

УДК 531.383

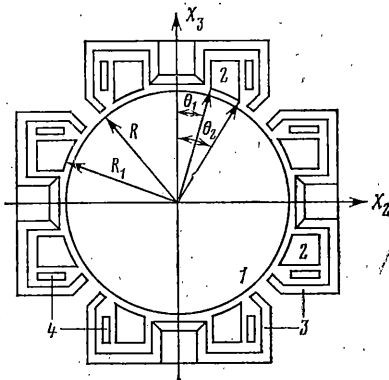
СИЛЫ И ВОЗМУЩАЮЩИЕ МОМЕНТЫ, ДЕЙСТВУЮЩИЕ НА РОТОР КРИОГЕННОГО ГИРОСКОПА

ВОРОБЬЕВ А. И., УРМАН Ю. М.

Применение для приборостроения различных типов сверхпроводящих подвесов, в которых для формирования магнитного поля используются сверхпроводящие экраны [1, 2], делает практически важной задачу разработки методов расчета их силовых и моментных характеристик. Наряду с разработкой точных методов, используемых при расчетах сверхпроводящих катушечных подвесов [3-6], представляет интерес создание инженерного метода, позволяющего получить основные качественные характеристики криогенного подвеса в сочетании с удовлетворительной для инженерного проектирования надежностью оценок.

Цель настоящей работы — разработка такого метода применительно к различным типам сферических астатических криогенных подвесов с формирующими поле сверхпроводящими экранами.

1. Рассмотрим трехосевой подвес криогенного гироскопа. На фиг. 1 показано сечение такого подвеса в плоскости OX_2X_3 . Сечения подвеса в плоскостях OX_1X_2 и OX_1X_3 аналогичны указанному. Подвес состоит из сверхпроводящего сферического ротора 1; экранов-корректоров 2 (рабочая поверхность которых образует сверхпроводящие сферические пояса, а односвязность обеспечивается тонкими радиальными разрезами); дополнительных сверхпроводящих многосвязных экранов 3, уменьшающих потоки рассеяния; сверхпроводящих катушек с токами 4 (каждая из них содержит по две обмотки — по одной протекает незапускающий ток, создающий основной поток подвеса, по второй — ток управления, и создаваемый им поток обеспечивает центрирование ротора в подвесе при наличии ускорения). Для управления может быть использован сигнал с акселерометров, установленных по соответствующим осям подвеса. Обычно стремятся создать конструкцию подвеса так, чтобы развязать потоки по каждой из осей подвеса. Тогда подвес можно считать образованным из трех одноосных подвесов, действие на ротор которых независимо.



Фиг. 1

Известно [2, 7], что основными возмущающими факторами, приводящими к паразитным моментам, являются несферичность ротора, магнитный момент (момент Лондона), обусловленный его вращением, а также «захваченный» ротором магнитный поток.

Рассмотрим вначале момент сил, вызванных несферичностью ротора. Введем системы координат X_i и ξ_i ($i=1, 2, 3$), первая из которых связана с подвесом, а вторая — с ротором. Начало системы координат O считаем совпадающим с центрами масс ротора и симметрии подвеса. Положение

системы координат ξ_i относительно X_i определим углами Эйлера α, β, γ . В [7] показано, что если поверхность ротора, мало отличающаяся от сферы, описать в системе координат X_i выражением

$$r = R \left[1 + \sum_{k=1}^n \sum_{m=-k}^k \varepsilon_{km} Y_{km}(\Omega) \right], \quad \varepsilon_{km} = \sum_{s=-k}^k D_{ms}^{*k}(\alpha, \beta, \gamma) \varepsilon_{ks} \quad (1.1)$$

где ε_{ks} — величина, характеризующая несферичность ротора, Y_{km} — сферическая функция, определенная без нормирующего множителя $[4\pi/(2k+1)]^{-1/2}$, Ω — совокупность сферических углов θ, φ в системе координат X_i , задающих положение вектора r , проведенного из точки закрепления O к точкам поверхности ротора; полярная ось направлена вдоль X_3 ; R — средний радиус сферы, $D_{ms}^k(\alpha, \beta, \gamma)$ — обобщенная сферическая функция [8], то моменты, обусловленные взаимодействием несферического ротора с полем подвеса, удобно вычислять по силовой функции, определяемой так:

$$W = \sum_{k=1}^n W_k, \quad W_k = \sum_{m=-k}^k \varepsilon_{km}^* Q_{km} \quad (1.2)$$

W_k — силовая функция взаимодействия k -й гармоники формы ротора с полем подвеса, а

$$Q_{km} = -\frac{1}{2} R^3 \mu_0 \int_{\Omega} H^2 Y_{km}(\Omega) d\Omega \quad (1.3)$$

$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м — магнитная постоянная, H — напряженность магнитного поля на поверхности ротора.

