МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 2 · 1984

УДК 539.389.3

СИНГУЛЯРНОСТЬ НАПРЯЖЕНИЙ В ПЛОСКОМ НАСЛЕДСТВЕННО УПРУГОМ СТАРЕЮЩЕМ ТЕЛЕ С УГЛОВЫМИ ТОЧКАМИ

МИХАЙЛОВ С. Е.

В работах последних десятилетий (см. [1–6]) широко исследовано поведение решений задач теории упругости в окрестности особых точек в двумерных и особых линий в трехмерных телах. В [7–8] изучалась асимптотика решений общих краевых задач для уравнений в частных производных в окрестности особых точек. В [9–10] дана асимптотика напряженно-деформированного состояния около края трещины в стареющем наследственно упругом теле.[1] Одним из общих методов таких исследований является решение при помощи интегральных преобразований задачи о бесконечном двумерном клине и затем распространение с использованием срезающей функции полученных результатов на тела произвольной формы с особыми точками.

В публикуемой работе такая методика применяется к изучению асимптотики напряжений в угловой точке изотропного стареющего наследственно упругого тела. Показано, что при заданных в окрестности угловой точки усилиях степень сингулярности напряжений не зависит от наследственных операторов и времени и определяется лишь геометрией. При заданных смещениях или смешанных граничных условиях получены степени сингулярности и явные выражения членов асимптотики для ряда частных случаев: некоторых величин углов, предельных времен, а также для случая установившихся колебаний. При произвольных углах раствора получены оценки роста членов асимптотики для любого момента времени.

1. Обобщенный закон Гука для рассматриваемого тела имеет вид [11, 12][2]

$$\sigma_{ij}=\lambda\varepsilon_{\alpha\alpha}\delta_{ij}+2\mu\varepsilon_{ij},\quad \lambda=\lambda_0(t)+\lambda^*,\quad (\lambda^*f)(t)=\int\limits_{-\infty}^{t}\lambda(t,\tau)f(\tau)\,d\tau$$

$$\mu=\mu_0(t)+\mu^*,\qquad (\mu^*f)(t)=\int\limits_{-\infty}^{t}\mu(t,\tau)f(\tau)\,d\tau$$

где $\lambda_0(t)$, $\mu_0(t)$, $\lambda(t,\tau)$, $\mu(t,\tau)$ — известные функции, тождественный оператор обозначается единицей. Если воздействие начинается в момент $t=0$, нижний предел интегрирования в этих формулах можно заменить нулем. Везде далее нулевым индексом помечаются внеинтегральные члены операторов, звездочкой — интегральные.

Учитывая независимость функций λ_0, λ, μ_0, μ от пространственных координат x, y, z, и следующую отсюда возможность перестановки операторов λ и μ с дифференцированием по координатам, можно повторить выкладки, проведенные в [13] для классической теории упругости, считая теперь λ и μ некоммутирующими наследственными операторами. В результате легко показать, что в случае плоской деформации или плоского

[1] Асимптотика напряжений и смещений в угловой точке в наследственно упругом теле без старения для ряда частных геометрий и предельных времен получена *С. А. Дуниным и С. Е. Михайловым* (О сингулярности напряжений в плоском наследственно упругом теле с угловыми точками.– В кн.: Всес. симпозиум «Ползучесть в конструкциях»: Тез. докл. Днепропетровск: Изд-во ДГУ, 1982, с. 36–37.)

[2] См. также: *Арутюнян Н. Х.* Теория ползучести неоднородно стареющих тел.– Препринт Ин-та проблем механики АН СССР. М., 1981, № 170, 76 с.

напряженного состояния будут верны представления Колосова — Мусхелишвили [13], дающие решение системы уравнений Ламе при отсутствии массовых сил, с заменой в них упругих постоянных соответствующими наследственными операторами

$$
\begin{gathered}
u_x+iu_y=\mu^{-1}[\varkappa\varphi(z)-z\overline{\varphi'(z)}-\overline{\psi(z)}]/2 \\
\sigma_x=\operatorname{Re}[2\varphi'(z)-\bar{z}\varphi''(z)-\psi'(z)] \\
\sigma_y=\operatorname{Re}[2\varphi'(z)+\bar{z}\varphi''(z)+\psi'(z)],\ \tau_{xy}=\operatorname{Im}[\bar{z}\varphi''(z)+\psi'(z)]
\end{gathered}
\tag{1.1}
$$

Для случая плоской деформации $\sigma_z=4\nu\operatorname{Re}[\varphi'(z)]$.

Здесь оператор $\varkappa=3-4\nu$ в случае плоской деформации и $\varkappa=(3-\nu)\times\times(1+\nu)^{-1}$ в случае плоского напряженного состояния; операторный коэффициент Пуассона $\nu={}^1/_2\lambda(\lambda+\mu)^{-1}$; $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ — аналитические функции комплексного аргумента $z=x+iy$, зависящие также от времени t.

Введем обозначения $z_1=z=ra_1(\theta)$, $z_2=\bar{z}=ra_2(\theta)$, $a_1=\cos\theta+i\sin\theta$, $a_2=\bar{a}_1$, $\varphi_1(z_1)=\varphi(z)$, $\varphi_2(z_2)=\overline{\varphi(z)}$, $\psi_1(z_1)=\psi(z)$, $\psi_2(z_2)=\overline{\psi(z)}$, $\Phi_i(z_i)=\varphi_i'(z_i)$, $\Psi_i(z_i)=\psi_i'(z_i)$, где r, θ — полярная система координат, штрихи обозначают производные аналитических функций $\varphi_j(z_j)$, $\psi_j(z_j)$ по своим аргументам. Тогда формулы Колосова — Мусхелишвили в полярных координатах имеют вид

$$
u_r=\frac{1}{4}\mu^{-1}\sum_{j=1}^{2}[a_{3-j}\varkappa\varphi_j-a_{3-j}z_j\varphi_j'-a_j\psi_j]
$$

$$
u_\theta=\frac{i}{4}\mu^{-1}\sum_{j=1}^{2}(-1)^j[a_{3-j}\varkappa\varphi_j+a_{3-j}z_j\varphi_j'+a_j\psi_j]
$$

$$
\sigma_r=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2}[2\varphi_j'-z_j\varphi_j''-a_j^2\psi_j'] \tag{1.2}
$$

$$
\sigma_\theta=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2}[2\varphi_j'+z_j\varphi_j''+a_j^2\psi_j'] \qquad \tau_{r\theta}=\frac{i}{2}\sum_{j=1}^{2}(-1)^j[z_j\varphi_j''+a_j^2\psi_j'']
$$

Будем определять напряженно-деформированное состояние бесконечного клина ($0<r<\infty$, $-\theta_0<\theta<\theta_0$) для трех случаев.

На обеих гранях заданы смещения (задача I—I):

$$
\begin{gathered}
u_r(r,-\theta_0,t)=f_1(r,t),\ u_\theta(r,-\theta_0,t)=f_2(r,t),\ u_r(r,\theta_0,t)=f_3(r,t), \\
u_\theta(r,\theta_0,t)=f_4(r,t)
\end{gathered}
\tag{1.3}
$$

На обеих гранях заданы усилия (задача II—II):

$$
\begin{gathered}
\sigma_\theta(r,-\theta_0,t)=g_1(r,t),\ \tau_{r\theta}(r,-\theta_0,t)=g_2(r,t),\ \sigma_\theta(r,\theta_0,t)=g_3(r,t), \\
\tau_{r\theta}(r,\theta_0,t)=g_4(r,t)
\end{gathered}
\tag{1.4}
$$

На одной из граней клина заданы усилия, а на другой — смещения (задача II—I):

$$
\begin{gathered}
\sigma_\theta(r,-\theta_0,t)=g_1(r,t),\ \tau_{r\theta}(r,-\theta_0,t)=g_2(r,t),\ u_r(r,\theta_0,t)=f_3(r,t), \\
u_\theta(r,\theta_0,t)=f_4(r,t)
\end{gathered}
\tag{1.5}
$$

Рассмотрим некоторые свойства преобразования Меллина. Пусть функция $h(r)$ удовлетворяет условиям

$$
h(r)=O(r^{-\alpha-\varepsilon})\ (r\to0),\ h(r)=O(r^{-\beta+\varepsilon}),\ (r\to\infty),\ \alpha<\beta,\ h(r)\in L(\varepsilon_0,\varepsilon_\infty) \tag{1.6}
$$

для любых ε_0, ε_∞ таких что $0<\varepsilon_0<\varepsilon_\infty<\infty$ и любого $\varepsilon>0$.

