

УДК 539.215.37

ГРАВИТАЦИОННОЕ ТЕЧЕНИЕ СЫПУЧЕЙ СРЕДЫ ИЗ БУНКЕРОВ ПРИ НАЛИЧИИ ЗАСТОЙНЫХ ЗОН

КУЗНЕЦОВ А. С.

Устройства для хранения и выпуска сыпучих материалов принято классифицировать на бункера с массовым и несвободным истечением [1, 2]. Для бункера с массовым истечением характерны крутые гладкие стенки, что обеспечивает движение всего содержащегося в нем сыпучего материала. В [3] показано, что в большей части симметричных каналов с суживающимися прямолинейными стенками движение сыпучей среды близко к радиальному (линии тока совпадают с координатными поверхностями $\theta = \text{const}$; фиг. 1). Численные расчеты полей напряжений в предположении радиальности линий тока для случаев плоской деформации и осевой симметрии выполнены в [4]. Неизвестное кольцевое напряжение в последнем случае находилось с помощью гипотезы Хаара — Кармана о реализации так называемого полного пластического равновесия [5]. Для движения с осевой симметрией эти расчеты дают равенство нулю среднего нормального напряжения вдоль оси.

Бункера с несвободным истечением имеют, как правило, плоское горизонтальное дно. При истечении через выпускное отверстие в материале образуется внутренняя граница, которая отделяет область движения оси застойной зоны. В [6] экспериментально показано, что для идеально сыпучей среды положение границы зависит только от угла внутреннего трения. Установлено также, что поле скоростей в окрестности стока близко к радиальному.

В публикуемой статье в рамках модели несжимаемой, идеально сыпучей, кулоновой сплошной среды выполнены численные расчеты полей напряжений и скоростей в предположении радиальности линий тока для случаев плоской деформации и осевой симметрии. На основе анализа полученных полей радиальной скорости найдено положение застойных зон. Результаты расчетов сравниваются с данными опытов [6].

1. Рассмотрим уравнения для напряжений и скоростей в идеально сыпучей среде. Будем считать, что напряжения связаны условием Мора — Кулона [7]:

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \sin \delta (\sigma_1 + \sigma_2) \quad (1.1)$$

где σ_1 , σ_2 — наибольшее и наименьшее главные нормальные напряжения, δ — эффективный угол внутреннего трения. Для связи напряжений со скоростями деформации воспользуемся определяющими зависимостями Сен-Венана [8]:

$$\varepsilon_{ij}^{-1} / {}_3\varepsilon \delta_{ij} = \lambda^* (\sigma_{ij}^{-1} / {}_3\sigma \delta_{ij}) \quad (1.2)$$

Здесь ε_{ij} — тензор скоростей деформации, σ_{ij} — тензор напряжений, δ_{ij} — единичный тензор, σ , ε — линейные инварианты тензоров напряжений и скоростей деформации, λ^* — неотрицательная скалярная функция. Условие $\lambda^* \geq 0$ означает неотрицательность диссипируемой мощности при пластическом течении.

При радиальном движении несжимаемой среды для компоненты скорости u_r имеются два уравнения:

$$\partial u_r / \partial r + n u_r / r = 0 \quad (1.3)$$

$$\text{tg } 2\Psi \partial u_r / \partial r - 1/r \partial u_r / \partial \theta = \text{tg } 2\Psi u_r / r \quad (1.4)$$

Здесь и далее (см. фиг. 1) рассмотрение ведется в полярной (плоское

течение) или в сферической (осевая симметрия) системах координат r, θ, φ (φ — кольцевая координата); далее вводится параметр $n=1$ для плоской деформации и $n=2$ для осевой симметрии.

Функция Ψ в (1.4) есть угол наклона максимальной главной скорости деформации к радиусу. Если Ψ известна, то уравнения (1.3) и (1.4) образуют для u_r переопределенную систему. Условие разрешимости [9] будет выполнено, если $\partial\Psi/\partial r=0$.