При $k=1$ выражение (1.3) переходит в

$$Q_{1m} = -\frac{1}{2} R^3 \mu_0 \int H^2 Y_{1m}(\Omega) d\Omega = -\frac{1}{2} \mu_0 R \int H^2 n_m dS \quad (1.4)$$

что с точностью до множителя R совпадает с циклической проекцией силы, действующей на сферический ротор радиуса R со стороны поля подвеса. При преобразованиях вращения величины Q_{km} преобразуются как неприводимые тензоры [8] ранга k . Поэтому величину Q_{km} назовем силовым тензором ранга k .

В практических расчетах интерес представляет значение силовой функции, усредненной по свободному движению динамически симметричного ротора. При движении ротора меняется только величина ε_{km} (1.1). Как показано в [9], ее среднее значение равно $\langle \varepsilon_{km} \rangle = \varepsilon_{k0} P_k(\cos \beta_0) Y_{km}^*(\rho, \sigma)$, где $P_k(\cos \beta_0)$ — полиномы Лежандра, β_0 — угол нутации ротора, ρ, σ — углы, характеризующие положение вектора кинетического момента относительно опорной системы координат, в данном случае системы X_i .

Если ротор по форме имеет осесимметричное возмущение ($s=0$), то из второй формулы (1.1) следует $\varepsilon_{km} = \varepsilon_{k0} Y_{km}^*(\beta, \alpha)$. При $\beta_0=0$ среднее значение $\langle \varepsilon_{km} \rangle$ и ε_{km} по виду совпадают. Однако в первом случае углы ρ, σ характеризуют положение вектора кинетического момента, а во втором — положение оси симметрии ротора. Таким образом, силовая функция, отвечающая взаимодействию поля подвеса с ротором, имеющим осесимметричное возмущение формы, совпадает по виду с силовой функцией взаимодействия поля подвеса с ротором, имеющим произвольное возмущение формы, но осредненной по свободному движению симметричного ротора.

Подставляя $\varepsilon_{km} = \varepsilon_{k0} Y_{km}^*(\beta, \alpha)$ в (1.2), найдем, что силовая функция взаимодействия k -й гармоники формы ротора с полем подвеса определя-

ется выражением

$$W_k = \varepsilon_{k0} \sum_{m=-k}^k Q_{km} Y_{km}^*(\beta, \alpha) \quad (1.5)$$

Момент может быть определен по силовой функции (1.5) через неприводимый тензор первого ранга [10] по формуле

$$(M_k)_i = \varepsilon_{k0} (-1)^k i \sqrt{\frac{k(k+1)(2k+1)}{3}} \{Y_k \otimes Q_k\}_i$$

или в координатной записи

$$(M_k)_{i\mu} = \varepsilon_{k0} (-1)^k i \sqrt{\frac{k(k+1)(2k+1)}{3}} \sum_{\nu=-k}^k Y_{k\nu} Q_{k\mu-\nu} C_{k\nu k\mu-\nu}^{i\mu}$$

где $C_{k\nu k\mu-\nu}^{i\mu}$ — коэффициент Клебша — Гордана [8]. Индекс μ принимает три значения: $-1, 0, 1$, что отвечает циклической проекции момента: $M_0 = M_{x_3}$, $M_1 = -(M_{x_1} + iM_{x_2})/\sqrt{2}$, $M_{-1} = -M_1^*$.

Если поле осесимметрично, то выражение момента можно представить в обычной векторной форме

$$M_k = \varepsilon_{k0} Q_{k0} \frac{dP_k(\gamma_i)}{d\gamma_i} [e_i, e] \quad (1.6)$$

Здесь e_i — орт i -й оси симметрии подвеса, e — орт оси фигуры ротора, либо кинетического момента, $\gamma_i = (e_i, e)$ — косинус угла между ортом e_i и e .

2. Из приведенных формул следует, что определение момента в принципе сводится к нахождению величин Q_{km} , так как угловая зависимость очевидна из тензорной природы взаимодействия. Вычисление этих коэффициентов требует конкретизации подвеса и в общем случае представляет значительные трудности из-за сложности определения поля на поверхности ротора. Для катушечных подвесов определение поля можно провести аналитически, решая граничную задачу [7], однако наличие в подвесах сверхпроводящих экранов с достаточно сложной и разнородной геометрией ограничивает возможности точных аналитических методов расчета поля, поэтому приходится прибегать к приближенным методам, используя упрощающие предположения.