Тогда в полосе $\alpha<\operatorname{Re} s<\beta$ определено преобразование Меллина функции $h(r)$, а ее трансформанта $\langle h\rangle(s)=\int\limits_0^\infty h(r)r^{s-1}\,dr$. Обратное преобразование имеет вид

$$h(r)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty}\langle h\rangle(s)r^{-s}\,ds \qquad (\alpha<c<\beta) \tag{1.7}$$

Приведем для случая комплекснозначной функции $h(z)$ одно утверждение из [14], которое будет существенно использовано в дальнейшем.

Теорема 1. Пусть $h(z)$ — аналитическая функция аргумента $z=re^{i\theta}$, регулярная в угле D: $(\theta_1<\theta<\theta_2)$ и $h(z)=O(r^{-\alpha-\varepsilon})$ $(r\to 0)$, $h(z)=O(r^{-\beta+\varepsilon})$ $(r\to\infty)$ равномерно в любом угле, внутреннем к D для некоторых α и β, таких что $\alpha<\beta$, и любого $\varepsilon>0$. Тогда

$$h^{\vee}(s)=\int\limits_0^\infty h(z)z^{s-1}\,dz \tag{1.8}$$

есть аналитическая функция s, регулярная в полосе $\alpha<\operatorname{Re} s<\beta$

$$h^{\vee}(s)=O(\exp[(-\theta_1-\varepsilon)\operatorname{Im} s])\ (\operatorname{Im} s\to-\infty),\ h^{\vee}(s)=O(\exp[(-\theta_2+\varepsilon)\operatorname{Im} s])$$
$$(\operatorname{Im} s\to\infty)$$

для любого $\varepsilon>0$ равномерно в любой полосе, внутренней к полосе $\alpha<\operatorname{Re} s<\beta$, причем

$$h(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty}h^{\vee}(s)z^{-s}\,ds \qquad (\alpha<c<\beta) \tag{1.9}$$

Обратно, если $h^{\vee}(s)$ — заданная функция, удовлетворяющая указанным условиям, то функция $h(z)$, определенная формулой (1.9), удовлетворяет наложенным на нее выше условиям и имеет место формула (1.8).

Обычная трансформанта Меллина $\langle h\rangle(s,\theta)$ аналитической функции $h(z)$, удовлетворяющей условиям теоремы 1, тогда представима в виде

$$\langle h\rangle(s,\theta)=\int\limits_0^\infty h(ra_1(\theta))r^{s-1}\,dr=a_1^{-s}(\theta)h^{\vee}(s)$$

где функция $h^{\vee}(s)$ из (1.8) от угла θ уже не зависит. Обратное преобразование для $\langle h\rangle(s,\theta)$ будет иметь вид (1.7) или, что то же самое, (1.9).

Пусть заданные функции g_i и производные $f_i'=\partial f_i/\partial r$ удовлетворяют условиям (1.6) для некоторого $\alpha=\alpha_1<1$ и $\beta=1$ (условие 1).

Будем искать решения задач (I—I), (II—II) и (II—I) такие, что напряжения σ_{ij} удовлетворяют условиям (1.6) для некоторого $\alpha<1$ и $\beta=1$ (условие 2).

Условие 2 в нуле гарантирует ограниченность накопленной упругой энергии в любой ограниченной части клина, а условие на бесконечности, как будет видно из хода решения, обеспечивает существование и единственность решения. Когда исследуется асимптотика решения в произвольном двумерном теле с угловой точкой, то в соответствующей модельной задаче для бесконечного клина эти условия будут выполнены. Если условие 2 удовлетворено, то для функций $\Phi_j(z_j)$ и $\Psi_j(z_j)$ выполнены условия теоремы 1 с теми же α и β, и для определения этих функций применим преобразование Меллина к соотношениям Колосова — Мусхелишвили (1.2) и граничным условиям (1.3)—(1.5) (предварительно для удобства продифференцировав по r соотношения для смещений).

После подстановки преобразованных соотношений (1.2) в преобразованные граничные условия (1.3)—(1.5) получим для определения трансформант $\Phi_j^{\vee}$, $\Psi_j^{\vee}$ в каждой из задач свою систему линейных операторных уравнений.

Для задачи (I—I):

$$\sum_{j=1}^{2}(\varkappa-1+s)a_j^{-s}(-\theta_0)\Phi_j^{\vee}(s,t)-\sum_{j=1}^{2}a_j^{2-s}(-\theta_0)\Psi_j^{\vee}(s,t)=4[\mu\langle f_1'\rangle](s,t)$$

$$\sum_{j=1}^{2}(-1)^j(\varkappa+1-s)a_j^{-s}(-\theta_0)\Phi_j^{\vee}(s,t)+$$

$$+\sum_{j=1}^{2}(-1)^j a_j^{2-s}(-\theta_0)\Psi_j^{\vee}(s,t)=-4i[\mu\langle f_2'\rangle](s,t)$$

$$(1.10)$$

$$\sum_{j=1}^{2}(\varkappa-1+s)a_j^{-s}(\theta_0)\Phi_j^{\vee}(s,t)-\sum_{j=1}^{2}a_j^{2-s}(\theta_0)\Psi_j^{\vee}(s,t)=4[\mu\langle f_3'\rangle](s,t)$$

$$\sum_{j=1}^{2}(-1)^j(\varkappa+1-s)a_j^{-s}(\theta_0)\Phi_j^{\vee}(s,t)+$$

$$+\sum_{j=1}^{2}(-1)^j a_j^{2-s}(\theta_0)\Psi_j^{\vee}(s,t)=-4i[\mu\langle f_4'\rangle](s,t)$$

Для задачи (II—II):

$$\sum_{j=1}^{2}(2-s)a_j^{-s}(-\theta_0)\Phi_j^{\vee}(s,t)+\sum_{j=1}^{2}a_j^{2-s}(-\theta_0)\Psi_j^{\vee}(s,t)=2\langle g_1\rangle(s,t)$$

$$\sum_{j=1}^{2}(-1)^j s a_j^{-s}(-\theta_0)\Phi_j^{\vee}(s,t)-\sum_{j=1}^{2}(-1)^j a_j^{2-s}(-\theta_0)\Psi_j^{\vee}(s,t)=2i\langle g_2\rangle(s,t)$$

$$(1.11)$$

$$\sum_{j=1}^{2}(2-s)a_j^{-s}(\theta_0)\Phi_j^{\vee}(s,t)+\sum_{j=1}^{2}a_j^{2-s}(\theta_0)\Psi_j^{\vee}(s,t)=2\langle g_3\rangle(s,t)$$

$$\sum_{j=1}^{2}(-1)^j s a_j^{-s}(\theta_0)\Phi_j^{\vee}(s,t)-\sum_{j=1}^{2}(-1)^j a_j^{2-s}(\theta_0)\Psi_j^{\vee}(s,t)=2i\langle g_4\rangle(s,t)$$

