circ} \\ B_t^{\circ} \\ B_n^{\circ} \\ F_t^{\circ} \end{pmatrix}, \quad \kappa^{\circ} = \begin{pmatrix} -\kappa_{tt}^{\circ} \\ \kappa_{tv}^{\circ} \\ -\kappa_{tn}^{\circ} \\ \varepsilon_{tt_0}^{\circ} \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} K_v & 0 & -K_{vn} & 0 \\ 0 & K_t & 0 & 0 \\ -K_{vn} & 0 & K_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_t \end{pmatrix}$$

$$K\kappa_T^{\circ} = \int_S \gamma_0 E_0 T_0 \| \xi_n, 0, -\xi_v, -1 \|^{*} dS, \quad C_t = \int_S E_0 dS$$

$$K_v = \int_S E_0 \xi_n^2 dS, \quad K_n = \int_S E_0 \xi_v^2 dS, \quad K_{vn} = \int_S E_0 \xi_v \xi_n dS$$

Обычно для тонкого стержня допустимо соотношение  $G_0(\xi_v, \xi_n, s) \approx G_0(s)$ . Тогда

$$K_t = \frac{K_v + K_n}{2(1 + \nu_0)} + G_0 \int_S \left( \frac{\partial \varphi}{\partial \xi_v} \xi_n - \frac{\partial \varphi}{\partial \xi_n} \xi_v \right) dS$$

Вычисляя геометрическую жесткость при кручении  $I_t = K_t / G_0$  для различных нетонкостенных профилей, Сен-Венан установил, что хорошее приближение во всех случаях дает формула

$$I_t = S^4 / [4\pi^2 (I_v + I_n)], \quad I_v = K_v / E_0, \quad I_n = K_n / E_0$$

где  $S$  — площадь поперечного сечения стержня.

Рассмотрим условия сопряжения оболочки и стержня. Пусть на стержень (в пересчете на центральную ось) действует погонная нагрузка  $\mathbf{q}^e = q_v^e \mathbf{v} + q_t^e \mathbf{t} + q_n^e \mathbf{n}$ ,  $\mathbf{m}^e = m_v^e \mathbf{v} + m_t^e \mathbf{t} + m_n^e \mathbf{n}$ . Отделяя мысленно стержень от оболочки и заменяя действие последней соответствующими реакциями, статические условия сопряжения оболочки и стержня можно записать в виде [1] (фиг. 1):

$$\begin{aligned} \mathbf{q}^{\circ} &= \mathbf{Q}_v^e - \mathbf{Q}_v, & \mathbf{m}_t^{\circ} &= \mathbf{M}_{vv}^e - \mathbf{M}_{vv} + (\delta \times \mathbf{Q}_v)_t \\ Q_{vv}^e &= q_v^e - \tau_t m_v^e + dm_n^e / ds, & Q_{vt}^e &= q_t^e + \sigma_t m_v^e + \rho_t m_n^e \\ Q_{vn}^e &= q_n^e - dm_v^e / ds - \tau_t m_n^e, & M_{vv}^e &= m_t^e \end{aligned} \quad (2.4)$$

Отсюда с учетом уравнений равновесия элемента стержня

$$dE^{\circ} / ds + \mathbf{q}^{\circ} = 0, \quad d\mathbf{B}^{\circ} / ds + \mathbf{t} \times \mathbf{F}^{\circ} + \mathbf{m}^{\circ} = 0 \quad (2.5)$$

приходим к следующей интегральной форме статических условий сопряжения:

$$\mathbf{V}^{\circ} = \mathbf{V} - \mathbf{V}^e + \mathbf{\Pi}, \quad \mathbf{F}^{\circ} = \mathbf{F} - \mathbf{F}^e$$

$$\mathbf{F}^e = \int_{s_0}^{s_t} \mathbf{Q}_v ds_t', \quad \mathbf{\Pi} = \int_{s_0}^{s_t} (\delta \times \mathbf{Q}_v)_t ds_t' \quad (2.6)$$

$$\mathbf{V}^e = \int_{s_0}^{s_t} (\mathbf{M}_{vv}^e \mathbf{t} + \mathbf{F}^e \times \mathbf{t}) ds_t'$$

Далее на основании фиг. 1 условия совместности деформаций центральной оси стержня и края срединной поверхности оболочки имеют вид  $\Omega^{\circ} = \Omega_t$ ,  $\mathbf{U}_0^{\circ} = \mathbf{U}_t + \delta \times \Omega_t$ . Эти соотношения при помощи кинематических урав-