В подвесах с корректирующими экранами мала величина зазора Δ между поверхностями рабочей части экранов и ротора, что позволяет в первом приближении считать поле в зазоре радиально однородным и пренебречь его воздействием на ротор вне экранов. В этом случае для определения поля на поверхности ротора можно использовать метод магнитных проводимостей [11, 12]. Так как в рассматриваемом трехосевом подвесе (фиг. 1) магнитные потоки по каждой из осей развязаны, то для определения магнитного поля достаточно рассмотреть одноосный подвес, действующий, например, вдоль оси X_3 . Рабочая поверхность экранов этого подвеса определена следующими координатами (фиг. 1): $r = R_1$, $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$, $\pi - \theta_2 \leq \theta \leq \pi - \theta_1$, $\theta_1 = \theta_0 - \Delta\theta$, $\theta_2 = \theta_0 + \Delta\theta$.

Каждая из сверхпроводящих катушек этого подвеса создает магнитный поток Φ , который в силу принятых допущений и осевой симметрии подвеса может быть определен в зазоре по формуле $\Phi = \mu_0 HS$, где S — площадь перпендикулярного к силовым линиям поля сечения части трубки магнитного потока, заключенной между поверхностями рабочей части экранов и ротора.

Обозначим магнитное сопротивление трубки магнитного потока R_m и запишем закон полного тока $IN = \Phi R_m$, где I — ток в катушке, N — число витков. Величину R_m представим в виде $R_m = R_0 + R_1$, где первое слагаемое

определяет магнитное сопротивление трубки в рабочем зазоре Δ , а второе — остальной части трубки.

Величину R_0 вычислим «методом определения проводимости вероятностного пути потока» [13]: $R_0 = l^2 / \mu_0 V$, где V — объем части трубки в рабочем зазоре Δ , l — длина средней линии магнитной индукции в объеме V . Величину R_1 полагаем заданной.

Проводя вычисления по формулам для $R_0 = l^2 / \mu_0 V$, $\Phi = \mu_0 HS$ с точностью до первого порядка по величине зазора Δ , найдем

$$H = \frac{IN \sin \theta_0 \sin \Delta \theta}{2R(\Delta \theta)^2 (1+n) \sin \theta} = \frac{h}{\sin \theta}, \quad n = \frac{R_1}{R_0} \quad (2.1)$$

3. Пусть оси симметрии сферических поясов экранов-корректоров совпадают с осями координат X_i . Занумеруем экраны так, чтобы положительному направлению X_i соответствовали номера $v = 2i - 1$, а отрицательному — $2i$ ($i = 1, 2, 3$). Подставляя (2.1) в (1.3) и используя формулу (1.6), найдем момент взаимодействия k -й гармоники формы ротора с полем трехосного подвеса (фиг. 1)

$$\mathbf{M}_k = -\varepsilon_{n0} \mu_0 \pi R^3 A_k(\theta_0, \Delta \theta) \sum_{i=1}^3 (h_{2i-1}^2 + (-1)^k h_{2i}^2) \frac{dP_k(\gamma_i)}{d\gamma_i} [\mathbf{e}_i, \mathbf{e}], \quad (3.1)$$

$$A_k(\theta_0, \Delta \theta) = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{P_k(\cos \theta)}{\sin \theta} d\theta$$

При $k=1$ из (3.1) получаем

$$\mathbf{M}_1 = -\varepsilon_{10} \mu_0 \pi R^3 \ln \frac{\sin \theta_2}{\sin \theta_1} \sum_{i=1}^3 (h_{2i-1}^2 - h_{2i}^2) [\mathbf{e}_i, \mathbf{e}] = \varepsilon_{10} R [\mathbf{F}, \mathbf{e}] \quad (3.2)$$

Сила, действующая на ротор со стороны поля подвеса, имеет вид

$$\mathbf{F} = -\mu_0 \pi R^2 \ln \frac{\sin \theta_2}{\sin \theta_1} \sum_{i=1}^3 (h_{2i-1}^2 - h_{2i}^2) \mathbf{e}_i \quad (3.3)$$

Эта сила вызвана ускорением подвеса и равна ma , где m — масса ротора, \mathbf{a} — ускорение центра подвеса, поэтому выражение (3.2), которое можно записать в виде $\mathbf{M} = \varepsilon_{10} R [\mathbf{a}, \mathbf{e}]$, есть момент, вызванный несовпадением центра приложения сил с центром масс ротора, т.е. момент дебаланса ротора.