Для задачи (II—I):

$$\sum_{j=1}^{2}(2-s)a_j^{-s}(-\theta_0)\Phi_j^{\vee}(s,t)+\sum_{j=1}^{2}a_j^{2-s}(-\theta_0)\Psi_j^{\vee}(s,t)=2\langle g_1\rangle(s,t)$$

$$\sum_{j=1}^{2}(-1)^j s a_j^{-s}(-\theta_0)\Phi_j^{\vee}(s,t)-\sum_{j=1}^{2}(-1)^j a_j^{2-s}(-\theta_0)\Psi_j^{\vee}(s,t)=2i\langle g_2\rangle(s,t)$$

$$(1.12)$$

$$\sum_{j=1}^{2}(\varkappa-1+s)a_j^{-s}(\theta_0)\Phi_j^{\vee}(s,t)-\sum_{j=1}^{2}a_j^{2-s}(\theta_0)\Psi_j^{\vee}(s,t)=4[\mu\langle f_3'\rangle](s,t)$$

$$\sum_{j=1}^{2}(-1)^j(\varkappa+1-s)a_j^{-s}(\theta_0)\Phi_j^{\vee}(s,t)+$$

$$+\sum_{j=1}^{2}(-1)^j a_j^{2-s}(\theta_0)\Psi_j^{\vee}(s,t)=-4i[\mu\langle f_4'\rangle](s,t)$$

Далее решаем полученные системы, не учитывая, что $\Phi_1(z_1)=\overline{\Phi_2(z_2)}$, $\Psi_1(z_1)=\overline{\Psi_2(z_2)}$. Эти соотношения будут следствием действительности функций f_i, g_i. Решения систем (1.10) – (1.12) имеют вид

$$\Phi_k^{\vee}(s,t)=\Delta^{-1}(s,\varkappa)\sum_{j=1}^{4}A_{jk}(s,\varkappa)T_j,\qquad \Psi_k^{\vee}(s,t)=\Delta^{-1}(s,\varkappa)\sum_{j=1}^{4}A_{j,k+2}(s,\varkappa)T_j \tag{1.13}$$

Здесь операторы $A_{jk}(s,\varkappa)$ – алгебраические дополнения элементов матрицы системы (1.10), (1.11) или (1.12); операторы $\Delta(s,\varkappa)$ – определители матриц этих систем, которые могут быть вычислены в явном виде.

Для задачи (I–I):

$$T_1(s,t)=4[\mu\langle f_1'\rangle](s,t),\ T_2(s,t)=-4i[\mu\langle f_2'\rangle](s,t),\ T_3(s,t)=4[\mu\langle f_3'\rangle](s,t)$$

$$T_4(s,t)=-4i[\mu\langle f_4'\rangle](s,t),\ \Delta=16\{(1-s)^2\sin^2 2\theta_0-\varkappa^2\sin^2[2\theta_0(1-s)]\} \tag{1.14}$$

Для задачи (II–II):

$$T_1(s,t)=2\langle g_1\rangle(s,t),\ T_2(s,t)=2i\langle g_2\rangle(s,t),\ T_3(s,t)=2\langle g_3\rangle(s,t)$$

$$T_4(s,t)=2i\langle g_4\rangle(s,t),\ \Delta=16\{(1-s)^2\sin^2 2\theta_0-\sin^2[2(1-s)\theta_0]\} \tag{1.15}$$

Для задачи (II–I):

$$T_1(s,t)=2\langle g_1\rangle(s,t),\ T_2(s,t)=2i\langle g_2\rangle(s,t)$$

$$T_3(s,t)=4[\mu\langle f_3'\rangle](s,t),\ T_4(s,t)=-4i[\mu\langle f_4'\rangle](s,t) \tag{1.16}$$

$$\Delta=16\{(1-s)^2\sin^2 2\theta_0+\varkappa\sin^2[2(1-s)\theta_0]-{}^1/_4(1+\varkappa)^2\}$$

Для окончательного решения задач и определения напряжений и смещений в любой момент времени необходимо обратить преобразование Меллина, однако наличие операторных членов $\Delta^{-1}(\varkappa,s)$ существенно затрудняет обращение при помощи теории вычетов, как это делается обычно. Исключение составляют те случаи, когда Δ перестает по существу зависеть от оператора $\varkappa$, либо когда $\varkappa$ вырождается в постоянную.

2. Рассмотрим задачу (II–II). В этом случае, как видно из (1.15), Δ есть функция только от s и не является оператором, так как не зависит от оператора $\varkappa$. Не зависят от $\varkappa$ также и функции $A_{jk}(s)$. Учитывая соотношения (1.13), (1.11), (1.15) вместе с условием 1, получаем, что функции $\Phi_k^{\vee}(s,t)$, $\Psi_k^{\vee}(s,t)$ определены в полосе $\alpha_1<\operatorname{Re}s<1$ и являются там мероморфными функциями параметра s с полюсами в точках нулей s_k функции $\Delta(s)$, причем в этой полосе

$$\begin{gathered}\Phi_k^{\vee},\ \Psi_k^{\vee}=O(\exp[(-\theta_0+\varepsilon)\operatorname{Im}s])\quad(\operatorname{Im}s\to\infty)\\ \Phi_k^{\vee},\ \Psi_k^{\vee}=O(\exp[(\theta_0-\varepsilon)\operatorname{Im}s])\quad(\operatorname{Im}s\to-\infty),\ \forall\varepsilon>0\end{gathered} \tag{2.1}$$

Тогда в полосе $\delta<\operatorname{Re}s<1$, $\delta=\max(\max\limits_{\operatorname{Re}s_k<1}(\operatorname{Re}s_k),\alpha_1)$ выполнены условия второй части теоремы 1, следовательно

$$\Phi_k(z_k,t)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty}\Delta^{-1}(s)\sum_{j=1}^{4}A_{jk}(s)T_j(s,t)z_k^{-s}\,ds\quad(\delta<c<1)\tag{2.2}$$

и аналогичная формула имеет место для $\Psi_k(z_k, t)$. Кроме того

$$\Phi_k,\ \Psi_k=O(r^{-\delta-\varepsilon})\ (r\to0),\ \Phi_k,\ \Psi_k=O(r^{-1+\varepsilon})\ (r\to\infty),\ \forall\varepsilon>0\tag{2.3}$$

в угле $-\theta_0<\theta<\theta_0$. Таким образом, требуемое условие 2 выполняется для $\alpha=\delta$.

Перенося теперь контур интегрирования в (2.2) влево и вычисляя вычеты подынтегрального выражения в точках нулей s_k функции $\Delta(s)$, как того требует теорема Коши (которая применима вследствие (2.1)), и снова используя теорему 1, получаем

$$\begin{aligned}\Phi_k(z_k,t)&=\sum_{\alpha_1<\mathrm{Re}\,s_m<1}\operatorname*{res}_{s=s_m}\Big[\Delta^{-1}(s)\sum_{j=1}^{4}A_{jk}(s)T_j(s,t)z_k^{-s}\Big]+\Phi_{k0}(z_k,t)=\\&=\sum_{\alpha_1<\mathrm{Re}\,s_m<1}z_k^{-s_m}\sum_{n=0}^{N_m-1}B_{kmn}(t)(\ln z_k)^n+\Phi_{k0}(z_k,t)\end{aligned}\tag{2.4}$$

$$\Phi_{k0}(z_k,t)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\alpha_1-i\infty}^{\alpha_1+i\infty}\Delta^{-1}(s)\sum_{j=1}^{4}T_jz_k^{-s}\,ds=O(r^{-\alpha_1-\varepsilon})\quad(r\to0),\quad\forall\varepsilon>0$$

Аналогично

$$\begin{aligned}\Psi_k(z_k,t)&=\sum_{\alpha_1<\mathrm{Re}\,s_m<1}z_k^{-s_m}\sum_{n=0}^{N_m-1}D_{kmn}(t)(\ln z_k)^n+\Psi_{k0}(z_k,t)\\\Psi_{k0}(z_k,t)&=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\alpha_1-i\infty}^{\alpha_1+i\infty}\Delta^{-1}(s)\sum_{j=1}^{4}A_{j,k+2}T_jz_k^{-s}\,ds=O(r^{-\alpha_1-\varepsilon})\quad(r\to0),\quad\forall\varepsilon>0.\end{aligned}\tag{2.5}$$

Здесь N_m — кратность нуля функции $\Delta(s)$ в точке $s=s_m$, а функция $B_{kmn}(t)$, $D_{kmn}(t)$ выражается через коэффициенты разложения известных из (1.13) функций $\Phi_k^{\vee}(s,t)$, $\Psi_k^{\vee}(s,t)$ в ряд Лорана в окрестности точки s_m, и их можно выписать в явном виде.