нений Клебша  $dU^\circ/ds + t \times \Omega^\circ + \varepsilon_t^\circ = 0$ ,  $d\Omega^\circ/ds - \kappa_t^\circ = 0$  можно записать так:

$$\begin{aligned} \kappa_t^\circ &= \frac{d\Omega^\circ}{ds} \approx \frac{d\Omega_t}{ds_t} = \kappa_{t_t}, \quad \varepsilon_{tt}^\circ = t \cdot \left( \frac{dU_0^\circ}{ds} + t \times \Omega^\circ \right) = \\ &= t \cdot \left( \frac{dU_t}{ds} + t \times \Omega_t + \delta \times \frac{d\Omega_t}{ds} + \frac{d\delta}{ds} \times \Omega_t \right) \approx \varepsilon_{tt} + (\delta \times \kappa_t)_t \end{aligned} \quad (2.7)$$

Здесь учтено, что в силу принятого допущения о тонкости стержня  $ds_t/ds \sim 1 + \eta/R \approx 1$ ,  $|d\delta/ds| \sim \eta/R$ . Слагаемое  $d\delta/ds \times \Omega_t$  опущено из-за его малости по сравнению с предыдущим слагаемым.

Геометрические условия сопряжения (2.7) с учетом температурной деформации оболочки можно представить в виде

$$\kappa^\circ = \kappa + d_n + \chi_T + d_T, \quad d_n = \|0, 0, 0, (\delta \times \kappa_t)_t\|^* \quad (2.8)$$

$$\chi_T = \left\| -\kappa_T, 0, \frac{\partial \varepsilon_T}{\partial s}, \varepsilon_T \right\|^*, \quad d_T = \left\| 0, 0, 0, -\delta_v \frac{\partial \varepsilon_T}{\partial s} - \delta_n \kappa_T \right\|^*$$

Пользуясь обозначениями  $b^e = \|B_v^e, B_t^e, B_n^e, F_t^e\|^*$ ,  $d_q = \|\Pi_v, \Pi_t, \Pi_n, 0\|^*$ , на основании (2.6) имеем

$$b^\circ = b - b^e + d_q \quad (2.9)$$

Исключая из соотношений термоупругости (2.3) величины, характеризующие напряженно-деформированное состояние стержня  $(b^\circ, \kappa^\circ)$ , при помощи условий сопряжения (2.8), (2.9) получим следующий вид граничных условий подкрепленного края оболочки при наличии температурных воздействий:

$$b - b^e + d_q = K(\kappa + d_n + \chi_T + d_T + \kappa_T^\circ) \quad (2.10)$$

Если принять линейный закон изменения температуры по сечению стержня  $T_0(\xi_v, \xi_n, s) = t_0^\circ(s) + t_v^\circ(s)\xi_v + t_n^\circ(s)\xi_n$  и пренебречь изменчивостью в нем (сечении) физических характеристик  $(E_0(\xi_v, \xi_n, s) \approx E_0(s), \nu_0 = \nu_0(s))$ , то получим  $\kappa_T^\circ = \|\gamma_0 t_n^\circ, 0, -\gamma_0 t_v^\circ, -\gamma_0 t_0^\circ\|^*$ .

Предполагая также линейность температуры по толщине оболочки, граничные условия подкрепленного края (2.10) можно записать в развернутом виде:

$$\left\| \begin{array}{l} B_v - B_v^e + \Pi_v \\ B_t - B_t^e + \Pi_t \\ B_n - B_n^e + \Pi_n \\ F_t - F_t^e \end{array} \right\| = K \left\| \begin{array}{l} -\kappa_{tt} - \gamma t_t + \gamma_0 t_n^\circ \\ \kappa_{tv} \\ -\kappa_{tn} + \gamma \frac{\partial t_0}{\partial s_v} - \gamma_0 t_v^\circ \\ \varepsilon_{tt} + \delta_v \left( \kappa_{tn} - \gamma \frac{\partial t_0}{\partial s_v} \right) - \\ - \delta_n (\kappa_{tt} + \gamma t_t) + \gamma t_0 - \gamma_0 t_0^\circ \end{array} \right\| \quad (2.11)$$