Из равенства сил со стороны поля и сил инерции следует, что проекции ускорения на i -ю ось подвеса связаны с разностью квадратов поля вывешивающих систем подвеса формулой

$$a_i = -\frac{1}{m} \mu_0 \pi R^2 (h_{2i-1}^2 - h_{2i}^2) \ln \frac{\sin \theta_2}{\sin \theta_1} \quad (3.4)$$

Используя (3.4), нечетные гармоники момента можно выразить формулой

$$\mathbf{M}_{2k-1} = \varepsilon_{2k-1,0} R m \left(\ln \frac{\sin \theta_2}{\sin \theta_1} \right)^{-1} A_{2k-1}(\theta_0, \Delta \theta) \sum_{i=1}^3 \frac{dP_k(\gamma_i)}{d\gamma_i} a_i [\mathbf{e}_i, \mathbf{e}] \quad (3.5)$$

которая показывает, что момент от взаимодействия нечетных гармоник формы ротора с полем подвеса пропорционален первой степени ускорения подвеса. Величина $A_{2k-1}(\theta_0, \Delta \theta)$ характеризует зависимость момента от конструктивных параметров экранов-корректоров и будет исследована в дальнейшем.

Пусть ось фигуры ротора составляет малый угол с i -й осью подвеса, тогда с точностью до второго порядка малости по этому углу момент (3.5) имеет вид

$$M_{2k-1} = \varepsilon_{2k-1,0} \frac{Rm}{\ln(\sin \theta_2 / \sin \theta_1)} A_{2k-1}(\theta_0, \Delta\theta) [\mathbf{a}, \mathbf{e}] \quad (3.6)$$

При сравнении (3.6) с формулой (3.4) момента от дебаланса видно, что они отличаются лишь множителем, стоящим перед векторным произведением, зависящим от геометрии экранов. При неизменной конструкции подвеса отличить экспериментально момент дебаланса от нечетных гармоник момента при малом рассогласовании оси фигуры и оси подвеса трудно. Это существенно при идентификации величин уходов осесимметричного ротора.

Приведем выражение третьей гармоники момента

$$M_3 = -\frac{3}{2} \varepsilon_{30} m R \left(\ln \frac{\sin \theta_2}{\sin \theta_1} \right)^{-1} A_3(\theta_0, \Delta\theta) \left\{ [\mathbf{a}, \mathbf{e}] - 5 \sum_{i=1}^3 \gamma_i^2 a_i [\mathbf{e}_i, \mathbf{e}] \right\}$$

При рассмотрении четных гармоник момента считаем, что в отсутствие ускорений $h_{2i-1} = h_{2i} = h_0$, а при наличии $h_{2i-1} = h_0 - \Delta h_i$, $h_{2i} = h_0 + \Delta h_i$. Подставляя эти значения в (3.3), найдем

$$\Delta h_i = (m a_i) / [4 h_0 \pi R^2 \ln(\sin \theta_2 / \sin \theta_1)] \quad (3.7)$$

Используя (3.7), четные гармоники момента можно выразить в виде

$$M_{2k} = -2 \mu_0 \varepsilon_{2k,0} \pi R^3 h_0^2 A_{2k}(\theta_0, \Delta\theta) \sum_{i=1}^3 \frac{dP_{2k}(\gamma_i)}{d\gamma_i} [\mathbf{e}_i, \mathbf{e}] - \varepsilon_{2k,0} \frac{m^2 A_{2k}(\theta_0, \Delta\theta)}{8 \pi h_0^2 R \mu_0 \ln^2(\sin \theta_2 / \sin \theta_1)} \sum_{i=1}^3 \frac{dP_{2k}(\gamma_i)}{d\gamma_i} a_i^2 [\mathbf{e}_i, \mathbf{e}] \quad (3.8)$$