Выражения для напряжений имеют вид, аналогичный (2.4), (2.5). Выпишем, к примеру, напряжение σ_r, полученное подстановкой (2.4), (2.5) в (1.2)

$$\begin{aligned}\sigma_r=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2}\sum_{\alpha_1<\mathrm{Re}\,s_m<1}z_k^{-s_m}\Big\{\sum_{n=0}^{N_m-1}(\ln z_k)^n[B_{kmn}(t)(2+s_m)-a_k^2(\theta)D_{kmn}(t)]-\\-\sum_{n=1}^{N_m-1}n(\ln z_k)^{n-1}B_{kmn}(t)\Big\}+\sigma_{r0},\quad\sigma_{r0}=O(r^{-\alpha_1-\varepsilon})\quad(r\to0),\quad\forall\varepsilon>0\end{aligned}\tag{2.6}$$

Выражение для смещения u_r имеет вид

$$u_r=\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{2}\sum_{\alpha_1<\mathrm{Re}\,s_m<1}z_k^{1-s_m}\sum_{n=0}^{N_m-1}\Big\{-a_{3-k}(\theta)(\ln z_k)^n[\mu^{-1}B_{kmn}](t)+\tag{2.7}$$

$$+\sum_{p=0}^{n}\frac{n!}{p!}(s_m-1)^{p-n-1}(\ln z_k)^p[a_k(\theta)[\mu^{-1}D_{kmn}](t)-$$

$$-a_{3-k}(\theta)[\mu^{-1}\varkappa B_{kmn}](t)]\Big\}+u_{r0},\quad \frac{\partial u_{r0}}{\partial r}=O(r^{-\alpha_1-\varepsilon})\quad (r\to 0),\quad \forall\varepsilon>0$$

Смещение u_θ будет представляться аналогично. Если в условии 1 параметр $\alpha_1<0$, т. е. приложенные усилия стремятся к нулю, то сингулярность напряжений в вершине клина определяется только нулями определителя Δ, соответствующего задаче (II—II), в полосе $0\leqslant\operatorname{Re} s<1$. Если этих нулей нет, то напряжения и деформации, как следует из (2.4)—(2.7), ограничены в угловой точке. В противном случае они имеют там особенности вида r^{-s_k}, умноженные на $(\ln r)^{N_k-1}$, если нуль s_k имеет кратность N_k. Если приложенные усилия имеют степенные особенности, то особенности такого же порядка добавляются к разложениям (2.4)—(2.7).

Итак, в задаче (II—II) для стареющего наследственно упругого клина асимптоматика напряжений и смещений в его вершине будет той же, что и для ненаследственного тела, с той лишь разницей, что обобщенные коэффициенты интенсивности напряжений B_{kmn}, D_{kmn} при сингулярном члене будут меняться во времени, а коэффициенты в асимптотике смещений выражаются через них при помощи наследственных операторов.

3. Рассмотрим далее задачи (I—I) и (II—I). Пусть оператор $\varkappa$ не является наследственным, т. е. вырождается в умножение на функцию $\varkappa_0(t)$ (это будет в том случае, когда коэффициент Пуассона материала не является наследственным, $\nu=\nu_0(t)$). Тогда те же рассуждения, что и в п. 2, приводят к выражениям (2.4)—(2.7), в которых в качестве Δ, A_{jk}, s_m и T_j берутся величины для соответствующих задач. Таким образом, если ν не является наследственным оператором, то асимптотика для напряжений и смещений в окрестности угловой точки в задачах (I—I) и (II—I) будет той же, что и для ненаследственного материала с тем же коэффициентом Пуассона, а коэффициенты интенсивности напряжений B_{kmn}, D_{kmn}, зависящие от $g_i(r, t)$, $[\mu f_i](r, t)$ будут функциями времени.

4. Пусть теперь $\varkappa$ — общий временной оператор. Рассмотрим некоторые частные геометрии клина: $\theta_0=\pi/2$ или $\theta_0=\pi$, то есть случай полуплоскости или случай полубесконечной трещины в бесконечной плоскости. Тогда для задачи (I—I)

$$\Delta=\varkappa^2\Delta_1(s),\quad \Delta_1(s)=-16\sin^2[2\theta_0(1-s)]$$

Подстановка в (1.13) дает

$$\Phi_k{}^\vee(s,t)=\Delta_1^{-1}(s)\sum_{j=1}^{4}A_{jk}(s,\varkappa)\varkappa^{-2}T_j,$$

$$\Psi_k{}^\vee(s,t)=\Delta_1^{-1}(s)\sum_{j=1}^{4}A_{j,k+2}(s,\varkappa)\varkappa^{-2}T_j$$

Учитывая, что $\Delta_1^{-1}(s)$ не является оператором, а функции $[A_{jk}(s, \varkappa)\varkappa^{-2}T_j](s, t)$ есть голоморфные функции от s в полосе $\alpha_1<\operatorname{Re} s<1$, и проводя те же рассуждения, что и в п. 2, снова приходим для асимптотики напряжений и смещений к выражениям (2.4)—(2.7), в которых Δ необходимо заменить на Δ_1, s_m — на корни $\Delta_1(s)=0$, $T_j(s, t)$ — на $[\varkappa^{-2}T_j](s, t)$, а под A_{jk} понимать операторы, зависящие от $\varkappa$. Это приводит лишь к зависимости обобщенных коэффициентов интенсивности напряжений B_{kmn}, D_{kmn} от времени, оставляя асимптотику напряжений и смещений той же, что и для ненаследственной задачи при этой же геометрии. Другими словами для задачи (I—I) в трещине будет особенность напряжений типа квадратного корня, а в полуплоскости, если заданные смещения — гладкие функции, особенность отсутствует.

5. Рассмотрим теперь случай общей геометрии для задач (I—I), (II—I).

5.1. Пусть воздействие приложено в момент $t=0$. Рассмотрим асимптотику напряжений и смещений при $t\to+0$. В этом случае оператор

$$\varkappa=\varkappa_0(t)+\varkappa^*,\qquad \varkappa^* f=\int\limits_{-\infty}^{t}\varkappa(t,\tau)f(\tau)\,d\tau$$

сводится к умножению на постоянную $\varkappa_0(0)$, и опять повторяя рассуждения п. 2, получаем асимптотику (2.4)—(2.7), в которой Δ, A_{kj} и T_j относятся к соответствующим задачам, а фигурирующие в выражениях для этих параметров операторы $\varkappa$, μ заменяются постоянными $\varkappa_0(0)$, $\mu_0(0)$. В этом случае асимптотика будет той же, что и для ненаследственного тела с упругими постоянными Ламе $\lambda_0(0)$, $\mu_0(0)$.