Для расчета напряжений в случае плоской деформации уравнения равновесия и условия Мора — Кулона образуют определенную систему. При осесимметричном движении задача нахождения напряжений в общем случае не является статически определенной [10]. Однако в предположении радиальности линий тока и несжимаемости сыпучей среды из (1.2) следует, что в сферической системе координат $\sigma_\varphi = \sigma_\theta$ и, таким образом, система уравнений для напряжений также становится определенной.

Введем новые неизвестные функции q и γ по формулам [7]:

$$\sigma_r = q(1 + \sin \delta \cos 2\gamma), \quad \sigma_\theta = q(1 - \sin \delta \cos 2\gamma), \quad \tau_{r\theta} = q \sin \delta \sin 2\gamma \quad (1.5)$$

где γ — угол наклона максимального главного нормального напряжения к радиусу. Из (1.2) сразу получим $\gamma = \Psi$. Учитывая, что в переменных q, Ψ условие Мора — Кулона (1.1) удовлетворяется тождественно, из уравнений равновесия с учетом $\partial\Psi/\partial r=0$ будем иметь (здесь и далее сжимающие напряжения считаются положительными):

$$(1 + \sin \delta \cos 2\Psi) \frac{\partial q}{\partial r} + \sin \delta \sin 2\Psi \frac{1}{r} \frac{\partial q}{\partial \theta} + 2q \sin \delta \cos 2\Psi \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} = F_r$$

$$\sin \delta \sin 2\Psi \frac{\partial q}{\partial r} + (1 - \sin \delta \cos 2\Psi) \frac{1}{r} \frac{\partial q}{\partial \theta} + 2q \sin \delta \sin 2\Psi \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} = F_\theta$$

$$F_r = -\frac{2n}{r} q \sin \delta \cos 2\Psi - \frac{(n-1)}{r} q \sin \delta \sin 2\Psi \operatorname{ctg} \theta - \rho g \cos \theta$$

$$F_\theta = -\frac{(n+1)}{r} q \sin \delta \sin 2\Psi + \rho g \sin \theta \quad (1.6)$$

где ρ — плотность, g — ускорение силы тяжести.

Представим q и u_r в виде $q = \rho g r \chi(\theta)$, $u_r = r^{-n} f(\theta)$. Тогда система (1.6) и уравнение (1.4) примут вид

$$d\Psi/d\theta = -n + A/B, \quad d\chi/d\theta = -C/D \quad (1.7)$$

$$A = \cos^2 \delta + (n-1) \sin \delta \sin 2\Psi [\sin \delta \sin 2\Psi + (1 - \sin \delta \cos 2\Psi) \operatorname{ctg} \theta + [\cos \theta - \sin \delta \cos (2\Psi + \theta)] \chi^{-1}$$

$$B = 2 \sin \delta (\sin \delta - \cos 2\Psi),$$

$$C = \chi \sin 2\Psi [1 + (n-1) \sin \delta (\cos 2\Psi + \sin 2\Psi \operatorname{ctg} \theta)] + \sin (2\Psi + \theta)$$

$$D = \sin \delta - \cos 2\Psi, \quad df/d\theta = -(n+1) f \operatorname{tg} 2\Psi \quad (1.8)$$

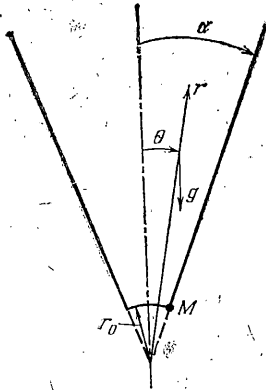
2. Рассмотрим постановку граничных условий для уравнений (1.7) и (1.8). При $\theta=0$ в силу симметрии $\tau_{r\theta}=0$. Это условие эквивалентно следующему: $\Psi(0) = \pi/2$. Для бункеров массового истечения, когда сыпучий материал движется вдоль стенок, экспериментально установлено [3], что напряжения на стенке связаны соотношением $\tau_{r\theta} = -\sigma_\theta \operatorname{tg} \delta_w$, где δ_w — угол трения между сыпучим материалом и стенкой. Из формул (1.5) следует, что последнее условие равносильно заданию функции Ψ на стенке

$$\Psi(\alpha) = \frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2}(\delta_w + \arcsin(\sin \delta_w / \sin \delta)) \quad (2.1)$$