С учетом соотношений (1.6) граничные условия (2.10) можно использовать в одной из дифференциальных форм записи:

$$q - q^e + d_q^\sim = \Gamma K(\kappa + d_n + \chi_T + d_T + \kappa_T^\circ) \quad (2.12)$$

$$q - q^e + d_q^\sim = \Gamma K(\Gamma u + d_n + \chi_T + d_T + \kappa_T^\circ) \quad (2.13)$$

$$d_q^\sim = \Gamma d_q = \|0, 0, 0, (\delta \times Q_v)_t\|^*$$

3. Деформационные условия сопряжения стержня с краем оболочки (2.8) используем для вывода уравнений, описывающих напряженно-деформированное состояние в ребристой оболочке, помещенной в стационарное температурное поле. Пусть оболочка подкреплена системой перекрестных ребер, расположенных вдоль линий  $s_t$  и  $s_t'$ , таких, что  $t \cdot e_2 = \cos \omega$ ,  $t \cdot t' = \cos \psi$ . При деформировании оболочки влияние ребер сказывается в по-

явлении сил реакции, действующих в зоне контакта ребер и оболочки. Предполагая для определенности, что реакции распределяются равномерно по ширине зоны контакта, уравнения равновесия ребристой оболочки можно записать в виде

$$R_0 L_1 t + L_2 m = -AB \left\{ p + \sum_{i=1}^I \Delta(\varepsilon_v^{(i)}, b_i; s_v) p^\sim(s_i^{(i)}) + \sum_{j=1}^J \Delta(s_v^{(j)}, b_j'; s_v') p_0^\sim(s_i^{(j)}) \right\} \quad (3.1)$$

$$p^\sim = \|e_\alpha \cdot p^\sim, e_\beta \cdot p^\sim, n \cdot p^\sim\|^*, \quad p_0^\sim = \|e_\alpha \cdot p_0^\sim, e_\beta \cdot p_0^\sim, n \cdot p_0^\sim\|^*$$

$$\Delta(s_0, b_0; s) = \frac{1}{2b_0} [H(s-s_0+b_0) - H(s-s_0-b_0)]$$

$$H(s-s_0) = 0 \quad (s < s_0), \quad H(s-s_0) = 1/2 \quad (s = s_0)$$

$$H(s-s_0) = 1 \quad (s > s_0), \quad \lim_{b_0 \rightarrow 0} \Delta(s_0, b_0; s) = \delta(s-s_0)$$

Здесь  $p^\sim(s_i^{(i)})$ ,  $p_0^\sim(s_i^{(i)})$  — погонные силы реакции стержня при деформации оболочки, приведенные к срединным линиям контакта,  $2b_i$  — ширина полосы контакта стержня и оболочки,  $\delta(\dots)$  — дельта-функция.

Статические условия сопряжения ребра и оболочки с учетом первого уравнения равновесия стержня (2.5) записываются так:

$$p^\sim(s_i^{(i)}) = -q^\circ(s_i^{(i)}) = \frac{dF^\circ}{ds_t^{(i)}}, \quad p_0^\sim(s_i^{(i)}) = -q_0^\circ(s_i^{(i)}) = \frac{dF^\circ}{ds_t^{(i)}} \quad (3.2)$$

Для формулировки геометрических условий сопряжения рассмотрим часть оболочки в зоне контакта с ней  $i$ -го ребра жесткости. Разрезая мысленно оболочку вдоль линии контакта  $s_v^{(i)} = \text{const}$  плоскостью, нормальной к срединной поверхности, и рассматривая сопряжение одной из полученных частей оболочки (фиг. 2) с  $i$ -м ребром, приходим к соотношению (2.8) (при  $s_t^{(i)} = s_t$ ).

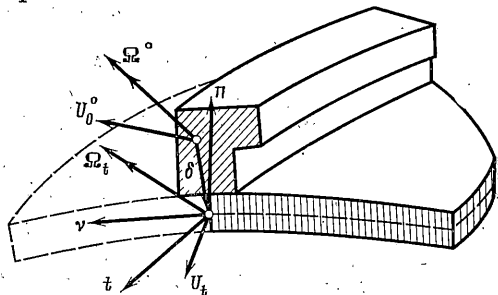
Далее выразим реакции стержня через параметры деформации оболочки и функции температур. Второе уравнение (2.5) в данном случае имеет вид

$$dB^\circ/ds + t \cdot F^\circ + \delta \times q^\circ = 0 \quad (3.3)$$

В силу оценки  $|\delta \times q^\circ| = |\delta \times dF^\circ/ds| \sim |\delta| |F^\circ|/R$  последнее в (3.3) слагаемое мало по сравнению с предыдущим слагаемым и может быть отброшено. Учитывая также, что  $d/ds \approx d/ds_t$ , и используя правила дифференцирования ортов

$$\frac{d}{ds_t} \begin{pmatrix} v \\ t \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \rho_t & -\tau_t \\ -\rho_t & 0 & \sigma_t \\ \tau_t & -\sigma_t & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ t \\ n \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

$$(v = e_\alpha \cos \omega + e_\beta \sin \omega, \quad t = -e_\alpha \sin \omega + e_\beta \cos \omega)$$