5.2. Пусть снова воздействие приложено при $t=0$. Рассмотрим асимптотику в момент времени $t=t^\circ$, $0\leqslant t^\circ<\infty$. Пусть сначала $\varkappa_0(t)=\mathrm{const}\neq0$ (в частности, это будет иметь место для нестареющих наследственно упругих материалов). В этом случае, учитывая обратимость оператора Вольтерра второго рода на конечном отрезке, получаем, что функции $\Phi_k^\vee(s,t)$ и $\Psi^\vee_k(s,t)$, определяемые выражениями (1.13), будут аналитическими функциями параметра s в полосе $\alpha_1<\operatorname{Re}s<1$ регулярности трансформант граничных условий T_i. В этой полосе данные функции будут иметь конечное число особых точек, не являющихся, вообще говоря, полюсами конечного порядка, в которых равны нулю внеинтегральные члены операторов $\Delta(s,\varkappa)$ задач (I—I) и (II—I), т. е. соответствующие функции $\Delta(s,\varkappa_0)$. Эти особые точки совпадают с особыми точками, соответствующими времени $t=0$ (п. 5.1). Таким образом, в полосе

$$\delta<\operatorname{Re}s<1,\quad \delta=\max[\max_{\operatorname{Re}s_k<1}(\operatorname{Re}s_k),\alpha_1]\tag{5.1}$$

где s_k — нули определителя $\Delta(s,\varkappa_0)$, функции $\Phi_k^\vee(s,t)$ $\Psi_k^\vee(s,t)$ регулярны по s. Для изучения их поведения при $\operatorname{Im}s\to\pm\infty$ представим $\Delta(s,\varkappa)$ в виде

$$\Delta(s,\varkappa)=\Delta(s,\varkappa_0(0))\Delta_2(s,\varkappa)\tag{5.2}$$

Здесь $\Delta(s,\varkappa_0)$ уже не является оператором и при $\operatorname{Im}s\to\pm\infty$ для задачи (I—I) $\Delta_2(s,\varkappa)\to\varkappa^2/\varkappa_0^2(0)$, а для задачи (II—I) $\Delta_2(s,\varkappa)\to\varkappa/\varkappa_0(0)$.

Отсюда следует, что оператор $\Delta_2^{-1}(s,\varkappa)$ остается ограниченным при $\operatorname{Im}s\to\pm\infty$, если ограниченным является оператор $\varkappa^{-1}$, а для $\Phi_k^\vee$, $\Psi_k^\vee$ имеют место оценки (2.1). Таким образом, функции $\Psi_k^\vee(s,t^\circ)$ и $\Phi_k^\vee(s,t^\circ)$ удовлетворяют в полосе $\delta<\operatorname{Re}s<1$ условиям теоремы 1, и для $\Phi_k(z_k,t^\circ)$ $\Psi_k(z_k,t^\circ)$ получаем представления (2.2) и оценки (2.3), в которых параметр δ определен соотношением (5.1). Передвигая контур интегрирования в (2.2) влево и учитывая, как и в п. 2, вычеты в нулях функции $\Delta(s,\varkappa_0)$, получаем представления

$$\Phi_k(z_k,t^\circ)=\sum_{1-\alpha_1<\operatorname{Re}s_m<1}\Phi_k^{(m)}(z_k,t^\circ)+\Phi_k^{(\circ)}(z_k,t^\circ)$$

и аналогичные соотношения для $\Psi_k(z_k,t^\circ)$.

В рассматриваемом случае явные выражения для вычетов получить затруднительно. Однако, принимая во внимание, что при перенесении контура интегрирования через особую точку (нуль функции $\Delta(s,\varkappa_0)$), т. е. при смене полосы регулярности функций $\Phi_k^\vee$, $\Psi_k^\vee$, скачком меняются параметры α и β теоремы 1, получаем, что внутри угла $-\theta_0<\theta<\theta_0$

$$\Phi_k^{(m)}(z_k, t^\circ),\quad \Psi_k^{(m)}(z_k, t^\circ)=O(r^{-\mathrm{Re}\, s_m-\varepsilon}),$$

$$\Phi_k^{(\circ)}(z_k, t^\circ),\quad \Psi_k^{(\circ)}(z_k, t^\circ)=O(r^{-\alpha_1-\varepsilon})\quad (r\to 0),\quad \forall\varepsilon>0$$

Подставляя эти соотношения в выражения для напряжений (1.1), будем иметь

$$\sigma_{ij}(r,\theta,t^\circ)=\sum_{\alpha_1<\mathrm{Re}\, s_m<1}\sigma_{ij}^{(m)}+\sigma_{ij}^{(\circ)},\quad \sigma_{ij}^{(m)}(r,\theta,t^\circ)=O(r^{-\mathrm{Re}\, s_m-\varepsilon}),\tag{5.3}$$

$$\sigma_{ij}^{(\circ)}(r,\theta,t^\circ)=O(r^{-\alpha_1-\varepsilon})\quad (r\to 0),\quad \forall\varepsilon>0$$

Эти оценки, как видно, не зависят от времени t°, если $\varkappa_0=\mathrm{const}$.

Рассмотрим теперь общий случай асимптотики в момент времени $t=t^\circ<\infty$, когда воздействие приложено при $t=0$ и $\varkappa_0(t)$ — функция времени при $0\leqslant t\leqslant t^\circ$. Тогда функции $\Phi^\vee_k(s, t^\circ)$, $\Psi_k^\vee(s, t^\circ)$ будут аналитическими по s в той же полосе $\alpha_1<\mathrm{Re}\, s<1$, а их особые точки находятся среди точек s, в которых при каком-либо $t\in[0, t^\circ]$ внеинтегральный член оператора $\Delta(s, \varkappa)$ обращается в нуль. Разлагая, как и выше, оператор Δ по формуле (5.2), получаем, что особые точки функций $\Phi_k^\vee(s, t^\circ)$, $\Psi_k^\vee(s, t^\circ)$ принадлежат криволинейным отрезкам на плоскости s, параметрическое уравнение которых имеет вид $\Delta(s(t), \varkappa_0(t))=0$, $0\leqslant t\leqslant t^\circ$, и в полосе $\alpha_1<\mathrm{Re}\, s<1$ для функций $\Phi_k^\vee$ и $\Psi_k^\vee$ имеют место оценки (2.1). Из (1.14), (1.16) можно видеть, что если $\varkappa_0(t)\geqslant 1$ и $\theta_0>0$ в задаче (I—I) или $\varkappa_0(t)>0$ в задаче (II—I) при $0\leqslant t\leqslant t^\circ$ (эти условия заведомо выполнены для реальных материалов, в которых $\nu_0(t)\leqslant {}^1/_2$), то выполняется строгое неравенство

$$\delta(t^\circ)=\max\{\max_{0\leqslant t\leqslant t^\circ,\ \mathrm{Re}\, s_k(t)<1}[\mathrm{Re}\, s_k(t)],\ \alpha_1\}<1\tag{5.4}$$

где $s_k(t)$ — нули функции $\Delta(s, \varkappa_0(t))$.

Отсюда следует, что в полосе $\delta(t^\circ)<\mathrm{Re}\, s<1$ для $\Phi_k^\vee(s, t^\circ)$, $\Psi_k^\vee(s, t^\circ)$ выполнены условия второй части теоремы 1 и, значит,

$$\sigma_{ij}(r,\theta,t^\circ)=O(r^{-\delta(t^\circ)-\varepsilon})\quad (r\to 0),\quad \forall\varepsilon>0\quad \text{при}\quad -\theta_0<\theta<\theta_0\tag{5.5}$$

Если полосы сингулярности $\min\limits_{0\leqslant t\leqslant t^\circ}[\mathrm{Re}\, s_k(t)]<\mathrm{Re}\, s<\max\limits_{0\leqslant t\leqslant t^\circ}[\mathrm{Re}\, s_k(t)]$ не перекрываются в пределах полосы $\alpha_1<\mathrm{Re}\, s<1$ (это будет иметь место по крайней мере при достаточно малых $t^\circ\geqslant 0$), то соотношение (5.5) можно уточнить, приходя к оценкам (5.3), в которых $\mathrm{Re}\, s_m$ необходимо заменить на $\max\limits_{0\leqslant t\leqslant t^\circ}[\mathrm{Re}\, s_m(t)]$.