Таким образом, четные гармоники момента содержат два члена, один из которых не зависит от ускорения, а второй пропорционален квадрату ускорения. Из формулы (3.8) следует, что если ось фигуры совпадает с i -й осью подвеса, то $M_{2k} = 0$. Первый член в (3.8) равен нулю, когда ось фигуры совпадает с пространственной диагональю координатного трехгранника. Рассмотрим несколько первых гармоник момента. Из (3.8) при $k=1$ получаем выражение второй гармоники момента

$$M_2 = -\frac{3}{8} \frac{\varepsilon_{20} m^2 A_2(\theta_0, \Delta\theta)}{\pi h_0^2 \mu_0 R \ln(\sin \theta_2 / \sin \theta_1)} \sum_{i=1}^3 \gamma_i a_i^2 [\mathbf{e}_i, \mathbf{e}] = \\ = -\frac{3}{8} \frac{\varepsilon_{20} m^2 A_2(\theta_0, \Delta\theta)}{\pi h_0^2 \mu_0 R \ln^2(\sin \theta_2 / \sin \theta_1)} [\gamma_2 \gamma_3 (a_2^2 - a_3^2) \mathbf{e}_1 + \\ + \gamma_1 \gamma_3 (a_3^2 - a_1^2) \mathbf{e}_2 + \gamma_1 \gamma_2 (a_1^2 - a_2^2) \mathbf{e}_3]$$

которое показывает, что момент, вызванный эллипсоидальностью ротора, пропорционален квадрату ускорения. Если $a_1^2 = a_2^2 = a_3^2$, т.е. направление ускорения совпадает с одной из пространственных диагоналей координатного трехгранника, то момент равен нулю при любом положении оси фигуры в пространстве.

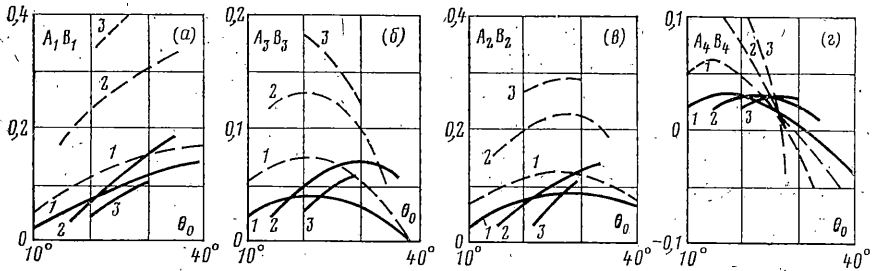
При $k=2$ из (3.8) получаем выражение четвертой гармоники момента

$$M_4 = -35 \mu_0 \varepsilon_{40} \pi R^3 h_0^2 A_4(\theta_0, \Delta\theta) \sum_{i=1}^3 \gamma_i^3 [\mathbf{e}_i, \mathbf{e}] -$$

$$\frac{5\epsilon_{40}m^2A_4(\theta_0, \Delta\theta)}{16h_0^2\pi R\mu_0 \ln(\sin\theta_2/\sin\theta_1)} \sum_{i=1}^3 (7\gamma_i^3 - 3\gamma_i) a_i^2 [\mathbf{e}_i, \mathbf{e}]$$

В отличие от M_2 четвертая гармоника момента имеет часть, не зависящую от ускорения. Таким образом, первый не исчезающий член в моменте при отсутствии ускорения возникает в четвертой гармонике момента.

Рассмотрим теперь влияние геометрии экранов на величину силы и момента. При условии, что напряженность поля достигает величины критического значения для данного сверхпроводника на широте $\theta = \theta_1 = \theta_0 - \Delta\theta$, зависимость силы и момента от геометрических параметров θ_0 и $\Delta\theta$ будет определяться коэффициентами $A_k^* = A_k(\theta_0, \Delta\theta) \sin^2 \theta_1$. На фиг. 2 графи-



Фиг. 2

чески сплошными линиями представлены $A_k^*(\theta_0)$ ($k=1 \div 4$) при фиксированных значениях $\Delta\theta$: 5, 10, 15°.

Из конструктивных соображений графики построены в интервале $\theta + \Delta\theta < \pi/4$.

Из фиг. 2, а следует, что начиная с $\Delta\theta \approx 15^\circ$ увеличение площади рабочей части экранов ведет к уменьшению силы, создаваемой подвесом, что обусловлено распределением поля на поверхности ротора по закону $1/\sin\theta$. Относительно гармоник момента можно сказать, что они повторяют зависимости силы от $\theta_0, \Delta\theta$, за исключением четвертой, которая имеет одинаковый максимум и с ростом $\Delta\theta$ увеличивается значение θ_0 , при котором она обращается в нуль.