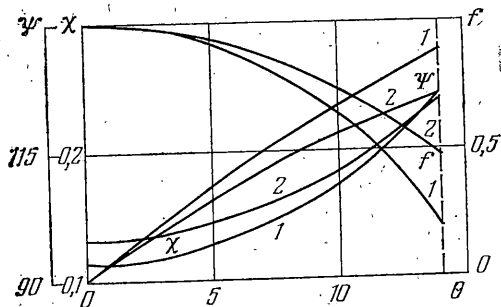
Для бункеров несвободного истечения материал вдоль стенок покоится и граничного условия вида (2.1) нет. С другой стороны, для таких бунке-

ров известно [1], что напряжения в окрестности выпускного отверстия не зависят от напора сыпучего материала над выпускным отверстием, формы наружной свободной поверхности и формы стенок вдали от стока. Следовательно, напряжения в некоторой окрестности стока должны однозначно определяться по параметрам сыпучей среды непосредственно в выпускном отверстии.

Рассмотрим в области $\Omega |r > 0; 0 \leq \theta \leq \alpha|$ (см. фиг. 1) задачу Гурса для системы (1.6) при дополнительном ограничении $\partial\Psi/\partial r = 0$. Дифферен-



Фиг. 1



Фиг. 2

циальные уравнения двух семейств характеристик этой системы имеют вид

$$rd\theta/dr = (\sin \delta - \cos 2\Psi) / \sin 2\Psi \quad (2.2)$$

$$dq + (F_0 \operatorname{ctg} 2\Psi - F_r) dr = 0$$

$$dr = 0, \quad \cos^2 \delta dq + 2q \sin \delta \sin 2\Psi d\Psi + [F_r \sin \delta \sin 2\Psi - F_0 (1 + \sin \delta \cos 2\Psi)] rd\theta = 0 \quad (2.3)$$

Характеристика первого семейства (2.2) при условии $\partial\Psi/\partial r = 0$ возникает в луч $\theta = \alpha$, когда

$$\Psi(\alpha) = 1/2 \delta + 3/4 \pi \quad (2.4)$$

Если напряжения заданы на характеристике $r = r_0$ (в выпускном отверстии), то они, очевидно, будут известны и на луче $\theta = \alpha$. Это следует из дифференциального соотношения на характеристиках первого семейства. Таким образом, область влияния начальных данных, заданных при $r = r_0$ (см. фиг. 1), покрывает всю область Ω , если в точке M пересечения характеристик $r = r_0$ и $\theta = \alpha$ функция Ψ определена по (2.3). Отметим, что проведенный далее анализ кинематически возможных полей радиальной скорости показывает, что полученные результаты будут иметь смысл, когда размер выпускного отверстия r_0 стремится к нулю, т. е. при движении в точечный сток.

Для уравнения (1.8) ставилось начальное условие $f(0) = 1$, которое необходимо для численного счета, так как в данной постановке скорость истечения и расход определяются только с точностью до постоянного множителя.

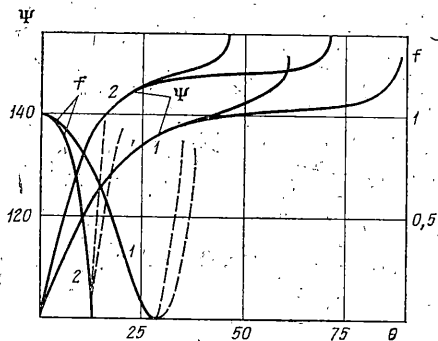
Система (1.7) решалась численно по схеме Рунге — Кутты четвертого порядка точности. Чтобы удовлетворить условиям на стенке, проводился расчет серии задач Коши при различных значениях $\chi(0) = \chi_0$ и из совокупности решений выбиралось такое, которое удовлетворяло краевому усло-

вию (2.1) или (2.4). Уравнение (1.8), содержащее особенность в точке $\theta = \theta_*$ ($\Psi(\theta_*) = \frac{3}{4}\pi$), сводилось к виду