5.3. Пусть воздействие приложено при $t=0$. Рассмотрим асимптотику напряжений при $t=\infty$. Будем далее обозначать через $C[0, \infty]$ пространство функций, непрерывных на полуоси и имеющих на бесконечности конечный предел, а через $C[0, \infty)$ — пространство функций, непрерывных и равномерно ограниченных на полуоси, которые, однако, могут не иметь предела на бесконечности. В обоих пространствах норма $\|f\|=\sup|f(t)|$ при $0\leqslant t<\infty$.

Пусть некоторый оператор Вольтерра

$$(\mathbf{K}f)(t)=K_0(t)f(t)+\int_0^t K(t,\tau)f(\tau)\,d\tau$$

действует в пространстве функций, непрерывных на каждом конечном отрезке. По лемме 2 из [16] он действует и ограничен в $C[0, \infty)$, если

$$K_0(t)\in C[0, \infty) \text{ и } \int_0^t |K(t,\tau)|d\tau<M<\infty$$

для всех $t>0$.

Проводя рассуждения, близкие [15], покажем, что имеет место

Лемма. Если оператор K действует и ограничен в $C[0, \infty)$, имеются конечные пределы

$$\lim_{t\to\infty}\int_0^t K(t,\tau)\,d\tau=K_{1\infty},\qquad \lim_{t\to\infty}K_0(t)=K_0(\infty)$$

и существует функция $m(\tau)$, такая, что

$$\int_0^\infty |m(\tau)|\,d\tau=M_2<\infty,\quad \lim_{t\to\infty}\int_0^a |K(t,\tau)-m(\tau)|\,d\tau=0 \tag{5.6}$$

для любого $a\in[0, \infty)$, то для любой функции $f(t)\in C[0, \infty]$

$$\lim_{t\to\infty}(\mathrm{K}f)(t)=K_\infty f(\infty)+\int_0^\infty m(\tau)[f(\tau)-f(\infty)]\,d\tau,\quad K_\infty=K_0(\infty)+K_{1\infty} \tag{5.7}$$

Действительно

$$\int_0^t K(t,\tau)f(\tau)\,d\tau=f(\infty)\int_0^t K(t,\tau)\,d\tau+\int_0^t [f(\tau)-f(\infty)]m(\tau)\,d\tau+$$

$$+\int_0^{t^*}[f(\tau)-f(\infty)][K(t,\tau)-m(\tau)]\,d\tau+\int_{t^*}^t [f(\tau)-f(\infty)][K(t,\tau)-m(\tau)]\,d\tau$$

$$(0\leqslant t^*\leqslant t)$$

При $t\to\infty$ первый член стремится к $f(\infty)K_{1\infty}$, второй — к интегральному слагаемому в правой части (5.7). Докажем, что сумма двух последних членов стремится к нулю. Оценим четвертый член

$$|I_4|\leqslant \sup_{t^*\leqslant\tau<\infty}|f(\tau)-f(\infty)|\int_{t^*}^t (|K(t,\tau)|+|m(\tau)|)\,d\tau\leqslant$$

$$\leqslant \sup_{t^*\leqslant\tau<\infty}|f(\tau)-f(\infty)|(M+M_2)\leqslant\frac{\varepsilon}{2}$$

для любого $\varepsilon>0$, если t^* достаточно велико, так как $f(\tau)\to f(\infty)$. Третий член

$$|I_3|\leqslant \sup_{0\leqslant\tau\leqslant t^*}|f(\tau)-f(\infty)|\int_0^{t^*}|K(t,\tau)-m(\tau)|\,d\tau\leqslant\frac{\varepsilon}{2}$$

для любого $\varepsilon>0$ и t^* вследствие (5.6), если t достаточно велико. Итак, выбирая достаточно большим t^*, а по нему — достаточно большую величину t, можно добиться, чтобы $|I_3|+|I_4|<\varepsilon$ для любого $\varepsilon>0$. Лемма доказана.

Отсюда следует, что оператор K, удовлетворяющий условию леммы, действует и ограничен в $C[0, \infty]$. Рассмотрим далее класс операторов, для которых $m(\tau)\equiv 0$, и назовем их операторами с затухающей памятью. Нетрудно видеть, что действующий и ограниченный в $C[0, \infty)$ оператор с разностным ядром действует и ограничен также и в пространстве $C[0, \infty]$ (если $K_0(t)\to K_0(\infty)\neq\pm\infty$ при $t\to\infty$) и всегда является оператором с затухающей памятью.

Таким образом, если операторы наследственной упругости K, N — ограниченные в $C[0, \infty]$ операторы с затухающей памятью, то, как и для операторов с разностными ядрами [12], их произведение является ограниченным в $C[0, \infty]$ оператором с затухающей памятью и имеются длительные модули K_∞, N_∞ такие, что $(\mathbf{KN}f)(\infty)=K_\infty(\mathbf{N}f)(\infty)=K_\infty N_\infty f(\infty)$, т. е. $(\mathbf{KN})_\infty=K_\infty N_\infty$. Можно показать, что если функция f принадлежит области значений ограниченного оператора с затухающей памятью, то

$$(\mathbf{K}^{-1}f)(\infty)=f(\infty)/K_\infty \tag{5.8}$$

В частности, если обратный оператор $\mathbf{K}^{-1}$ определен на всем пространстве $C[0, \infty]$, то соотношение (5.8) имеет место для любой функции f из этого пространства.

Пусть приложенные воздействия f_i, g_i принадлежат $C[0, \infty)$ (или $C[0, \infty]$) по времени для почти всех значений радиуса, а упругие операторы μ^{-1} и $\varkappa$ являются ограниченными в $C[0, \infty)$ ($C[0, \infty]$). Будем далее считать, что в задаче I—I $\|\varkappa^*\|\leqslant\varkappa_0(t)-1$, $\theta_0>0$, а в задаче II—I $\|\varkappa^*\|<\varkappa_0(t)$ для любого $t\in[0, \infty)$

$$\|\varkappa^*\|=\sup_{0\leqslant t<\infty}\int_0^t|\varkappa(t,\tau)|\,d\tau$$

Тогда анализ соотношений (1.14), (1.16) для операторов $\Delta(\varkappa, s)$ позволяет установить, что существует число $\delta_\infty<1$, такое что в полосе $\delta_\infty<\operatorname{Re}s<1$ оператор $\Delta(\varkappa, s)$ имеет ограниченный обратный, следовательно, для любой функции из $C[0, \infty)$ ($C[0, \infty]$) функция $\Delta^{-1}(\varkappa, s)f$ регулярна по s в этой полосе. Условия, наложенные на $\varkappa$, будут выполнены как для плоской деформации, так и для плоского напряженного состояния, если

$$0<\nu_0(t),\quad \sup_{0\leqslant t<\infty}\nu_0(t)+\|\nu^*\|\leqslant\frac{1}{2},\quad \|\nu^*\|=\sup_{0\leqslant t<\infty}\int_0^t|\nu(t,\tau)|\,d\tau \tag{5.9}$$

Рассмотрим случай, когда приложенные воздействия f_i, $g_i\in C[0, \infty]$, упругие наследственные операторы μ^{-1} и ν (а значит и $\varkappa$) — ограниченные в $C[0, \infty]$ операторы с затухающей памятью. Тогда этим свойством обладает также оператор $\Delta(\varkappa, s)$, а в полосе $\delta_\infty<\operatorname{Re}s<1$ для него имеет место формула (5.8), т. е. $[\Delta^{-1}(s, \varkappa)f](\infty)=f(\infty)/\Delta(s, \varkappa_\infty)$. Из (1.13) в этой полосе получаем

$$\Phi_k{}^\vee(s,\infty)=\Delta^{-1}(s,\varkappa_\infty)\sum_{j=1}^{4}A_{jk}(s,\varkappa_\infty)T_j(s,\infty)$$

и аналогичное выражение для $\Psi_k{}^\vee(s, \infty)$. Эти соотношения аналитически продолжаются на всю полосу регулярности граничных условий $\alpha_1<\operatorname{Re}s<1$.