Практически важно рассмотреть подвес с экранами, рабочая поверхность которых профилирована таким образом, что поле на поверхности ротора не зависит от широты θ ($H=h$). Расчеты показывают, что «радиус» R_e поверхности экранов в этом случае должен определяться по формуле $R_e^2 = [(2R + \Delta(\theta)) \Delta(\theta) \sin\theta + R^2 \sin^2\theta] / \sin^2\theta$, где $\Delta(\theta)$ — зазор, заданный на широте θ : $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$. В этом случае зависимость силы и момента от геометрических параметров $\theta_0, \Delta\theta$ будет определяться коэффициентами $B_k(\theta_0, \Delta\theta)$:

$$B_k(\theta_0, \Delta\theta) = \int_{\theta_1}^{\theta_2} P_k(\cos\theta) \sin\theta \, d\theta$$

На фиг. 2 представлены графически (пунктирными линиями) коэффициенты $B_k(\theta_0)$ ($k=1 \div 4$), где $\Delta\theta$ имеет три значения: 5, 10, 15°. Из фиг. 2 следует, что сила и момент в этом случае возрастают с увеличением $\Delta\theta$, однако степень увеличения силы $n_1 = B_1/A_1^*$ в рассмотренных случаях всегда больше степени увеличения гармоник момента $n_k = B_k/A_k^*$ ($k=2, 3, 4$). На фиг. 3 представлены графики $n_k(\theta_0)$ ($k=1 \div 4$) при $\Delta\theta=15^\circ$, откуда видно, что $n_1 > n_2 > n_3 > n_4$. Следует отметить, что с увеличением $\Delta\theta$ уменьшается θ_0 , где M_4 обращается в нуль. Этот факт может иметь существенное значение при проектировании подвеса. Если полагать, что вели-

чины θ_0 и $\Delta\theta$ из конструктивных соображений могут быть порядка 22,5 и 20° соответственно, то для этих значений $n_1=30,3$; $n_2=22,3$; $n_3=13,8$; $n_4=-0,31$, т. е. профилирование экранов в этом случае приводит к существенному ($n_1=30$) увеличению допустимого ускорения при сохранении работоспособности подвеса. При одном и том же ускорении профилирование экранов приводит к уменьшению $M_2 \div M_4$ соответственно в $n_1^2/n_2 \approx 40$, $n_1/n_2 \approx 2$, $n_1^2/n_4 \approx 2 \cdot 10^3$ раз.

4. Одним из неблагоприятных факторов, влияющих на работу сверхпроводящего гироскопа, является магнитный момент, обусловленный вращением ротора. Физически появление поля во вращающемся сверхпроводнике можно объяснить возникновением токов, которые в предельном случае $\lambda/R \rightarrow 0$ (λ — глубина проникновения поля в проводник, R — радиус шарового ротора) текут по поверхности сверхпроводника. Поэтому механический момент сил, действующий на вращающийся сверхпроводящий шар во внешнем поле, определяется известным выражением:

$$\mathbf{M} = R^3 \int_{\Omega} [\mathbf{r}, [\mathbf{j}, \mathbf{B}]] d\Omega \quad (4.1)$$

где $\mathbf{j} = \mathbf{j}_0 + \mathbf{j}_L$, $\mathbf{j}_0 = [\mathbf{r}, \mathbf{B}_0]$ — плотность поверхностного тока, наводимая внешним полем \mathbf{B}_0 (имеется в виду полное поле вне неподвижного сверхпроводника) на сверхпроводящем роторе, \mathbf{j}_L — плотность токов Лондона, \mathbf{r} — единичный радиус-вектор.

Подставляя \mathbf{j} и \mathbf{B} в (4.1), имеем

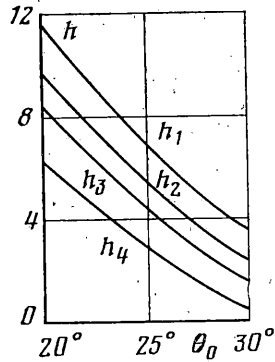
$$\begin{aligned} \mathbf{M} = R^3 \left(\int_{\Omega} [\mathbf{r}, [\mathbf{J}_0, \mathbf{B}_0]] d\Omega + \int_{\Omega} [\mathbf{r}, [\mathbf{J}_L, \mathbf{B}_L]] d\Omega + \right. \\ \left. + \int_{\Omega} [\mathbf{r}, [\mathbf{j}_L, \mathbf{B}_0]] d\Omega + \int_{\Omega} [\mathbf{r}, [\mathbf{j}_0, \mathbf{B}_L]] d\Omega \right) \end{aligned} \quad (4.2)$$