Фиг. 2

из (3.3) находим

$$F_v^\circ = \frac{dB_n^\circ}{ds_t} - \tau_t B_v^\circ + \sigma_t B_t^\circ, \quad F_n^\circ = -\frac{dB_v^\circ}{ds_t} + \rho_t B_t^\circ - \tau_t B_n^\circ$$

Исключая при помощи этих формул  $F_v^\circ$  и  $F_n^\circ$  из правых частей равенств (3.2), учитывая соотношения термоупругости для стержня (2.3) и условия сопряжения (2.8), получим (индексы опущены)

$$\Phi^\vee(s_t) = \|\mathbf{v}, \mathbf{t}, \mathbf{n}\| Q b^\circ = \|\mathbf{v}, \mathbf{t}, \mathbf{n}\| Q K (\kappa^\circ + \kappa_T^\circ) = \|\mathbf{v}, \mathbf{t}, \mathbf{n}\| Q K (\kappa + d_\kappa + \kappa_T + d_T + \kappa_T^\circ),$$

$$Q = \left\| \Gamma_0 \begin{array}{c} 1 - \rho_t \\ \frac{d(\quad)}{ds_t} \\ \sigma_t \end{array} \right\| \quad (3.5)$$

Если не принимать во внимание индексы, то формула для  $\rho_0^\vee(s_t)$  идентична (3.5).

Таким образом получены линейные уравнения термостатики оболочек, подкрепленных тонкими стержнями, деформирующимися в соответствии с гипотезой жесткого контура. Запишем формулу (3.5) в развернутом виде для наиболее распространенного случая подкрепления оболочки системами ребер, расположенных вдоль линий кривизны.

В этом случае имеем ( $\omega=0$ ):

$$\begin{aligned} p_1^\vee &= \frac{K_{vn}}{A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left( \frac{1}{A_2} \frac{\partial \kappa_2^1}{\partial \alpha_2} \right) - \frac{K_t}{A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left( \frac{\kappa_{21}}{R_2} \right) - \\ &\quad - \frac{K_n}{A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left( \frac{1}{A_2} \frac{\partial \kappa_{2n}^1}{\partial \alpha_2} \right) - \frac{C_t}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \varepsilon_2^1 \\ p_2^\vee &= \left( \frac{K_{vn}}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} + \frac{K_v}{R_2} \right) \frac{1}{A_2} \frac{\partial \kappa_2^1}{\partial \alpha_2} - \left( \frac{K_n}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} + \frac{K_{vn}}{R_2} \right) \frac{1}{A_2} \frac{\partial \kappa_{2n}^1}{\partial \alpha_2} + \frac{C_t}{A_2} \frac{\partial \varepsilon_2^1}{\partial \alpha_2} \\ p_n^\vee &= \frac{K_v}{A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left( \frac{1}{A_2} \frac{\partial \kappa_2^1}{\partial \alpha_2} \right) + \frac{K_t}{A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left( \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \kappa_{21} \right) - \\ &\quad - \frac{K_{vn}}{A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left( \frac{1}{A_2} \frac{\partial \kappa_{2n}^1}{\partial \alpha_2} \right) - \frac{C_t}{R_2} \varepsilon_2^1 \\ \kappa_2^1 &= \kappa_2 + \gamma t_1 - \gamma_0 t_n^\circ, \quad \kappa_{2n}^1 = \kappa_{2n} - \frac{\gamma}{A_1} \frac{\partial t_0}{\partial \alpha_1} + \gamma_0 t_v^\circ \\ \varepsilon_2^1 &= \varepsilon_2 + \delta_v \left( \kappa_{2n} - \frac{\gamma}{A_1} \frac{\partial t_0}{\partial \alpha_1} \right) - \delta_n (\kappa_2 + \gamma t_1) + \gamma t_0 - \gamma_0 t_0^\circ \\ \kappa_{21} &= \tau - \frac{\omega}{R_2}, \quad \kappa_{2n} = -\frac{1}{A_1 A_2} \left( \frac{\partial A_2 \varepsilon_2}{\partial \alpha_1} - \frac{\partial A_1 \omega}{\partial \alpha_2} - \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \varepsilon_1 \right) \end{aligned} \quad (3.6)$$