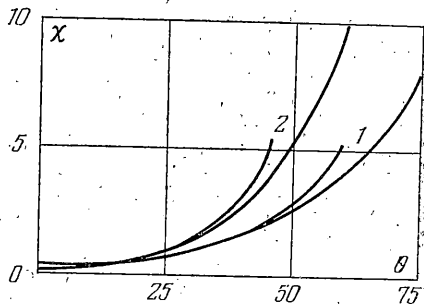
$$f(\theta) = \exp\left(- (n+1) \int_0^{\theta} \operatorname{tg} 2\Psi \, d\theta\right) \quad (2.5)$$

На каждом шаге интегрирования системы (1.7) интеграл в уравнении (2.5) рассчитывался по формуле трапеции. Когда особая точка попадала внутрь расчетного промежутка, вычислялось главное значение несобственного интеграла в смысле Коши.

Примеры расчетов по уравнениям (1.7), (2.5) для движения с осевой симметрией представлены на фиг. 2. Здесь показан вид функций Ψ , χ , f при $\delta = 30^\circ$, $\delta_w = 26^\circ$ и $\delta_w = 22^\circ$ (кривые 1, 2) для бункера, стенки которого составляют с осью симметрии угол $\alpha = 14^\circ$. Отметим, что для случая пло-



Фиг. 3



Фиг. 4

ского течения аналогичные результаты при $\delta = 50^\circ$ даны в [4], где использовались уравнения, совпадающие с (1.7) для $n=1$.

Результаты расчетов для бункера несвободного истечения при $n=1$ для различных δ и α представлены на фиг. 3, 4. Так, на фиг. 3 показан вид функций Ψ и f для $\delta = 40^\circ$ и $\delta = 50^\circ$ (кривые 1 и 2). Зависимости $\chi = \chi(\theta)$, соответствующие приведенным на фиг. 3 функциям Ψ , показаны на фиг. 4. Аналогичные результаты имеют место и при движении с осевой симметрией.

Перейдем к анализу полученных полей радиальной скорости при движении из бункера несвободного истечения. Из фиг. 3 видно, что при $\theta = \theta_*$ функция $f(\theta_*) = 0$. Используя (1.8), можно показать, что $\Psi(\theta_*) = \frac{3}{4}\pi$, причем при $\theta \rightarrow \theta_* - 0$ функция f стремится к нулю как $(\theta_* - \theta)^k$, $k = \frac{1}{2}(n+1) / (d\Psi/d\theta)$.

Оказывается, что профили скорости, определенные при $\theta > \theta_*$ (на фиг. 3 показаны пунктиром), не удовлетворяют условию $\lambda^* \geq 0$. Действительно, для функций λ^* из (1.2) имеем выражение $\lambda^* = (df/d\theta) / (2r^2 q \sin \delta \times \sin 2\Psi)$. Так как в исследуемой области $\sin 2\Psi$ знака не меняет, то справедливо равенство

$$\operatorname{sign} \lambda^* = - \operatorname{sign} df/d\theta \quad (2.6)$$

Из (2.6) получаем, что при $\theta > \theta_*$ функция $\lambda^* < 0$, но так как $f(\theta_*) = 0$, то очевидно, что в область $\theta > \theta_*$ функцию f можно продолжить только нулем. Следовательно, границей, отделяющей зону движения от покоящегося материала, будет луч $\theta = \theta_*$.

Здесь возможны три случая:

$$\left. \frac{df}{d\theta} \right|_{\theta = \theta_* - 0} = 0 \quad \left(\frac{d\Psi}{d\theta} < \frac{n+1}{2} \right)$$

$$\left. \frac{df}{d\theta} \right|_{\theta=\theta_*-0} = \text{const} < 0 \quad \left(\frac{d\Psi}{d\theta} = \frac{n+1}{2} \right)$$

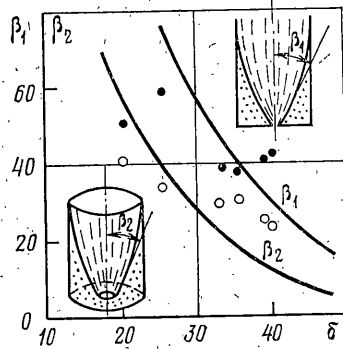
$$\left. \frac{df}{d\theta} \right|_{\theta=\theta_*+0} = -\infty \quad \left(\frac{d\Psi}{d\theta} > \frac{n+1}{2} \right)$$