Снова проводя те же рассуждения, что и в п. 2, приходим к асимптотике (2.4)—(2.7), в которой Δ, A_{jk} и T_j относятся к соответствующей задаче, а операторы $\varkappa$ и μ заменены в них на постоянные $\varkappa_\infty$ и μ_∞, т. е. асимптотика для напряжений и смещений будет той же, что и для ненаследственного тела с упругими постоянными $\varkappa_\infty$ и μ_∞.

Откажемся теперь от довольно обременительного для стареющих материалов [15] условия затухающей памяти. Будем считать ν и $\varkappa$ операторами, действующими и ограниченными в $C[0,\infty)$, и потребуем, чтобы мгновенный коэффициент Пуассона $\nu_0(t)\to\nu(\infty)\neq\pm\infty$ при $t\to\infty$.

Пусть $\sigma(\varkappa^*)$ — спектр оператора $\varkappa^*$ в $C[0,\infty)$, т. е. для любого комплексного числа $\gamma\notin\sigma(\varkappa^*)$ оператор $[\varkappa^*-\gamma]$ имеет ограниченный обратный в этом пространстве, а для любого $\gamma\in\sigma(\varkappa^*)$ — не имеет. Используя теорему 2 [16], получаем, что для любой функции $f\in C[0,\infty]$ спектр оператора $f(t)\varkappa^*$ равен $\sigma[f(t)\varkappa^*]=f(\infty)\sigma(\varkappa^*)$. Учитывая это и представляя оператор $\Delta(s,\varkappa)$ для задач I—I и II—I, как полином от $\varkappa$ в виде произведения двух сомножителей, в каждый из которых оператор $\varkappa$ входит в первой степени, нетрудно видеть, что для всех s, не являющихся корнями уравнения $\Delta(s,\varkappa_0(\infty)+\gamma)=0$ для какого-либо числа $\gamma\in\sigma(\varkappa^*)$ или уравнения $\Delta(s,\varkappa_0(t))=0$ для какого-либо $t\in[0,\infty)$, оператор $\Delta^{-1}(s,\varkappa)$ является ограниченным и, следовательно, для любой функции $f(t)\in C[0,\infty)$ функция $\Delta^{-1}(s,\varkappa)f$ регулярна по s и ограничена равномерно по $t\in[0,\infty)$. Если выполнены условия, наложенные выше на $\varkappa$ или условия (5.7), то это будет иметь место в некоторой полосе $\delta_\infty<\operatorname{Re}s<1$.

Нижняя оценка для δ_∞ имеет вид

$$\delta_\infty=\max(\delta_{1\infty},\delta_{2\infty}),\qquad \delta_{1\infty}=\sup_{\gamma\in\sigma(\varkappa^*),\ \operatorname{Re}s_{k\infty}(\gamma)<1}[\operatorname{Re}s_{k\infty}(\gamma)],$$

$$\Delta(s_{k\infty}(\gamma),\varkappa_0(\infty)+\gamma)=0 \tag{5.10}$$

$$\delta_{2\infty}=\sup_{0\leqslant t<\infty,\ \operatorname{Re}s_k(t)<1}[\operatorname{Re}s_k(t)],\qquad \Delta(s_k(t),\varkappa_0(t))=0$$

Учитывая представления (5.2), как и в п. 5.2, получаем, что в полосе $\delta(\infty)<\operatorname{Re}s<1$ имеют место оценки (2.1), причем здесь они равномерны по $t\in[0,\infty)$, и, прослеживая доказательство теоремы 1 в [14], получаем, что следующая из нее оценка

$$\sigma_{ij}(r,\theta,t)=O(r^{-\delta(\infty)-\varepsilon}),$$
$$(r\to0),\quad \forall\varepsilon>0,\quad \delta(\infty)=\max(\delta_\infty,\alpha_1) \tag{5.11}$$

является равномерной по $t\in[0,\infty)$, т. е. верной и для $t=\infty$. Здесь δ_∞ дается формулой (5.10), воспользоваться которой, а значит и оценкой можно лишь в том случае, когда имеется информация о спектре $\sigma(\varkappa^*)$.

Рассмотрим один из таких случаев, когда спектр удается вычислить. Пусть оператор $\varkappa$ при больших временах стремится к оператору $\varkappa^0$ с разностным ядром $\varkappa^\circ(t-\tau)$, соответствующему состарившемуся материалу (см. п. 6 [15]) в том смысле, что

$$\lim_{\xi\to\infty}\sup_{\xi\leqslant t<\infty}\int_\xi^t|\varkappa(t,\tau)-\varkappa^0(t-\tau)|\,d\tau=0$$

Можно показать, что это имеет место, если таким свойством обладает оператор ν и, в частности, если аналогичные соотношения выполнены для операторов λ и μ. По теореме 2 [16] спектры операторов $\varkappa^*$ и $\varkappa^{\circ*}$ совпадают, а из теоремы Винера — Пэли (теорема 18 [17], см. также п. 3° [16]) следует, что спектр $\sigma(\varkappa^{\circ*})$ состоит из чисел γ, равных

$$\gamma(\omega)=\int_0^\infty\varkappa^0(\tau)\exp(-\omega\tau)\,d\tau \tag{5.12}$$

где параметр ω пробегает полуплоскость $\operatorname{Re}\omega\geqslant0$. Отсюда при помощи формулы (5.10) параметр $\delta(\infty)$ в оценке (5.11) можно прямо вычислить

$$\delta(\infty)=\max\{\sup_{\operatorname{Re}\omega\geqslant0,\ \operatorname{Re}s_{k\infty}<1}[\operatorname{Re}s_{k\infty}(\gamma(\omega))],\ \delta_{2\infty},\alpha_1\},$$

$$\Delta[s_{k\infty},\varkappa_0(\infty)+\gamma(\omega)]=0 \tag{5.13}$$

Функция $\gamma(\omega)$ дается выражением (5.12).

Учитывая, что спектры оператора Вольтерра, действующего в $C[0, \infty)$, в пространствах $C[0, \infty)$ и $L_\infty[0, \infty]$ совпадают [16], приходим к заключению, что результаты, полученные для функций f_i, $g_i \in C[0, \infty)$ верны и для функций f_i, $g_i \in L_\infty[0, \infty]$ по времени для почти всех r.

5.4. Рассмотрим далее разностные операторы без старения, то есть λ_0, $\mu_0 = \mathrm{const}$; $\lambda(t, \tau) = \lambda(t-\tau)$, $\mu(t, \tau) = \mu(t-\tau)$. Пусть при $t = -\infty$ приложены периодические воздействия $g_i(r, t) = g_{i0}(r) \cos \Omega t$, $f_i(r, t) = f_{i0}(r) \cdot \cos \Omega t$, которые представим в виде суммы $g_i = {}^1/_2 g_{i0}(r)(e^{i\Omega t} + e^{-i\Omega t})$, $f_i = {}^1/_2 f_{i0}(r)(e^{i\Omega t} + e^{-i\Omega t})$.

Ввиду линейности задачи решим ее сначала с нагрузкой, задаваемой первым членом в скобках, а затем сложим найденное решение с решением, полученным из него заменой Ω на $-\Omega$.