Первые два интеграла в (4.2) представляют результат действия внешнего поля и поля Лондона на себя, поэтому в силу сохранения момента количества движения они равны нулю. Так как поле \mathbf{B}_0 и плотность тока \mathbf{j}_L касательны к поверхности ротора, то их векторное произведение параллельно \mathbf{r} и, следовательно, третий интеграл также равен нулю. Таким образом, механический момент определяется только четвертым интегралом. Принимая во внимание, что $\mathbf{B}_L = 2m_e\omega/|e|$ (m_e — масса электрона, e — заряд электрона, ω — угловая скорость вращения ротора), момент можно выразить в виде

$$\mathbf{M}_L = \kappa R^3 \int_{\Omega} (\mathbf{r}, \omega) [\mathbf{r}, \mathbf{H}_0] d\Omega, \quad \kappa = \frac{2m_e}{|e|} \quad (4.3)$$

Из формулы (4.3) следует, что для определения момента необходимо найти магнитное поле на поверхности ротора. Для трехосного подвеса, который здесь рассматривается, это поле найдено в формуле (2.1). Учитывая, что направление магнитного поля на поверхности ротора совпадает с направлением сферического орта θ_i , подставляя (2.1) в (4.3) и проводя интегрирование, найдем

$$\mathbf{M}_L = 2\kappa R^3 \sin \theta_0 \sin \Delta\theta \sum_{i=1}^3 (h_{2i-1} - h_{2i}) [\mathbf{e}_i, \omega]$$



Фиг. 3

Так как $h_{2i-1} - h_{2i} = -2\Delta h_i$, то, учитывая (3.7), получим окончательное выражение момента

$$M_L = \frac{m \kappa R \sin \theta_0 \sin \Delta \theta}{h_0 \mu_0 \ln(\sin \theta_2 / \sin \theta_1)} [\omega, \mathbf{a}] \quad (4.4)$$

Таким образом, механический момент, вызванный токами Лондона, пропорционален ускорению. Он равен нулю, если $\omega \parallel \mathbf{a}$. Влияние конструктивных параметров подвеса на величину момента легко оценить по формуле (4.4), из которой, в частности, следует, что увеличение ширины экрана, а также параметра θ_0 (положение экрана) приводит к возрастанию момента.

5. При переходе материала ротора из нормального состояния в сверхпроводящее в неполностью экранированных внешних магнитных полях возможно «замораживание» магнитного потока в теле ротора. Этот поток жестко связан с ротором, и поэтому при его вращении в окружающем ротор пространстве возникает вращающееся магнитное поле, взаимодействующее с магнитным полем подвеса. Это взаимодействие приводит к моментам, ухудшающим работу прибора. Оценка этих моментов осложняется тем, что магнитное поле замороженного потока заранее непредсказуемо, так как оно зависит от начальных условий перехода ротора в сверхпроводящее состояние. В общем рассмотрении в дальнейшем будем считать, что вне ротора замороженное поле сверхпроводника описывается скалярным потенциалом, который в системе координат, связанной с телом ротора, можно разложить в ряд по сферическим функциям. Обозначим коэффициенты разложения потенциала поля в системе ξ_i через a_n (поле замороженного потока считается осесимметричным). Тогда в системе X_i это поле будет иметь потенциал в виде

$$V = \sum_{n,m} C_{nm} r^{-(n+1)} R^{2n+1} Y_{nm}(\theta, \varphi), \quad C_{nm} = a_n Y_{nm}(\beta, \alpha) \quad (5.1)$$

В разложении (5.1) индексу $n=1$ отвечает однородная, $n=2$ — градиентная составляющая магнитного поля замороженного потока. Механический момент, действующий на ротор, определяется формулой, вывод которой аналогичен выводу формулы (4.3)

$$\mathbf{M} = R^3 \int_{\Omega} \mathbf{j}_0 \cdot \mathbf{B}_r \, d\Omega, \quad \mathbf{j}_0 = [\mathbf{r}, \mathbf{B}_0], \quad \mathbf{B}_r = -\mu_0 \frac{\partial V}{\partial r} \Big|_{r=R} \quad (5.2)$$

Подставляя \mathbf{j}_0 и \mathbf{B}_r в формулу (5.2) и проводя интегрирование, найдем

$$\mathbf{M} = \frac{m}{2h_0 \ln(\sin \theta_2 / \sin \theta_1)} \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) R^n a_n [P_n(\cos \theta_2) - P_n(\cos \theta_1)] \sum_{i=1}^3 a_i \frac{dP_n(\gamma_i)}{d\gamma_i} [\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_i] \quad (5.3)$$