Если в первом случае положение границы достаточно условно (величина f может быть порядка 10^{-3} , не доходя точки $\theta = \theta_*$ нескольких градусов), то в двух других случаях эта граница является поверхностью слабого разрыва радиальной скорости. Более того, на опыте третий случай должен соответствовать образованию при $\theta \approx \theta_*$ тангенциального разрыва, так как очевидно, что в сыпучей среде, состоящей из множества частиц конечного размера, не могут существовать непрерывные поля скоростей с бесконечно большими значениями скоростей сдвига.

Для бункера с плоским дном ($\alpha = 1/2\pi$) при плоском и осесимметричном течении была проведена серия расчетов при различных δ и определено положение застойных зон. Результаты расчетов показаны на фиг. 5 сплошными линиями. Здесь же нанесены экспериментальные данные из [6], где для различных идеально сыпучих материалов измерялись углы β_1 (кривая 1) и β_2 (кривая 2); светлые точки соответствуют осевой симметрии, темные — плоскому течению.

Проведенные расчеты согласуются с обнаруженным экспериментально результатом [6], который состоит в том, что существует некоторая область изменения угла полураспада стенок бункера $\alpha_* \leq \alpha \leq \pi/2$, когда положение застойной зоны не зависит от α . Это объясняется тем, что полученные при разных $\alpha > \alpha_*$ функции Ψ и соответствующие им профили скорости заметно отличаются только в области $\theta > \theta_*$ (см. фиг. 3). Например, при $n=1$ расчеты дают $\alpha_* \approx 60^\circ$ для $\delta=40^\circ$ и $\alpha_* \approx 45^\circ$ для $\delta=50^\circ$, т. е. с увеличением δ область $\alpha_* \leq \alpha \leq \pi/2$ расширяется.

Автор выражает благодарность В. Н. Николаевскому и Ю. П. Лунькину за внимание к работе и ряд ценных замечаний при обсуждении граничных условий.



Фиг. 5

ЛИТЕРАТУРА

1. Jenike A. W. Storage and flow of solids.—Bull. Univ. Utah, 1964, v. 53, No. 26, 198 p.— Рус. перев.: М.: Мир, 1968. 164 с.
2. Jenike A. W., Johanson J. R. On the theory of bin loads.—Trans. ASME. Ser. B. Engng. Industry, 1969, v. 91, No. 2, p. 339–344.
3. Johanson J. R. Stress and velocity fields in the gravity flow of bulk solids.—Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech., 1964, v. 31, No. 3, p. 499–506.— Рус. перев.: Тр. Америк. об-ва инж.-механ. Сер. Е. Прикл. механика. 1964, т. 31, № 3, с. 149–157.
4. Jenike A. W. Steady gravity flow of frictional-cohesive solids in converging channels.—Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech., 1964, v. 31, No. 1, p. 5–11.— Рус. перев.: Тр. Америк. об-ва инж.-механ. Сер. Е. 1964, т. 31, № 1, с. 8–15.
5. Ишлицкий А. Ю. Осесимметрическая задача пластичности и проба Бринелля.—ПММ, 1944, т. 8, вып. 3, с. 201–224.
6. Brown R. L., Richards J. C. Kinematics of the flow of dry powders and bulk solids.—Rheologica Acta, 1965, v. 4, No. 3, p. 153–165.
7. Соколовский В. В. Статика сыпучей среды. М.: Физматгиз, 1960. 243 с.
8. Курант Р. Уравнения с частичными производными. М.: Мир, 1964. 830 с.
9. Сен-Венан Б. Об установлении уравнений внутренних движений, возникающих в твердых пластических телах за пределами упругости.—Теория пластичности. Сб. статей. М.: Изд-во иностр. лит., 1948, с. 11–19.
10. Хилл Р. Математическая теория пластичности. М.: Гостехиздат, 1956. 407 с.

Ленинград

Поступила в редакцию
19.II.1982