Будем искать решения систем (1.10), (1.12), соответствующих задачам (I—I) и (II—I) в виде

$$\Phi_j^{\vee}(s, t) = \Phi_{j0}^{\vee}(s) \exp[i(\Omega t + \varepsilon)], \quad \Psi_j^{\vee}(s, t) = \Psi_{j0}^{\vee}(s) \exp[i(\Omega t + \varepsilon)]$$

Тогда после подстановки в (1.10) и (1.12) придем к тем же системам с заменой там операторов $\varkappa$ и μ их постоянными комплексными аналогами $\varkappa_c(\Omega)$ и $\mu_c(\Omega)$

$$\varkappa_c(\Omega) = \varkappa_0 + \int_0^\infty \varkappa(\tau) e^{-i\Omega t} d\tau, \qquad \mu_c(\Omega) = \mu_0 + \int_0^\infty \mu(\tau) e^{-i\Omega\tau} d\tau$$

Разрешая полученные системы, снова приходим к выражениям (1.13), а после обращения Меллина — к асимптотикам (2.4)—(2.7), в которых функции Δ, A_{jk}, T_j — свои для каждой задачи с заменой в них $\varkappa$ на $\varkappa_c(\Omega)$ и μ на $\mu_c(\Omega)$. Замена в полученных представлениях Ω на $-\Omega$ дает вторую половину решения. Отметим, что корни $s_{kc}(\Omega)$, зависящие от частоты нагружения, при $\Omega \neq 0$ будут, как правило, комплексными числами, а учитывая, что $\varkappa_c(-\Omega) = \overline{\varkappa_c(\Omega)}$, $\mu_c(-\Omega) = \overline{\mu_c(\Omega)}$ можно показать, что части решения для Ω и $-\Omega$ дают комплексно сопряженные степени сингулярности напряжений. В результате оказывается, что асимптотика напряжений и смещений будет осциллировать при подходе к угловой точке, т. е. $\sigma_r \sim r^{-s_{k1}(\Omega)} \cos[s_{k2}(\Omega) \ln r + c]$, где $s_{k1} = \mathrm{Re}\, s_{kc}(\Omega)$, $s_{k2} = \mathrm{Im}\, s_{kc}(\Omega)$.

В итоге получаем, что асимптотика напряжений в задачах (I—I) и (II—I) при колебательной нагрузке для наследственно упругого тела без старения будет действительной частью асимптотики, получаемой для ненаследственного тела, если в качестве $\varkappa$ и μ взять там комплексные модули $\varkappa_c(\Omega)$ и $\mu_c(\Omega)$.

Отметим, что поскольку для задач I—I, II—1 оценки (5.3), (5.5) не являются равномерными по t на полубесконечном интервале, то при $t \to \infty$ они, вообще говоря, не соответствуют асимптотике для материала с затухающей памятью, полученной в предположении, что воздействия f_i, g_i стремятся к конечным пределам $f_i(\infty)$, $g_i(\infty)$, или асимптотике для нестареющего материала под действием колебательных нагрузок, если даже упругие операторы действуют и ограничены в соответствующих пространствах. Две последние асимптотики могут не соответствовать друг другу, поскольку они верны лишь для двух различных характеров нагрузок. Но все эти асимптотики и оценки являются уточнением оценки (5.11), (5.10) (или (5.11), (5.13), если оператор $\varkappa$ стремится к оператору с разностным ядром), которая является более грубой, но равномерной по $t \in [0, \infty)$.

До сих пор речь шла о задачах для бесконечного клина. При помощи срезающей функции эти результаты, так же, как и в [7—10], легко переносятся на задачи для двумерного тела произвольной формы с угловыми точками. При этом использование срезки позволяет перейти от задачи в теле произвольной формы к соответствующей модельной задаче в бесконечном клине, тип граничных условий в которой будет тем же, что и в исходной задаче в окрестности изучаемой угловой точки. Правые части граничных условий в модельной задаче хотя и не являются известными вдоль всей границы, но будут удовлетворять условию 1, если в окрестности угловой точки этому условию (в нуле) с некоторым параметром $\alpha_1 = \alpha_1^\circ$ удовлетворяют правые части граничных условий исходной задачи. Кроме того в модельной задаче в некоторой конечной области D°, отграниченной от угловой точки и бесконечности, будут отличны от нуля правые части уравнений Ламе (массовые силы). Наложение на эту задачу решения задачи для бесконечной плоскости с заданными массовыми силами, которое получается интегрированием по области D° решения задачи о сосредоточенной силе в бесконечной стареющей наследственноупругой плоскости, позволяет перейти к рассматривавшимся в п. 1—5 задачам для клина без массовых сил с фиктивно заданными правыми частями граничных условий, которые удовлетворяют условию 1 с параметром $\alpha_1=\max(\alpha_1^\circ, 0)$. Легко показать, что решение для сосредоточенной силы получается из соответствующего решения для классической упругой среды [13] заменой фигурирующей там упругой постоянной $\varkappa$ наследственным оператором $\varkappa$, действующим на величины компонент сосредоточенной силы — функции времени.

Таким образом, если тип граничных условий в окрестности угловой точки тела произвольной формы совпадает с типом граничных условий в задачах (I—I), (II—II) или (II—I), то асимптотика напряжений и смещений в ее окрестности будет той же (с точностью до смещения как жесткого целого), что и в соответствующей задаче о бесконечном клине с некоторыми неизвестными обобщенными коэффициентами интенсивности напряжений $B_{kmn}(t)$, $D_{kmn}(t)$, для определения которых необходимо полностью решить исходную задачу, и $\alpha_1=\max(\alpha_1^\circ, 0)$.

Автор признателен Н. Х. Арутюняну за внимание к работе и обсуждение полученных результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Williams M. L.* Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plates in extension.— J. Appl. Mech., 1952, v. 19, № 4, p. 526—528.
2. *Аксентян О. К.* Особенности напряженно-деформированного состояния плиты в окрестности ребра.— ПММ, 1967, т. 31, вып. 1, с. 178—186.
3. *Чобанян К. С., Алексанян Р. К.* Термоупругие напряжения в окрестности края поверхности соединения составного тела.— Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1971, т. 24, № 3, с. 22—32.
4. *Уфлянд Я. С.* Интегральные преобразования в задачах теории упругости. М.— Л.: Изд-во АН СССР, 1963, 367 с.
5. *Bogy D. B.* Two edge-bonded elastic wedges of different materials and wedge angles under surfase tractions.— Trans. ASME. Ser. E, J. Appl. Mech., 1971, v. 38, № 2, p. 377—386.
6. *Михайлов С. Е.* Сингулярность напряжений в составном произвольно-анизотропном теле и приложения к композитам.— Изв. АН СССР, МТТ, 1979, № 6, с. 33—42.
7. *Кондратьев В. А.* Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками.— Тр. Моск. матем. о-ва, 1967, т. 16, с. 209—292.
8. *Эскин Г. И.* Задача сопряжения для уравнений главного типа с двумя независимыми переменными.— Тр. Моск. матем. о-ва, 1970, т. 21, с. 245—292.
9. *Арутюнян Н. Х., Назаров С. А., Шойхет Б. А.* Оценки и асимптотика напряженно-деформированного состояния трехмерного тела с трещиной в теории упругости и теории ползучести.— Докл. АН СССР, 1982, т. 266, № 6, с. 1361—1366.
10. *Журавлев В. П., Назаров С. А., Шойхет Б. А.* Асимптотика вблизи вершины трещины напряженно-деформированного состояния неоднородно-стареющих тел.— ПММ, 1983, т. 47, № 2, с. 200—208.
11. *Арутюнян Н. Х.* Некоторые вопросы теории ползучести. М.— Л.: Гостехиздат, 1952, 323 с.
12. *Работнов Ю. Н.* Элементы наследственной механики твердых тел. М.: Наука, 1977, 383 с.
13. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966, 707 с.
14. *Титчмарш Е.* Введение в теорию интегралов Фурье. М.— Л.: Гостехиздат, 1948, 479 с.
15. *Арутюнян Н. Х., Шойхет Б. А.* Асимптотическое поведение решения краевой задачи теории ползучести неоднородных стареющих тел с односторонними связями.— Изв. АН СССР, МТТ, 1981, № 3, с. 31—48.
16. *Гольденгершель Э. И.* Спектр вольтеррова оператора на полуоси и экспоненциальный рост решений систем интегральных уравнений типа Вольтерра.— Матем. сб., 1964, т. 64, № 1, с. 115—139.
17. *Винер Н., Пэли Р.* Преобразование Фурье в комплексной области. М.: Наука, 1964, 268 с.

Москва

Поступила в редакцию
11.VIII.1983