Рассмотрим частные случаи момента (5.3). Однородная составляющая поля приводит к моменту, который по своей структуре эквивалентен моменту от токов Лондона. Действительно, при $n=1$ из (5.3) имеем

$$\mathbf{M} = \frac{m R a_1 (\cos \theta_2 - \cos \theta_1)}{h_0 \ln(\sin \theta_2 / \sin \theta_1)} [\mathbf{e}_r, \mathbf{a}]$$

При $n=2$ момент (5.3) имеет вид

$$M = \frac{27mR^2 a_2 \sin 2\theta_0 \sin 2\Delta\theta}{2h_0 \ln(\sin \theta_2 / \sin \theta_1)} \sum_{i=1}^3 a_i \gamma_i [\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_i]$$

Из этой формулы следует, что если $a_1 = a_2 = a_3$, то при любом положении оси фигуры в пространстве момент равен нулю. Легко видеть, что геометрические параметры экрана так же, как и в моменте от токов Лондона, влияют на величину момента.

Пример. Рассчитаем максимальную силу, развиваемую подвесом в случае профилированного и сферического экранов при $R=10^{-2}$ м, $\theta_0=22,5^\circ$, $\Delta\theta=20^\circ$. Полагаем, что ускорение подвеса совпадает с X_3 и поле на поверхности ионобинового ротора достигает критического значения $H_m=10^5$ А/м. Из (3.3) следует, что максимальное усилие подвес развивает, когда в одной из двух вывешивающих систем по этой оси поле отсутствует (например, $h_5=0$). В другой системе в первом случае $h_5=H_m$, во втором $h_5=H_m \sin \theta_1$. По (3.3) с учетом коэффициентов B_1, A_1 получим $F_3=0,9$ Н и $F_3=0,03$ Н соответственно.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бухгольд Т. Сверхпроводящие гироскопы.— В кн.: Проблемы гироскопии. М.: Мир, 1967, с. 119–128.
2. Левин Л. А., Жидков А. А., Малгинский М. И. Физические основы, элементы и устройство криогенного гироскопа. Л., Центр. н.-и ин-т «Румб», 1979. 126 с.
3. Harding J. T., Lawson D. B. Superconducting gyroscope: drift data and mathematical model.— AIAA Journal, 1968, v. 6, No. 2, p. 305–314.— Рус. перев.: Ракетная техника и космонавтика, 1968, т. 6, № 2, с. 137–144.
4. Рябов Б. А., Горшков В. А., Рябов А. Б., Завадский А. М., Попов Ю. Б., Хлебцевич Ю. С. К анализу криогенных подвесов для космических летательных аппаратов.— Космич. исследования, 1972, т. 10, вып. 4, с. 515–519.
5. Урман Ю. М., Тамонова Е. П. К расчету силовой функции двухкатушечного подвеса несферичного сверхпроводящего ротора.— Изв. вузов. Приборостроение, 1976, т. 19, № 9, с. 65–68.
6. Урман Ю. М., Рушева Т. В. Влияние ускорений на моментные характеристики подвеса квазисферического сверхпроводящего ротора.— Изв. вузов. Приборостроение, 1979, т. 22, № 9, с. 58–61.
7. Урман Ю. М. Момент сил, вызванный несферичностью ротора, в криогенном подвесе.— Изв. вузов. Приборостроение, 1974, т. 17, № 11, с. 87–92.
8. Варшолович Д. А., Москалев А. Н., Херсонский В. К. Квантовая теория углового момента. Л.: Наука, 1975. 436 с.
9. Денисов Г. Г., Урман Ю. М. Прецессионные движения твердого тела под действием моментов, имеющих силовую функцию.— Изв. АН СССР. МТТ, 1975, № 6, с. 5–14.
10. Урман Ю. М. Неприводимые тензоры и их применение в задачах движения твердого тела в силовых полях.— Мех. тв. тела: Респ. межвед. сб. Киев: Наук. думка, 1983, вып. 15, с. 75–87.
11. Курис Э. Д., Черноморский А. И., Яковлев К. Б. К расчету силовых характеристик одного типа сферического бесконтактного подвеса.— Тр. Моск. авиац. ин-та, 1979, вып. 480, с. 108–110.
12. Колодеев И. Д. Сверхпроводящие элементы электроавтоматики. М.: М-во обороны, 1972. 96 с.
13. Славинская А. Г. Электромагниты и постоянные магниты. М.: Энергия, 1972. 248 с.

Горький

Поступила в редакцию
13.IV.1982