В расчетной практике известен целый ряд вариантов уравнений статики (без учета температурных слагаемых) ребристых оболочек (см., например, [6-8]). При этом без каких-либо количественных оценок обычно не учитываются слагаемые, связанные с изгибом стержня в плоскости оболочки, а также с его кручением. Покажем на простом примере необоснованность такого рода допущений. Рассмотрим оболочку вращения, подкрепленную шпангоутами. Используя традиционные для оболочки вращения обозначения  $ds_1 = R_1 d\theta$ ,  $ds_2 = r d\varphi$ ,  $r = R_2 \sin \theta$ ,  $\rho_2 r = \cos \theta$  и предполагая, что полное напряженное состояние вблизи шпангоута ( $\theta = \text{const}$ ) допускает

расчленение на основное (°) и простой краевой эффект (h), получим

$$\begin{aligned} \kappa_2^1 &\approx \frac{\cos \theta}{r} \vartheta_1^h + \kappa_2^\circ, & \kappa_{21} &\approx \frac{1}{r} \frac{\partial \vartheta_1^h}{\partial \varphi} + \kappa_{21}^\circ \\ \kappa_{2n}^1 &\approx \frac{\sin \theta}{r} \vartheta_1^h + \kappa_{2n}^\circ, & \varepsilon_2^1 &\approx \frac{\sin \theta}{r} w^h + \varepsilon_2^\circ \end{aligned}$$

Подставляя эти величины в (3.6), находим

$$p_1^\sim(\varphi) \approx -[(K_n + K_t) \sin \theta - K_{vn} \cos \theta] \frac{1}{r^3} \frac{\partial^2 \vartheta_1^h}{\partial \varphi^2} - \frac{C_t \cos \theta \sin \theta}{r^2} w^h + p_1^\circ(\varphi)$$

$$p_2^\sim(\varphi) \approx [(K_v - K_n) \cos \theta \sin \theta + K_{vn} \cos 2\theta] \frac{1}{r^3} \frac{\partial \vartheta_1^h}{\partial \varphi} + \frac{C_t \sin \theta}{r^2} \frac{\partial w^h}{\partial \varphi} + p_2^\circ(\varphi)$$

$$p_n^\sim(\varphi) \approx [(K_v + K_t) \cos \theta - K_{vn} \sin \theta] \frac{1}{r^3} \frac{\partial^2 \vartheta_1^h}{\partial \varphi^2} - \frac{C_t \sin^2 \theta}{r^2} w^h + p_n^\circ(\varphi)$$

Из этих соотношений видно, что погрешность упомянутых выше допущений существенно зависит от угла наклона меридиана  $\theta$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Михайловский Е. И. Расчленение граничных условий на подкрепленном краю оболочек. — В кн.: Исследования по упругости и пластичности. Сб. 7. Л.: Изд-во ЛГУ, 1968, с. 13—27.
2. Михайловский Е. И. Формулировка граничных условий подкрепленного края в линейной теории оболочек. — В кн.: Тр. 10-й Всес. конф. по теории оболочек и пластин. Т. 1. Тбилиси: Мецниереба, 1975, с. 221—229.
3. Михайловский Е. И. О прямой и обратной задачах линейной теории оболочек с подкрепленным краем. — В кн.: Механика деформируемых тел и конструкций. М.: Машиностроение, 1975, с. 298—303.
4. Феодосьев В. И. Сопротивление материалов. М.: Наука, 1975. 544 с.
5. Тимошенко С. П. История науки о сопротивлении материалов с краткими сведениями из истории теории упругости и теории сооружений. М.: Гостехтеориздат, 1957. 536 с.
6. Методы расчета оболочек. Т. 2. Амиро И. Я., Заруцкий В. А. Теория ребристых оболочек. Киев: Наук. думка, 1980. 367 с.
7. Гребень Е. С. О деформациях и равновесии подкрепленных ребрами тонких оболочек. — Изв. АН СССР. МТТ, 1969, № 5, с. 106—114.
8. Жилин П. А. К анализу краевых задач для ребристых оболочек. — Тр. Центр. котлотурб. ин-та, 1966, вып. 72, с. 26—40.
9. Черных К. Ф. Линейная теория оболочек. Ч. 2. Л.: Изд-во ЛГУ, 1964. 395 с.
10. Новожилов В. В. Теория упругости. Л.: Судпромгиз, 1953. 370 с.
11. Сен-Венан Б. Мемуар о кручении призм. Мемуар об изгибе призм. М.: Физматгиз, 1961. 518 с.

Сыктывкар

Поступила в редакцию  
9.XI.1982